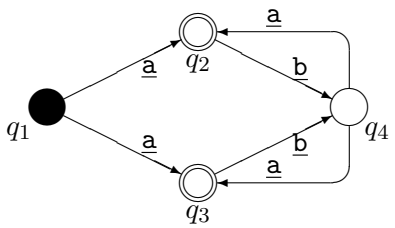
| Theoretische Informatik und Logik — VU 4.0<br>VO-Prüfung WS 2010/2011 24. März 2011 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Kennzahl | Matrikelnummer | Familienname<br>**Lösung** | Vorname | Gruppe<br>**A** |

**1.)** Sei $\mathcal{A} = \langle \{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, \delta, q_1, \{q_2, q_3\} \rangle$, wobei

| $\delta$ | $\underline{\mathtt{a}}$ | $\underline{\mathtt{b}}$ |
|---|---|---|
| $q_1$ | $\{q_2, q_3\}$ | $\{\}$ |
| $q_2$ | $\{\}$ | $\{q_4\}$ |
| $q_3$ | $\{\}$ | $\{q_4\}$ |
| $q_4$ | $\{q_2, q_3\}$ | $\{\}$ |

**a)** Geben Sie $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ (also die von $\mathcal{A}$ akzeptierte Sprache) als reguläre Menge an. **(2 Punkte)**

**Lösung:** Wir stellen $\mathcal{A}$ zunächst graphisch dar



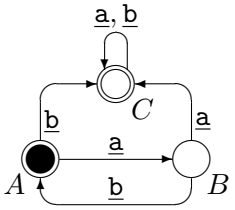

und erkennen, dass $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\}^*\{\underline{\mathtt{a}}\}$.

**b)** Gibt es eine kontextfreie Grammatik, welche $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ erzeutgt? Falls ja, geben Sie eine solche an. Falls nein, begründen Sie, warum es eine solche nicht geben kann. **(4 Punkte)**

**Lösung:** z.B. $G = \langle \{S\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, \{S \to \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}S \mid \underline{\mathtt{a}}\}, S \rangle$

**c)** Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten an, welcher das Komplement von $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ akzeptiert. (Graphische Darstellung genügt.) **(4 Punkte)**

**Lösung:** z.B.




**2.)** Sei $L_1 = \{\underline{\mathtt{a}}^{3n}\underline{\mathtt{b}}^{2n}\underline{\mathtt{c}}^{m} \mid n, m \geq 0\}$ und $L_2 = \{\underline{\mathtt{a}}^{n}\underline{\mathtt{b}}^{m}\underline{\mathtt{c}}^{3m} \mid n, m \geq 0\}$.

**a)** Geben Sie kontextfreie Grammatiken $G_1, G_2, G_3$ so an, dass $\mathcal{L}(G_1) = L_1$, $\mathcal{L}(G_2) = L_2$, sowie $\mathcal{L}(G_3) = L_1 \cup L_2$. **(6 Punkte)**

**Lösung:** Wir geben zunächst eine kontextfreie Grammatik $G_1$ an, welche $L_1$ erzeugt, sowie eine kontextfreie Grammatik $G_2$ mit $\mathcal{L}(G_2) = L_2$:

$$G_1 = \langle \{S_1, A\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}, P_1, S_1 \rangle$$

wobei $P_1 = \{S_1 \to S_1\underline{\mathtt{c}} \mid A, \quad A \to \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}A\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}} \mid \varepsilon\}$, sowie

$$G_2 = \langle \{S_2, B\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}, P_2, S_2 \rangle$$

wobei $P_2 = \{S_2 \to \underline{\mathtt{a}}S_2 \mid B, \quad B \to \underline{\mathtt{b}}B\underline{\mathtt{c}}\,\underline{\mathtt{c}}\,\underline{\mathtt{c}} \mid \varepsilon\}$.

