Analysis
-gefundene Fehler bitte an 'matthias.gusenbauer@gmx.net'

Matthias Gusenbauer

19. März 2012

Folgen:

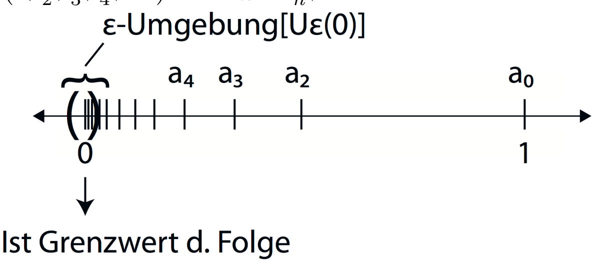
$(\overbrace{a_0, a_1, a_2, ...}^{Folgeglieder}), \quad \underbrace{a_i}_{i\,=\,Index} \quad \in \mathbb{R}$

Reelle Zahlenfolge

Folge: $(a_n)n \in \mathbb{N}$
$a \ : \ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$(a(0), a(1), \ ...)$

Manchmal sind Folgen rekursiv definiert

<u>Grenzwerte:</u>
Bsp.:
$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ ...\right) \qquad a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$



beliebiges $\epsilon > 0$ vorgeben
$U_\epsilon(c) = \underbrace{(c-\epsilon, c+\epsilon)}_{offenes\ Interval}$

fast alle(alle bis auf endlich viele) Folgeglieder liegen in einer $U_\epsilon(c)$

$$\text{c ist Grenzwert der Folge } a_n \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 : \text{fast alle Folgeglieder liegen in } U_\epsilon(c)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\epsilon > 0 : \exists N = N(\epsilon) : |a_n - c| < \epsilon, \forall n \geq N$$
$$\uparrow$$

Index ab dem alle Folgenglieder Abstand $< \epsilon$ haben

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = c$

$$\text{Folge}\begin{cases}\text{es existiert ein GW} \leftarrow a_n \text{ konvergent}\\ \text{kein GW} \leftarrow a_n \text{ divergent}\end{cases}$$

$a_n = n \qquad (0, 1, 2, 3, ...)$
divergent

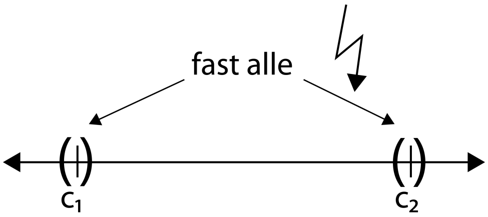
Folge ist uneigentlich konvergent gegen ∞
a_n besitzt uneigentlichen Grenzwert ∞

$$\Updownarrow$$

$\forall K \in \mathbb{R} : \exists N = N(K) : a_n > K : \forall n \geq N \qquad$ [fast alle Folgenglieder sind >]

analog $-\infty$

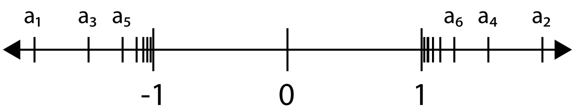
Angenommen es gäbe 2 Grenzwerte:



$\Rightarrow$ nur 1 Grenzwert!

<u>Häufungspunkt:</u>
Bsp.:
$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n} \qquad n \geq 1$

$\left(-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, ...\right)$



-1 & 1 sind Häufungspunkte von a_n

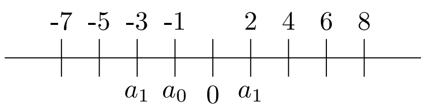
c ist Häufungspunkt v. Folge $a_n \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \underbrace{U_\epsilon(c)}_{(c-\epsilon, c+\epsilon)}$ liegen unendlich viele Folgeglieder

- Folge kann mehrere Häufungspunkte besitzen!
- wenn c Grenzwert $\Rightarrow$ c ist Häufungspunkt

Uneigentlicher Häufungspunkt $(+\infty, -\infty)$

a_n besitzt HP $+\infty \qquad \forall K \in \mathbb{R} : \infty$ viele Folgenglieder vona_n sind grösser als K

Bsp: $a_n = (-1)^n \cdot n$



keine uneigentlichen GW
besitzt uneigentlichen Häufungspunkt $+\infty$ und uneigentlichen HP $-\infty$

