Betrachten Sie die folgende – bereits geordnete – Stichprobe der Größe $n = 10$:

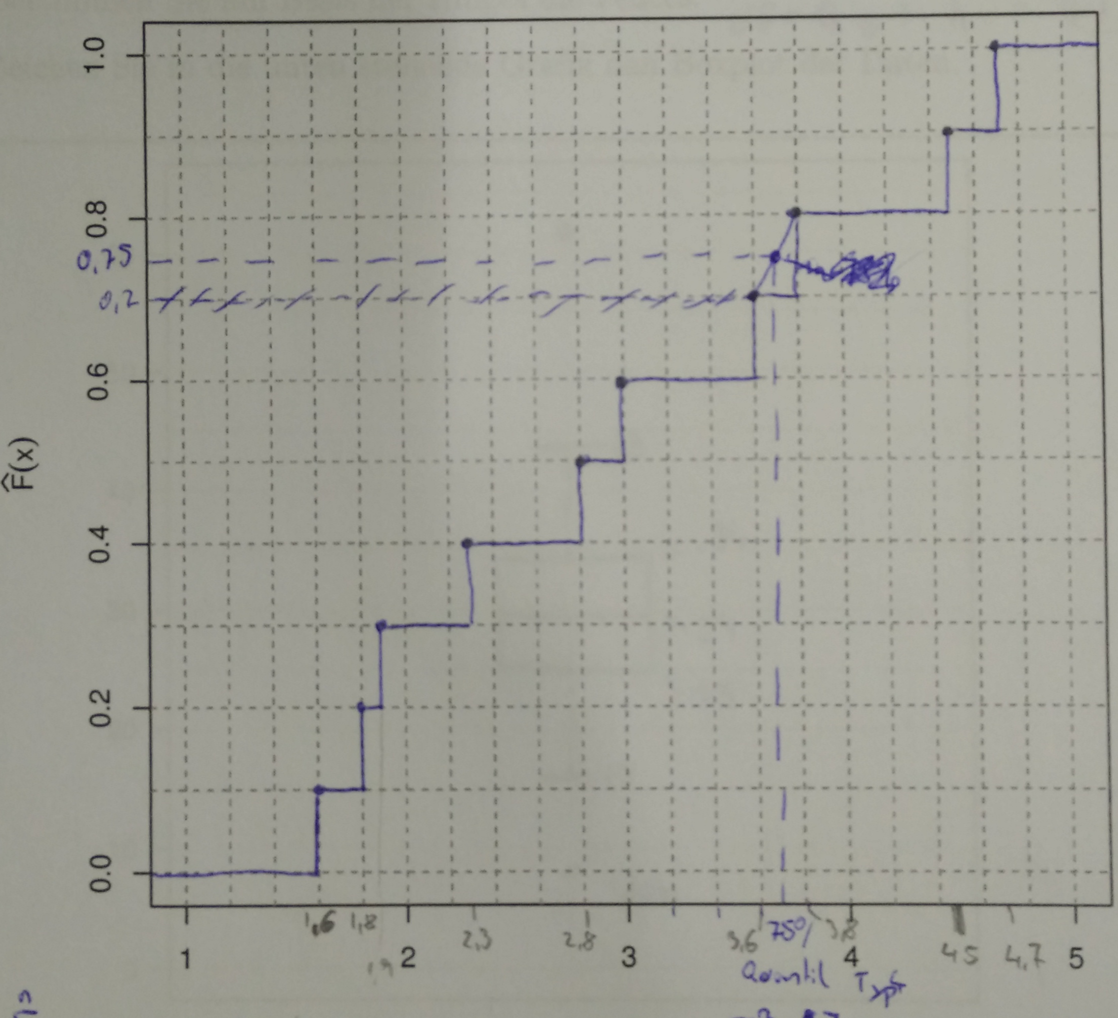
1.6 1.8 1.9 2.3 2.8 3.0 3.6 3.8 4.5 4.7

[2] Zeichnen Sie in die unten stehende Grafik die empirische Verteilungsfunktion.

[1] Bestimmen Sie grafisch das 75%–Quantil vom Typ 4.

[1] Bestimmen Sie den Stichprobenmittelwert.

[1] Bestimmen Sie die Stichprobenvarianz und -streuung.