Daraus erhalten wir folgende Grammatik $G_3$ mit $\mathcal{L}(G_3) = L_1 \cup L_2$:

$$G_3 = \langle \{S, S_1, S_2, A, B\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}, \{S \to S_1 \mid S_2\} \cup P_1 \cup P_2, S \rangle$$

**b)** Geben Sie $L_1 \cap L_2$ an. **(2 Punkte)**

**Lösung:** $L_1 \cap L_2 = \{\underline{\mathtt{a}}^{3n}\underline{\mathtt{b}}^{2n}\underline{\mathtt{c}}^{6n} \mid n \geq 0\}$

**c)** Ist $L_1 \cap L_2$ eine kontextfreie Sprache? Begründen Sie ihre Antwort. **(2 Punkte)**

**Lösung:** $\{\underline{\mathtt{a}}^{3n}\underline{\mathtt{b}}^{2n}\underline{\mathtt{c}}^{6n} \mid n \geq 0\}$ ist natürlich keine kontextfreie Sprache (siehe z.B. Skriptum, S. 58: dort wird mit Hilfe des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen bewiesen, dass Sprachen der Form $\{\underline{\mathtt{a}}^{kn}\underline{\mathtt{b}}^{ln}\underline{\mathtt{c}}^{mn} \mid n \geq 0\}$ nicht kontextfrei sind). Das ist nicht so sehr verwunderlich, da kontextfreie Sprachen nicht unter Durchschnitt abgeschlossen sind.

**3.)** Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für richtige Antworten mit richtiger Begründung, einen Punkt für richtige Antworten mit leicht mangelhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte Begründungen.)

a) Jede rekursiv aufzählbare Sprache über einem einelementigen Alphabet ist regulär.

**Begründung:** ☐ richtig ☒ falsch

**Lösung:** z.B. $\{a^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$ ist nicht regulär (und sogar nicht einmal kontextfrei).

b) Für beliebige Sprachen $L_1$ gilt: $(L_1L_1)^* = L_1^*L_1^*$

**Begründung:** ☐ richtig ☒ falsch

**Lösung:** Gegenbeispiel: $L_1 = \{\underline{\mathtt{a}}\}$. Dann ist $(L_1L_1)^* = \{\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\}^*$, aber $L_1^*L_1^* = \{\underline{\mathtt{a}}\}^*\{\underline{\mathtt{a}}\}^* = \{\underline{\mathtt{a}}\}^*$.

c) Das Halteproblem für Turingmaschinen ist unentscheidbar.

**Begründung:** ☒ richtig ☐ falsch

**Lösung:** Im Skriptum auf S. 74 wird ausgeführt, warum dies der Fall ist.

d) Es gibt einen Homomorphismus, der die Sprache $\{\underline{0}^{2n} \mid n \geq 0\}$ auf die Sprache $\{\underline{1}^n \mid n \geq 0\}$ abbildet.

**Begründung:** ☐ richtig ☒ falsch

**Lösung:** Das ist falsch, da ein Homomorphismus nicht mehrere Symbole auf eines abbilden kann.

e) Ist $L_1 \cup L_2 = \{\}$, so ist $L_1 - L_2$ nicht kontextsensitiv.

**Begründung:** ☐ richtig ☒ falsch

**Lösung:** Aus obiger Aussage geht hervor, dass $L_1 = L_2 = \{\}$. Dies ist eine reguläre Sprache, und somit, aufgrund der Chomsky Hierarchie auch kontextsensitiv.

**(10 Punkte)**

**4.)** Gegeben seien die aussagenlogischen Formeln $F_1 = A \supset (\neg C \wedge B)$, $F_2 = A$ und $F_3 = B \vee C$. Beweise Sie mithilfe des Tableau-Kalküls, dass $F_3$ eine logische Konsequenz von $F_1$ und $F_2$ ist, d.h. dass gilt: $F_1, F_2 \models F_3$.