Folge(a_n) $n \geq 0$: gösster HP: limes superior von a_n (inkl. uneigentl.) **lim sup**

kleinster HP: limes inferior von a_n **lim inf**

<u>Monotonie und Beschränktheit von Folgen</u>

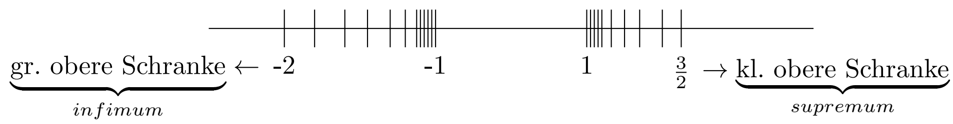
a_n monoton steigend/wachsend $\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
a_n streng monoton steigend $\Leftrightarrow a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

analog fallend

<u>Beschränkt</u>

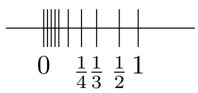
a_n ist nach oben Beschränkt $\Leftrightarrow \exists$ Schranke $S : a_n < S, \forall n \in \mathbb{N}$
a_n ist nach unten Beschränkt $\Leftrightarrow \exists$ Schranke $s : a_n > s, \forall n \in \mathbb{N}$

Bsp:
$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$ $n \geq 1$



Folge a_n nach oben beschränkt & nach unten beschränkt → Folge ist beschränkt.

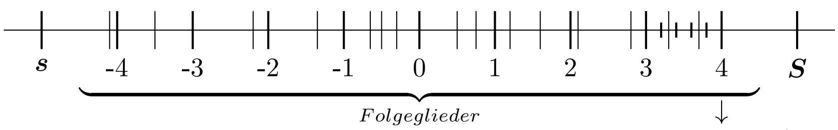
$a_n = \frac{1}{n}$ $n \geq 1$



supremum sup $a_n = 1 = max\ a_n$
inf $a_n = 0$

<u>Vollständigkeitssatz d. reellen Zahlen</u>

a_n beschr. Folge $\Rightarrow$
- a_n besitzt ein supr.
- a_n besitzt ein inf.



$3 < sup < 4$
Teile Intervall wiederum
in kleinere Teile, usw (BUCH!)

Folge nicht nach oben beschränkt $\Rightarrow sup\ a_n := +\infty$
Folge nicht nach unten beschränkt $\Rightarrow inf\ a_n := -\infty$

Satz(Hauptsatz über monotone Folgen)

Die monotone Folge a_n ist genau dann konvergent, falls sie beschränkt ist.

$$a_n\text{beschränkt} \Leftrightarrow a_n\text{konvergent}$$

monoton $\Rightarrow$ konvergent
Beweis: a_n sei eine mon. wachs. Folge die beschränkt ist $\Rightarrow$ S = sup a_n existiert.
Vollständigkeitssatz v. $\mathbb{R}$
$\Rightarrow S - \epsilon$ ist keine obere Schranke
$\epsilon > 0$ beliebig
$\Rightarrow \exists a_n : a_n > S - \epsilon$
a_n monoton wachsen $\Rightarrow a_n > S - \epsilon$, für alle n $\geq \mathbb{N}$
$\Rightarrow |a_n - S| < \epsilon \qquad \forall n > \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ sup a_n ist Grenzwert d. Folge a_n
$\Rightarrow a_n$konvergent $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = S$
$\Rightarrow$ analog falls a_n monoton fallend $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = inf\ a_n$

Bernulli'sche Ungleichung

$(1+x)^n > 1 + n \cdot x \qquad$ falls $n \geq 2, x > -1, x \neq 0$

Beweis vollst. Induktion:
$(1+x)^2 = 1 + 2x + \underbrace{x^2}_{>0, x\neq 0} > 1 + 2x$

$n \to n+1$
$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}_{Ind.Vor.einsetz} \cdot (1+x) > (1+nx)\cdot(1+x)$$
$$= 1 + \underbrace{nx + x}_{(n+1)\cdot x} + \underbrace{n \cdot x^2}_{>0} > 1 + (n+1)x$$

Bsp:
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = a_n \qquad n \geq 1$ wir werden zeigen:

1. Folge a_n ist beschränkt
2. Folge a_n ist mon. wachsend

$\Rightarrow$ GW existiert $\qquad a_n$ ist konvergent
$\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n =: e$

ad 1. & 2. Buch S.145

Rechenregeln f. konvergente Folgen:

$a_n \overset{n\to\infty}{\to} a \in \mathbb{R}$ $\quad b_n \overset{n\to\infty}{\to} b \in \mathbb{R}$ $\quad$ [eigentlich konvergent]

$c_n := a_n + b_n$ $\quad c_n$ konvergent und konv. gegen a+b $\quad c_n \overset{n\to\infty}{\to} a+b$
$c_n := a_n - b_n$ $\quad c_n \overset{n\to\infty}{\to} a-b$
$(a_n \cdot b_n) \overset{n\to\infty}{\to} a \cdot b$
$(\underbrace{\lambda}_{\in\mathbb{R}} \cdot a_n) \overset{n\to\infty}{\to} \lambda \cdot a$
$\frac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$ & $b_1, b_2, ... \neq 0$
Beweise siehe Buch.