$\approx 3{,}47$

$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = 3$ ✓

$z = s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2 = 1{,}2533$ ✓

$\text{ennung} = s_n = \sqrt{\text{Var}} = 1{,}1195$ ✓

✓

Betrachten Sie die folgende – bereits geordnete – Stichprobe der Größe $n = 22$:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Daten	7	17	20	21	24	25	26	27	27	28	28

Rang	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Daten	30	31	31	32	33	34	36	39	41	43	63

[1] Bestimmen Sie den Median. $\tilde{x} = \frac{28+30}{2} = 29$

[1] Bestimmen Sie die Hinges. $Q_1 = LH = 25$, $Q_3 = OH = 34$

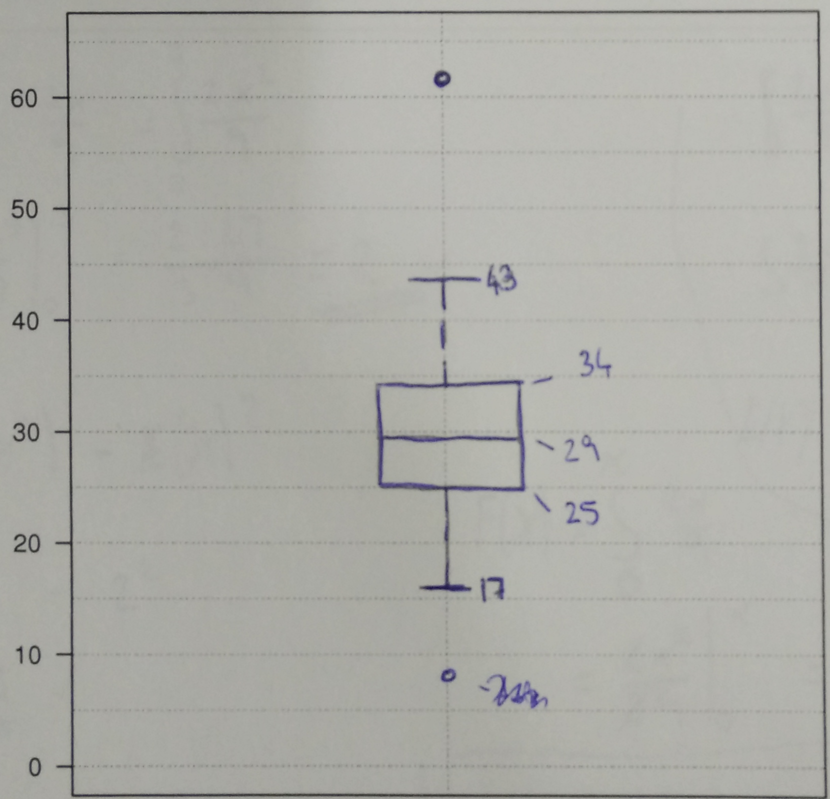
[1] Bestimmen Sie auf Basis der Hinges die Fences.

$h = 13{,}5$

$LF = Q_1 - \underbrace{1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1)}_{h} = 11{,}5$

$UF = Q_3 + h = 47{,}5 \Rightarrow 43$

[2] Zeichen Sie in die unten stehende Grafik den Boxplot der Daten.



Median = 29 ✓

Q_1 = lower Hinge = 25 ✓

Q_3 = upper Hinge = 34 ✓

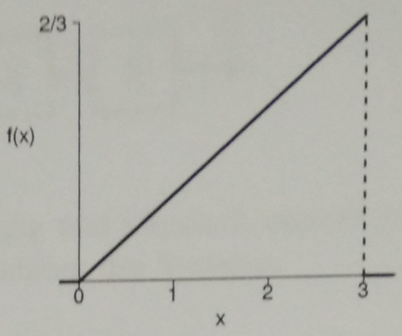
lower Fence = 11,5 ✓

upper Fence = 47,5 ✓

✓

Die Dichte einer sG X lautet wie folgt:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{9} & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



[1] Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

[2] Bestimmen Sie die Varianz von X.

[2] Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X.