**Lösung:** $F_3$ ist genau dann eine logische Konsequenz von $F_1$ und $F_2$ wenn $(F_1 \wedge F_2) \supset F_3$ gültig ist (wegen des Deduktionstheorems bzw. Folgerung 3.32 im Skriptum), d.h. falls das Tableau beginnend mit den Annahmen $\mathbf{t} : F_1$, $\mathbf{t} : F_2$ und $\mathbf{f} : F_3$ geschlossen werden kann (m.a.W., wenn gezeigt werden kann, dass diese Annahmen zwingend zu einem Widerspruch führen):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | $\mathbf{t} : A \supset (\neg C \wedge B)$ | | | Annahme |
| (2) | $\mathbf{t} : A$ | | | Annahme |
| (3) | $\mathbf{f} : B \vee C$ | | | Annahme |
| (4) | $\mathbf{f} : B$ | | | Zerlegung von 3 |
| (5) | $\mathbf{f} : C$ | | | Zerlegung von 3 |
| (6) | $\mathbf{f} : A$ | Zerl. v. 1 | (7) $\mathbf{t} : \neg C \wedge B$ | Zerlegung von 1 |
| | $\times$ (Wid.: 6/2) | | (8) $\mathbf{t} : \neg C$ | Zerlegung von 7 |
| | | | (9) $\mathbf{t} : B$ | Zerlegung von 7 |
| | | | $\times$ (Wid.: 9/4) | |

Damit haben wir ein geschlossenes Tableau erhalten. Das heißt, die logische Konsequenz-Eigenschaft $F_1, F_2 \models F_3$ gilt (wegen der Korrektheit der Tableau-Methode).

**(10 Punkte)**

**5.)** Beweisen Sie die prädikatenlogische Formel

$$[\, Q(a, f(f(b))) \wedge (\forall x)(\forall y)\,(\, Q(x, f(y)) \supset Q(g(x), y)\,)\,] \supset (\exists y) Q(g(g(a)), y)$$

mittels Resolution.

**Lösung:** Sei $F_1 = Q(a, f(f(b)))$, $F_2 = (\forall x)(\forall y)\,(\, Q(x, f(y)) \supset Q(g(x), y)\,)$, $F_3 = (\exists y) Q(g(g(a)), y)$ und $F = (F_1 \wedge F_2) \supset F_3$. Gemäß dem Resolutionsverfahren bringen wir zunächst $\neg F$ in Klauselform:

$$\neg F = \neg\,[\,(\,F_1 \wedge F_2\,) \supset F_3\,] \sim F_1 \wedge F_2 \wedge \neg F_3 \sim F_1 \wedge F_2 \wedge (\forall y) \neg Q(g(g(a)), y)\,.$$

Damit erhalten wir die Klauselform von $\neg F$:

$$cl(\neg F) = \{\, \{Q(a, f(f(b)))\},\ \{\neg Q(x, f(y)), Q(g(x), y)\},\ \{\neg Q(g(g(a)), y)\}\,\}.$$

Resolution liefert

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{Q(a, f(f(b)))\} \quad \{\neg Q(x, f(y)), Q(g(x), y)\}}{\{Q(g(a), f(b))\}}\,\sigma_1 \quad \{\neg Q(x, f(y)), Q(g(x), y)\}}{\{Q(g(g(a)), b)\}}\,\sigma_2 \quad \{\neg Q(g(g(a)), y)\}}{\{\}}\,\sigma_3$$

mit den jeweiligen mgu's für die Resolutionsschritte $\sigma_1 = \{x \leftarrow a, y \leftarrow f(b)\}$, $\sigma_2 = \{x \leftarrow g(a), y \leftarrow b\}$ und $\sigma_3 = \{y \leftarrow b\}$. Da wir mit der leeren Klausel die Unerfüllbarkeit von $\neg F$ gezeigt haben, ist die ursprüngliche Formel $F$ gültig.

**(10 Punkte)**

**6.)** Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für richtige Antworten mit richtiger Begründung, einen Punkt für richtige Antworten mit leicht mangelhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte Begründungen.)

a) Eine erfüllbare aussagenlogische Formel kann durch Instanziierung (d.h. Anwendung einer Substitution) unerfüllbar werden.