Achtung bei uneigentlichen Konvergenzen!
unbestimmte Formen:
"$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "$0 \cdot \infty$", "1^∞", "0^0", "∞^0"

$a_n \cdot b_n$ $\quad$ "$\infty \cdot 0$"

Bsp:

- $\underbrace{n}_{\infty} \cdot \overbrace{\frac{1}{n^2}}^{0} = \frac{1}{n} \to 0$
- $\underbrace{n}_{\infty} \cdot \overbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{0} = \sqrt{n} \to \infty$
- $\underbrace{n}_{\infty} \cdot \overbrace{\frac{1}{n}}^{0} = 1$

Rechenregeln f. uneigentliche konvergente Folgen

$a_n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty, b_n \overset{n\to\infty}{\to} b$

$a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty$

$\lambda \cdot a_n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty, \lambda > 0 \vee -\infty, \lambda < 0$

$a_n \cdot b_n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty, b > 0 \vee -\infty, b < 0$

$\frac{b_n}{a_n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$

$a_n \to +\infty$ $\quad b_n \to +\infty$

$a_n - b_n$: KEINE Aussage!

Bsp:

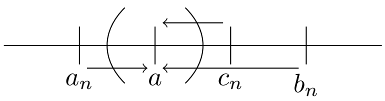
$$\frac{n^2+5\cdot\sqrt{n}-3}{2n^n-5n+1} =" \frac{\infty}{\infty}"= \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{5\sqrt{n}}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(2-\frac{5}{2}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\overbrace{1}^{1} + \overbrace{\frac{5}{n^{\frac{1}{2}}}}^{0} - \overbrace{\frac{3}{n^2}}^{0}}{\underbrace{2}_{2} - \underbrace{\frac{5}{n}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{0}} = \frac{1}{2}$$

Konvergenz Untersuchungen

Satz: "Sandwichtheorem"
$(a_n)_n$, $(b_n)_n$ konvergente Folge $\rightarrow$ Grenzwerte stimmen überein:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$

$(c_n)_n$: Folge mit $a_n \geq c_n \geq b_n$, fuer (fast) alle n
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, also c_n konvergiert ebenso gegen a.

Beweis:



$\forall \epsilon > 0 : \exists N_1 :$ in $U_\epsilon(a)$ liegen alle a_n mit $n \geq N_1$
$\exists N_2 :$ in $U_\epsilon(a)$ liegen alle b_n mit $n \geq N_2$
$\Rightarrow N := max(N_1, N_2)$
in $U_\epsilon(a)$ liegen alle c_n mit $n \geq N$

Bsp: Konvergenzuntersuchung v. $c_n = \sqrt[n]{n}$

Behauptung wähle $a_n = 1$ $\qquad$ $b_n = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$

$a_n \geq c_n \geq b_n$
$\Updownarrow$ alle Folgeglieder. positiv
$a_n^n \geq c_n^n \geq b_n^n$
$$1 \geq \underbrace{n \geq \left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n}_{\text{zu zeigen}}$$

$$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n \overset{\text{Bin. LS.}}{=} 1 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^2 + ...$$
$$\geq 1 + \sqrt{n} \cdot \sqrt{2} + \frac{n\cdot(n-1)}{2} \cdot \frac{2}{n} =$$
$$= 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{n} + n - 1 = n + \sqrt{2} \cdot \sqrt{n} \geq n$$
$$\Rightarrow 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \geq \sqrt[n]{n}$$

Sandwichtheorem $\Rightarrow a_n$ $\qquad c_n$ $\qquad b_n = 1 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

$\downarrow \quad \downarrow$ ...daraus folgt... $\downarrow$
$1 \quad 1 \qquad\qquad 1$