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^3 x \cdot \frac{2x}{9} = \int_0^3 \frac{2x^2}{9}$$

$$= \frac{2x^3}{3\cdot 9}\Big|_0^3 = \frac{2\cdot 27}{3\cdot 9} = \underline{\underline{2}} \checkmark$$

$$\int \frac{2x^2}{9} = \frac{2x^3}{3\cdot 9}$$

$$\int \frac{2x^3}{9} = \frac{\cancel{2}x^4}{{}_2\cancel{4}\cdot 9}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{x^4}{2\cdot 9}\Big|_0^3 = \frac{81}{2\cdot 9} = 4{,}5$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

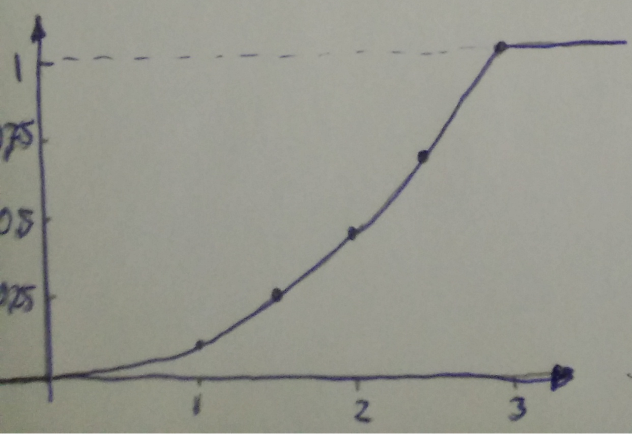
$$= 4{,}5 - 2^2$$

$$= \underline{\underline{0{,}5}} \checkmark$$

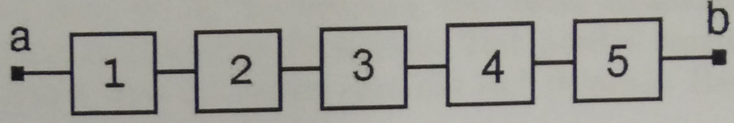
$$F(x) = \int_0^x \frac{2x}{9}$$

$$= \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\cdot 9}\Big|_0^x = \frac{x^2}{9}$$

$$F(x) = \boxed{\begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ \frac{x^2}{9} & 0 < x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}}$$



Die logische Struktur eines Systems sei gegeben wie folgt:



Die Lebensdauern der Komponenten seien unabhängig und identisch verteilt mit Dichte $f(x) = 2e^{-2x} I_{(0,\infty)}$ ($\widehat{=}\, \mathsf{Exp}(\lambda = 2)$). X sei die Lebensdauer des Systems.

[2] Verteilungsfunktion von X ?

[1] Dichte von X ? (Verteilung?)

[2] Erwartungswert, Varianz, Streuung von X ?

Skriptum 210:

$F_{min}(x) = 1 - e^{-n\lambda x}$ $\quad n = 5$, $\lambda = 2$

$= 1 - e^{-10x}$

$f_{min}(x) = 10e^{-10x} = F'_{min}(x)$ ... ist eine Exponentialverteilung mit $\lambda = 10$

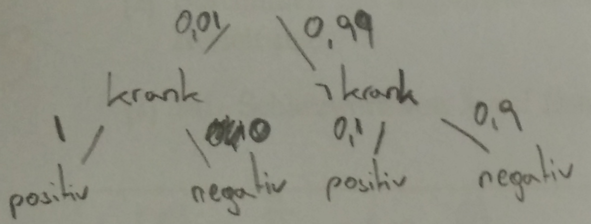
$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

Streuung $= \sqrt{Var(X)} = \frac{1}{\lambda} = \tau = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{10} = 0{,}1$ ✓

2

[2] Angenommen, ein Test reagiert mit Sicherheit positiv, sollte eine bestimmte Krankheit vorliegen, zeigt aber auch zu 10% ein falsch-positives Resultat. Wenn man davon ausgeht, dass 1% der Bevölkerung von dieser Krankheit betroffen ist, und bei einer zufällig ausgewählten Person der Test positiv reagiert, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person erkrankt ist? (Hinweis: Bayes'sche Formel)



$$P(\text{krank}|\text{positiv}) = \frac{P(\text{positiv}|\text{krank}) \cdot P(\text{krank})}{P(\text{positiv}|\text{krank}) \cdot P(\text{krank}) + P(\text{positiv}|\neg\text{krank}) \cdot P(\neg\text{krank})}$$

$$= \frac{1 \cdot 0{,}01}{1 \cdot 0.01 + 0{,}1 \cdot 0{,}99} = \underline{0{,}0917}$$

$P(\text{positiv}|\text{krank}) = 1$ $\quad P(\text{positiv}|\neg\text{krank}) = 0{,}1$

$P(\text{krank}|\text{positiv}) = ?$

$\Rightarrow 9{,}17\%$ ✓

Wahrscheinlichkeit für krank wenn Test positiv

1

[1] Ergänzung zu Aufgabe 3: Wie kann man auf Basis von $U \sim \mathrm{U}(0,1)$ Beobachtungen von X generieren? Welcher x-Wert ergibt sich speziell für $u = 0.75$?