**Begründung:** ☒ richtig ☐ falsch

**Lösung:** Beispiel: $A$ wird durch die Substitution, die $A$ durch $B \wedge \neg B$ ersetzt, unerfüllbar.

b) Die Menge der unerfüllbaren prädikatenlogischen Formeln ist rekursiv aufzählbar.

**Begründung:** ☒ richtig ☐ falsch

**Lösung:** Da eine Formel $F$ genau dann unerfüllbar ist, wenn $\neg F$ gültig ist, und die Menge der gültigen Formeln rekursiv aufzählbar ist, gilt letzteres auch für die unerfüllbaren Formeln.

c) Wenn bzgl. einer gegebenen prädikatenlogischen Formel $F$ (ohne frei vorkommende Variablen) ein geschlossenes Tableau für $\mathbf{f}: F$ existiert, so ist $F$ widerlegbar.

**Begründung:** ☐ richtig ☒ falsch

**Lösung:** In diesem Fall ist $F$ gültig, folglich kann $F$ nicht widerlegbar sein.

d) Die prädikatenlogischen Formeln $(\forall x)P(x) \vee (\forall y)Q(y)$ und $(\forall z)(P(z) \vee Q(z))$ sind logisch äquivalent.

**Begründung:** ☐ richtig ☒ falsch

**Lösung:** Die erste Aussage impliziert die zweite, aber nicht umgekehrt. Ein Gegenbeispiel ist die Modellstruktur der natürlichen Zahlen, wenn man $P$ als "ist gerade" und $Q$ als "ist ungerade" interpretiert.

e) Jede aussagenlogische Formel, die nur Variablensymbole und als logische Operatoren höchstens $\neg$ und $\wedge$ enthält sowie eine gerade Anzahl von $\neg$ hat, ist erfüllbar.

**Begründung:** ☐ richtig ☒ falsch

**Lösung:** Gegenbeispiel: $(\neg A \wedge \neg A) \wedge A$.

**(10 Punkte)**

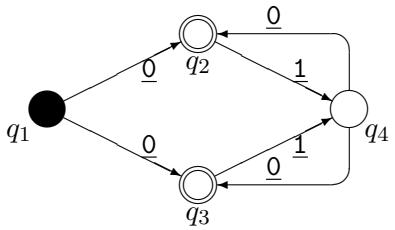
| Theoretische Informatik und Logik — VU 4.0<br>VO-Prüfung WS 2010/2011 24. März 2011 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Kennzahl | Matrikelnummer | Familienname<br>**Lösung** | Vorname | Gruppe<br>**B** |

**1.)** Sei $\mathcal{A} = \langle \{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \delta, q_1, \{q_2, q_3\} \rangle$, wobei

| $\delta$ | $\underline{0}$ | $\underline{1}$ |
|---|---|---|
| $q_1$ | $\{q_2, q_3\}$ | $\{\}$ |
| $q_2$ | $\{\}$ | $\{q_4\}$ |
| $q_3$ | $\{\}$ | $\{q_4\}$ |
| $q_4$ | $\{q_2, q_3\}$ | $\{\}$ |

**a)** Geben Sie $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ (also die von $\mathcal{A}$ akzeptierte Sprache) als reguläre Menge an. **(2 Punkte)**

**Lösung:** Wir stellen $\mathcal{A}$ zunächst graphisch dar



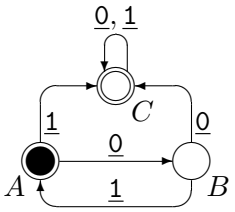

und erkennen, dass $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\underline{0}\,\underline{1}\}^*\{\underline{0}\}$.

