Runde 1, Beispiel 1

LVA 118.181, Übungsrunde 1, 20.10.
Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 18.10.2006

1 Angabe

Man beweise mit Hilfe des Mittelwertsatzes: Ist $f : G \to \mathbb{R}$ stetig partiell nach y differenzierbar, dann genügt f in jedem Rechteck $R = \{f(x,y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$, das ganz in G liegt, einer L-Bedingung (bezüglich y) mit L-Konstanten $L = max\{|f_y(x,y)| : (x,y) \in R\}$.
Mittelwertsatz: Ist f auf $[a,b]$ differenzierbar, dann gibt es ein $x \in (a,b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2 Lösung des Beispiels

Gegeben ist die Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$. f genügt dann lokal einer Lipschitzbedingung bezüglich y, falls für alle $(x_0, y_0) \in D$ eine Umgebung $\mathcal{U}$ von (x_0, y_0) und eine Konstante L existieren, so dass für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in \mathcal{U} \cap D$ gilt:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Es gilt der Satz: Wenn D eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ sind und besitzen eine stetige, partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$, dann genügt f einer lokalen Lipschitz-Bedingung.
Zum Beweis setzen wir voraus, dass $\mathcal{U}$ abgeschlossen (eben das in der Angabe erwähnte Rechteck) und ganz in D enthalten ist. $\mathcal{U}$ ist eine kompakte Menge (abgeschlossen und beschränkt). Daher nimmt $\frac{\partial f}{\partial y}$ nach dem Satz von Minimum und Maximum auf $\mathcal{U}$ ein Minimum und ein Maximum an. Daher gibt es ein L, so dass gilt:

$$\max_{(x,y)\in U} |\frac{\partial f}{\partial y}| \leq L$$

Nach dem Mittelwertsatz folgt, dass es für alle y_1, y_2 ein $\eta \in (y_1, y_2)$ gibt, so dass gilt:

$$f(x,y_1) - f(x,y_y) = (y_1 - y_2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta)$$

Daraus können wir schlussfolgern, was zu beweisen war:

$$\mathbf{|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq |y_1 - y_2| \max_{(x,y)\in U} |\frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta)| = L|y_1 - y_2|}$$