mithilfe der Invesionsmethode:

$F(x) = \frac{x^2}{9}$

$F^{-1}(u) = \sqrt{9x}$

$X := F^{-1}(U) \sim F$

$$\boxed{F^{-1}(0{,}75) = 2{,}598}$$ ✓

$y = \frac{x^2}{9} \qquad 9y = x^2$

$x = \sqrt{9y}$

2

[2] Eine (faire) Münze wird 100 Mal geworfen. Mit welcher (approximativen) Wahrscheinlichkeit bekommt man <u>mehr</u> als 60 Mal „Kopf"? (Hinweis: ZGVS; rechnen Sie mit Stetigkeitskorrektur.)

$P(X > 60) = 1 - P(X \leq 60)$ $\qquad X \sim B(100, \frac{1}{2})$

Stetigkeitskorrektur

$n = 100$

$p = 0{,}5$

$P(X \leq 60) \approx \Phi\left(\frac{x + \frac{1}{2} - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p(1-p)}}\right)$

$\approx \Phi\left(\frac{60{,}5 - 50}{\sqrt{50 \cdot (0{,}5)}}\right)$

$\approx \Phi(2{,}1) = 0{,}9821$

$P(X > 60) = 1 - 0{,}9821$

$= \underline{0{,}0179}$

$\boxed{1{,}79\%}$ für mehr als 60 K

✓

Eine Stichprobe der Größe $n = 25$ von $X \sim \mathsf{P}(\lambda)$ war wie folgt:

x	0	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	3	3	8	5	3	2	1

3

[2] Bestimmen Sie allgemein für n Beobachtungen den ML–Schätzer von λ. (Genaue Herleitung!)

[1] ML–Schätzwert von λ auf Basis der gegebenen Stichprobe?

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$$

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} \cdot e^{-\lambda}}{x_i!}$$

$$\ln(L(\lambda)) = \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} \cdot e^{-\lambda}}{x_i!}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{\lambda^{x_i} \cdot e^{-\lambda}}{x_i!}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \cdot \ln(\lambda) - \lambda \cdot \underbrace{\ln(e)}_{1} - \ln(x_i!) \right)$$

Ableiten: $$\frac{d \ln L(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\lambda} - 1 \right)$$

Nullsetzen: $$0 = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} (x_i) - n$$

$$n = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

ML-Schätzwert auf Basis von Stichpr

$n = 25$

$$\hat{\lambda} = \overline{X}_n = \boxed{= 2{,}48}$$

✓

2

[2] Bei einer Befragung von 100 zufällig ausgewählten Personen zu einem bestimmten Projekt waren 56 dafür und 44 dagegen. Bestimmen Sie ein (approximatives) 95%–Konfidenzintervall für den Anteil p der Befürworter des Projekts.

$$\hat{p} = \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{56}{100} = 0{,}56$$

$\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$

$n = 100$

$$\hat{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$\hat{p} \pm z_{0{,}975} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$0{,}56 \pm 1{,}960 \cdot \sqrt{\frac{0{,}56 \cdot 0{,}44}{100}}$$

~~0,6577~~

$$\boxed{\text{KI: } (0{,}463 \,;\, 0{,}657)}$$

✓

Für eine Stichprobe x der Größe $m = 8$ von $X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ ergab sich:

```
> data.frame(m=length(x), mean=mean(x), var=var(x), sd=sd(x))
  m  mean   var    sd
  8 11.79 7.687 2.773
```

2

[2] Bestimmen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für μ_X.

$\bar{X}_n \pm t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}}$

$11{,}79 \pm t_{7;0{,}975} \cdot \frac{2{,}773}{\sqrt{8}}$

$\boxed{\text{KI für } \mu_X: [9{,}471 ; 14{,}109]}$ ✓

$S_n = 2{,}773$

$n = 8$

$\bar{X}_n = 11{,}79$

$\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$

$t_{7;0{,}975} = 2{,}365$

Für eine von der obigen Stichprobe unabhängige zweite Stichprobe y der Größe $n = 10$ von $Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ ergab sich:

```
> data.frame(n=length(y), mean=mean(y), var=var(y), sd=sd(y))
   n  mean   var    sd
  10 15.14 10.19 3.193
```

Wenn man davon ausgehen kann, dass $\sigma_Y^2 = \sigma_X^2$:

1

[1] Wie lautet der gepoolte Varianzschätzer s_p^2?