**b)** Gibt es eine kontextfreie Grammatik, welche $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ erzeutgt? Falls ja, geben Sie eine solche an. Falls nein, begründen Sie, warum es eine solche nicht geben kann. **(4 Punkte)**

**Lösung:** z.B. $G = \langle \{S\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \{S \to \underline{0}\,\underline{1}S \mid \underline{0}\}, S \rangle$

**c)** Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten an, welcher das Komplement von $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ akzeptiert. (Graphische Darstellung genügt.) **(4 Punkte)**

**Lösung:** z.B.




**2.)** Sei $L_1 = \{\underline{0}^{2n}\underline{1}^{3n}\underline{2}^{m} \mid n, m \geq 0\}$ und $L_2 = \{\underline{0}^{n}\underline{1}^{m}\underline{2}^{2m} \mid n, m \geq 0\}$.

**a)** Geben Sie kontextfreie Grammatiken $G_1, G_2, G_3$ so an, dass $\mathcal{L}(G_1) = L_1$, $\mathcal{L}(G_2) = L_2$, sowie $\mathcal{L}(G_3) = L_1 \cup L_2$. **(6 Punkte)**

**Lösung:** Wir geben zunächst eine kontextfreie Grammatik $G_1$ an, welche $L_1$ erzeugt, sowie eine kontextfreie Grammatik $G_2$ mit $\mathcal{L}(G_2) = L_2$:

$$G_1 = \langle \{S_1, A\}, \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}\}, P_1, S_1 \rangle$$

wobei $P_1 = \{S_1 \to S_1\underline{2} \mid A, \quad A \to \underline{0}\underline{0}A\underline{1}\underline{1}\underline{1} \mid \varepsilon\}$, sowie

$$G_2 = \langle \{S_2, B\}, \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}\}, P_2, S_2 \rangle$$

wobei $P_2 = \{S_2 \to \underline{0}S_2 \mid B, \quad B \to \underline{1}B\underline{2}\underline{2} \mid \varepsilon\}$.

Daraus erhalten wir folgende Grammatik $G_3$ mit $\mathcal{L}(G_3) = L_1 \cup L_2$:

$$G_3 = \langle \{S, S_1, S_2, A, B\}, \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}\}, \{S \to S_1 \mid S_2\} \cup P_1 \cup P_2, S \rangle$$

**b)** Geben Sie $L_1 \cap L_2$ an. **(2 Punkte)**

**Lösung:** $L_1 \cap L_2 = \{\underline{0}^{2n}\underline{1}^{3n}\underline{2}^{6n} \mid n \geq 0\}$

**c)** Ist $L_1 \cap L_2$ eine kontextfreie Sprache? Begründen Sie ihre Antwort. **(2 Punkte)**

**Lösung:** $\{\underline{0}^{2n}\underline{1}^{3n}\underline{2}^{6n} \mid n \geq 0\}$ ist natürlich keine kontextfreie Sprache (siehe z.B. Skriptum, S. 58: dort wird mit Hilfe des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen bewiesen, dass Sprachen der Form $\{\underline{\mathtt{a}}^{kn}\underline{\mathtt{b}}^{ln}\underline{\mathtt{c}}^{mn} \mid n \geq 0\}$ nicht kontextfrei sind). Das ist nicht so sehr verwunderlich, da kontextfreie Sprachen nicht unter Durchschnitt abgeschlossen sind.

**3.)** Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für richtige Antworten mit richtiger Begründung, einen Punkt für richtige Antworten mit leicht mangelhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte Begründungen.)

a) Die Menge der Palindrome über einem einelementigen Alphabet ist regulär.
**Begründung:** ☒ richtig ☐ falsch

**Lösung:** Das ist natürlich richtig. Denn diese Menge entspricht $\{a\}^*$, welche sicher reguär ist.

b) Für beliebige Sprachen $L_1, L_2$ gilt: $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$
**Begründung:** ☐ richtig ☒ falsch

**Lösung:** Gegenbeispiel: $L_1 = \{\underline{\mathtt{a}}\}$, $L_1 = \{\underline{\mathtt{b}}\}$. Dann ist ja $(L_1 \cup L_2)^* = \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^* = \{\varepsilon, \underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}, \ldots\}$, was aber sicher nicht gleich $\{\underline{\mathtt{a}}\}^* \cup \{\underline{\mathtt{b}}\}^* = \{\varepsilon, \underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}, \ldots\}$ ist.

