Runde 4, Beispiel 26

LVA 118.181, Übungsrunde 4, 19.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 01.11.2006

1 Angabe

Man betrachte die inhomogene Eulersche Differentialgleichung

$$x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x}$$

Durch die Methode der Variation der Konstanten bestimme man die allgemeine Lösung dieser Dgl.
Hinweis: Aus Beispiel 25 erhält man die Integralbasis $\{\frac{1}{x}, \frac{log\, x}{x}\}$.

2 Lösung des Beispiels

Wir benötigen eine Differentialgleichung in der Form

$$y'' + p(x)y' + y(x) = s(x),$$

wobei $s(x)$ die Störfunktion ist. Somit formen wir die gegbene DGL um:

$$x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x} \qquad | : x^2$$
$$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^3}$$

Die angegebene Integralbasis stellt die Lösungen $\varphi_1(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi_2(x) = \frac{\ln x}{x}$ der zugehöriguen homogenen DGL dar. Diese Lösungen sind unabhängig, denn die zugehörige Wronski-Determinante $W(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ ist nicht Null:

$$W(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2'(x) - \varphi_1'(x) \cdot \varphi_2(x) = \frac{1 - \ln x}{x^3} + \frac{\ln x}{x^3} = \frac{1}{x^3}$$

Um die zugehörige partikuläre Lösung zu erhalten, wenden wir folgende Formel (aus Vachenauer, 'Advanced Engineering Mathematics', 9. Aufl., S. 99) an:

$$y_p(x) = -\varphi_1(x) \cdot \int \frac{\varphi_2(x) \cdot s(x)}{W(\varphi_1(x), \varphi_2(x))} \partial x + \varphi_2(x) \cdot \int \frac{\varphi_1(x) \cdot s(x)}{W(\varphi_1(x), \varphi_2(x))} \partial x =$$
$$= -\frac{1}{x} \cdot \int \frac{\frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} \partial x + \frac{\ln x}{x} \int \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} \partial x =$$
$$-\frac{1}{x} \cdot \int \frac{\ln x}{x} \partial x + \frac{\ln x}{x} \cdot \int \frac{1}{x} \partial x =$$
$$-\frac{\ln^2 x}{2x} + \frac{\ln^2 x}{x} = \frac{\ln^2 x}{2x}$$

Die allgemeine Lösung lautet somit:

$$\mathbf{y = c_1 \cdot \frac{1}{x} + c_2 \cdot \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln^2 x}{2x}}$$