1

[2] Testen Sie zum Niveau 5%: $\mathcal{H}_0 : \mu_Y = \mu_X$ gegen $\mathcal{H}_1 : \mu_Y > \mu_X$

$S_p^2 = \frac{(m-1) S_X^2 + (n-1) S_Y^2}{m+n-2}$

$S_p^2 = \frac{7 \cdot 7{,}687 + 9 \cdot 10{,}19}{16}$

$S_p^2 = 9{,}095$ ✓

$\mu_X - \mu_Y - \Delta_0 = 0$

$T_0 = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \Delta_0}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$

$S_p = \sqrt{S_p^2} = 3{,}016$

$T_0 = \frac{11{,}79 - 15{,}14 - 0}{3{,}016 \cdot \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{10}}} = -2{,}342$ ✓

$T_0 \overset{?}{>} t_{m+n-2;1-\alpha}$

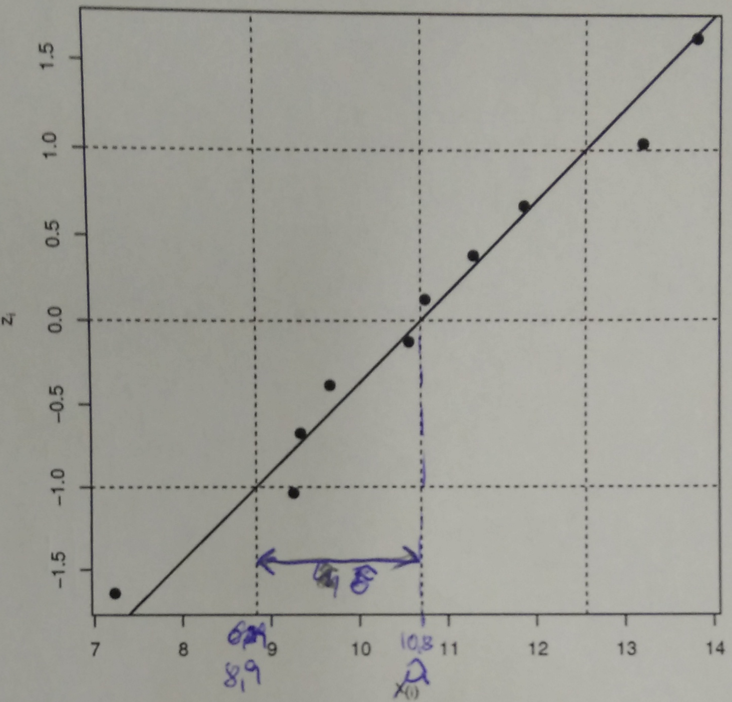
$T_0 \overset{?}{>} t_{16;0{,}95}$

$-2{,}342 \overset{?}{>} 1{,}746$

$\Rightarrow H_0$ wird nicht verworfen

2

[2] Eine Stichprobe der Größe $n = 10$ ergibt im Normal-QQ-Plot das folgende Bild:



10,8 − 8,9 = 1,9

Stammt die Stichprobe aus einer Normalverteilung? ☒ ja ☐ nein

Falls "ja", wie groß sind (etwa) Mittelwert $\hat{\mu} \approx$ 10,8 und Streuung $\hat{\sigma} \approx$ 1,9 ?

3

[3] Stammen die folgenden 120 Beobachtungen aus einer diskreten uniformen Verteilung auf den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 ? (Testen Sie mit $\alpha = 10\%$.)

$\Rightarrow p_0 = \frac{1}{6}$

x	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	17	27	16	25	16	19

Klasse	x_i	p_{i0}	$n \cdot p_i$	$(x_i - np_{i0})^2 / np_{i0}$
1	17	$\frac{1}{6}$	20	0,45
2	27	$\frac{1}{6}$	20	2,45
3	16	$\frac{1}{6}$	20	0,8
4	25	$\frac{1}{6}$	20	1,25
5	16	$\frac{1}{6}$	20	0,8
6	19	$\frac{1}{6}$	20	0,05
	120	1		$5{,}8 = Q_{k-1} = Q_5$

$\chi^2_{5;0,9} = 9{,}236$

$5{,}8 \overset{?}{>} 9{,}236$

H_0 wird nicht verwo

$n = 120$

$Q_5 \overset{?}{>} \chi^2_{5;1-\alpha}$

$Q_5 \overset{?}{>} \chi^2_{5;0,9}$ ✓

Daten stammen mit $\alpha = 10\%$ aus eine diskreten uniformen Verteilung