c) Das Halteproblem für Turingmaschinen ist entscheidbar.
**Begründung:** ☐ richtig ☒ falsch

**Lösung:** Im Skriptum auf S. 74 wird ausgeführt, warum dies nicht der Fall ist.

d) Es gibt einen Homomorphismus, der die Sprache $\{\underline{\mathtt{a}}^{2n}\underline{\mathtt{b}}^{4k}\underline{\mathtt{a}}^{2n} \mid n \geq 1\}$ auf die Sprache $\{\underline{\mathtt{a}}^{2n}\underline{\mathtt{b}}^{4n} \mid n \geq 1\}$ abbildet.
**Begründung:** ☐ richtig ☒ falsch

**Lösung:** Das ist falsch, da $\underline{\mathtt{a}}$ abhängig von der Position unterschiedlich behandelt werden müsste.

e) Ist $L_1 \cup L_2 = \{\}$, so ist $L_1 - L_2$ nicht rekursiv aufzählbar.
**Begründung:** ☐ richtig ☒ falsch

**Lösung:** Aus obiger Aussage geht hervor, dass $L_1 = L_2 = \{\}$. Dies ist eine reguläre Sprache, und somit, aufgrund der Chomsky Hierarchie auch rekursiv aufzählbar.

**(10 Punkte)**

**4.)** Gegeben seien die aussagenlogischen Formeln $F_1 = A \supset (\neg C \wedge B)$, $F_2 = A$ und $F_3 = B \vee C$. Beweise Sie mithilfe des Tableau-Kalküls, dass $F_3$ eine logische Konsequenz von $F_1$ und $F_2$ ist, d.h. dass gilt: $F_1, F_2 \models F_3$.

**Lösung:** $F_3$ ist genau dann eine logische Konsequenz von $F_1$ und $F_2$ wenn $(F_1 \wedge F_2) \supset F_3$ gültig ist (wegen des Deduktionstheorems bzw. Folgerung 3.32 im Skriptum), d.h. falls das Tableau beginnend mit den Annahmen $\mathbf{t} : F_1$, $\mathbf{t} : F_2$ und $\mathbf{f} : F_3$ geschlossen werden kann (m.a.W., wenn gezeigt werden kann, dass diese Annahmen zwingend zu einem Widerspruch führen):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | $\mathbf{t} : A \supset (\neg C \wedge B)$ | | | Annahme |
| (2) | $\mathbf{t} : A$ | | | Annahme |
| (3) | $\mathbf{f} : B \vee C$ | | | Annahme |
| (4) | $\mathbf{f} : B$ | | | Zerlegung von 3 |
| (5) | $\mathbf{f} : C$ | | | Zerlegung von 3 |
| (6) | $\mathbf{f} : A$ | Zerl. v. 1 | (7) $\mathbf{t} : \neg C \wedge B$ | Zerlegung von 1 |
| | $\times$ (Wid.: 6/2) | | (8) $\mathbf{t} : \neg C$ | Zerlegung von 7 |
| | | | (9) $\mathbf{t} : B$ | Zerlegung von 7 |
| | | | $\times$ (Wid.: 9/4) | |

Damit haben wir ein geschlossenes Tableau erhalten. Das heißt, die logische Konsequenz-Eigenschaft $F_1, F_2 \models F_3$ gilt (wegen der Korrektheit der Tableau-Methode).

**(10 Punkte)**

**5.)** Beweisen Sie die prädikatenlogische Formel

$$[\, Q(a, f(f(b))) \wedge (\forall x)(\forall y)\,(\, Q(x, f(y)) \supset Q(g(x), y)\,)\,] \supset (\exists y) Q(g(g(a)), y)$$

mittels Resolution.

**Lösung:** Sei $F_1 = Q(a, f(f(b)))$, $F_2 = (\forall x)(\forall y)\,(\, Q(x, f(y)) \supset Q(g(x), y)\,)$, $F_3 = (\exists y) Q(g(g(a)), y)$ und $F = (F_1 \wedge F_2) \supset F_3$. Gemäß dem Resolutionsverfahren bringen wir zunächst $\neg F$ in Klauselform:

$$\neg F = \neg\,[\,(\,F_1 \wedge F_2\,) \supset F_3\,] \sim F_1 \wedge F_2 \wedge \neg F_3 \sim F_1 \wedge F_2 \wedge (\forall y) \neg Q(g(g(a)), y)\,.$$

Damit erhalten wir die Klauselform von $\neg F$:

$$cl(\neg F) = \{\, \{Q(a, f(f(b)))\},\ \{\neg Q(x, f(y)), Q(g(x), y)\},\ \{\neg Q(g(g(a)), y)\}\,\}.$$

Resolution liefert

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{Q(a, f(f(b)))\} \quad \{\neg Q(x, f(y)), Q(g(x), y)\}}{\{Q(g(a), f(b))\}}\,\sigma_1 \quad \{\neg Q(x, f(y)), Q(g(x), y)\}}{\{Q(g(g(a)), b)\}}\,\sigma_2 \quad \{\neg Q(g(g(a)), y)\}}{\{\}}\,\sigma_3$$

mit den jeweiligen mgu's für die Resolutionsschritte $\sigma_1 = \{x \leftarrow a, y \leftarrow f(b)\}$, $\sigma_2 = \{x \leftarrow g(a), y \leftarrow b\}$ und $\sigma_3 = \{y \leftarrow b\}$. Da wir mit der leeren Klausel die Unerfüllbarkeit von $\neg F$ gezeigt haben, ist die ursprüngliche Formel $F$ gültig.

**(10 Punkte)**

**6.)** Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für richtige Antworten mit richtiger Begründung, einen Punkt für richtige Antworten mit leicht mangelhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte Begründungen.)

a) Eine erfüllbare aussagenlogische Formel kann durch Instanziierung (d.h. Anwendung einer Substitution) unerfüllbar werden.

**Begründung:** ☒ richtig ☐ falsch

**Lösung:** Beispiel: $A$ wird durch die Substitution, die $A$ durch $B \wedge \neg B$ ersetzt, unerfüllbar.

b) Die Menge der unerfüllbaren prädikatenlogischen Formeln ist rekursiv aufzählbar.

**Begründung:** ☒ richtig ☐ falsch

**Lösung:** Da eine Formel $F$ genau dann unerfüllbar ist, wenn $\neg F$ gültig ist, und die Menge der gültigen Formeln rekursiv aufzählbar ist, gilt letzteres auch für die unerfüllbaren Formeln.

c) Wenn bzgl. einer gegebenen prädikatenlogischen Formel $F$ (ohne frei vorkommende Variablen) ein geschlossenes Tableau für $\mathbf{f}: F$ existiert, so ist $F$ widerlegbar.

**Begründung:** ☐ richtig ☒ falsch

**Lösung:** In diesem Fall ist $F$ gültig, folglich kann $F$ nicht widerlegbar sein.

d) Die prädikatenlogischen Formeln $(\forall x)P(x) \vee (\forall y)Q(y)$ und $(\forall z)(P(z) \vee Q(z))$ sind logisch äquivalent.

**Begründung:** ☐ richtig ☒ falsch

**Lösung:** Die erste Aussage impliziert die zweite, aber nicht umgekehrt. Ein Gegenbeispiel ist die Modellstruktur der natürlichen Zahlen, wenn man $P$ als "ist gerade" und $Q$ als "ist ungerade" interpretiert.

e) Jede aussagenlogische Formel, die nur Variablensymbole und als logische Operatoren höchstens $\neg$ und $\wedge$ enthält sowie eine gerade Anzahl von $\neg$ hat, ist erfüllbar.

**Begründung:** ☐ richtig ☒ falsch

**Lösung:** Gegenbeispiel: $(\neg A \wedge \neg A) \wedge A$.

**(10 Punkte)**