Def. Teilfolge: $(a_n)_n = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ a_6, ..., a_n)$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (a_{n_m}) & \underset{m\in\mathbb{N}}{=} & (a_{n_0}, & & a_{n_1}, & a_{n_2}, & a_{n_3}, ...) \end{array}$$

Satz: SZusammenhang HP $\leftrightarrow$ konvergente Teilfolge”

- $(a_n)_n$ Folge die Häufungspunkt a besitzt
  $\Rightarrow$ es gibt eine gegen a konvergierende Teilfolge von a_n
- umgekehrt: falls $a_n)_n$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert a besitzt
  $\Rightarrow$ a ist Häufungspunkt von $(a_n)_n$

Bsp:
$(1, -1, 1, -1, 1, -1, ...)$
konv. TF:$(1 \quad 1 \quad 1, ...) \to 1$
konv. TF:$(\quad -1 \quad -1 \quad -1, ...) \to -1$

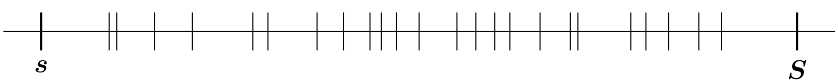
HP HP

$-1 = a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = ...$ $\quad 1 = a_0 = a_2 = a_4 = ...$

Beweis: $(a_n)_m$ sei konvergente Teilfolge von $(a_n)_n$ [umgekehrtes in Buch]
$\downarrow$
a

$\downarrow$
Fast alle Folgeglieder v. $(a_{n_m})_m$ liegen in $U_\epsilon(G)$
$\Rightarrow \infty$ viele Folgeglieder von (a_{n_m}) liegen in $U_\epsilon(a)$
$\Rightarrow \infty$ viele Folgeglieder von $(a_n)_n$ liegen in $U_\epsilon(a) \to$
a ist Häufungspunkt von a_n

Satz von Bolzano-Weierstrass
Jede beschränkte Folge $(a_n)_n$ besitzt einen Häufungspunkt



Beweis: es reicht zu zeigen, dass a_n eine konvergente Teilfolge besitzt.
Wir werden versuchen eine monotone Teilfolge zu bilden. Zu diesem Zweck betrachten wir alle Folgeglieder die grösser als alle weiteren Folgeglieder sind.
Indexmenge: $M = k : a_k \geq sup(a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, ...)$ 2. Fälle: 1. Fall: M besitzt

unendlich viele Elemente
$\Rightarrow (a_k)$ mit $k \in M$ ist eine monoton fallende Teilfolge.
$\Rightarrow$ monoton fallend beschränkte Teilfolge $\Rightarrow$ konvergente Teilfolge
$\Rightarrow$ Teilfolge besitzt Grenzwert
$\Rightarrow$ Folge $(a_n)_n$ besitzt Häufungspunkt

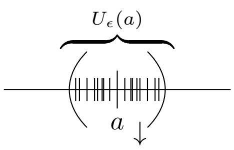
2. Fall: M besitzt nur endlich viele Elemente
$\Rightarrow$ es gibt in M einen grössten Index K
$\Rightarrow \forall n > K$: es gibt ein Element a_m, mit $m > n$, dass zumindest gleich gross wie a_n ist.

$$a_n \ldots\ldots\ldots a_m \ldots\ldots\ldots a_{m'} \ldots\ldots\ldots a_{m''}$$
$$\quad \geq a_n \quad \geq a_m \quad \geq a_{m'}$$

$\Rightarrow$ Teilfolge $a_n, a_m, a_{m'}, a_{m''}, \ldots$
$\Rightarrow$ monoton wachsend beschränkte Teilfolge
$\Rightarrow$ konvergente Teilfolge $\Rightarrow$ Folge (a_n) besitzt Häufungspunkt

Definition "Cauchy-Folgen"
reelle Folge $(a_m)_n$ heisst Cauchy Folge, wenn für alle $\epsilon > 0$ $N(\epsilon)$ existiert sodass
$|a_n - a_m| < \epsilon, \forall n, m > N(\epsilon)$ [Glieder mit grossem Index liegen nahe beieinander]

Satz: Cauchy-Folge $\Leftrightarrow$ konvergente Folge



fast alle FG

Beweis: siehe Buch

Beispiel: $a_n = a_{n-1} + \frac{sin(n)}{2^n}$ $\quad , a_0 = 0$
rekursiv definierte Folgen $\left(\Rightarrow a_n \text{ ist endlich Reihe: } a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{sin(k)}{\lambda^k}\right)$
a_n ist Cauchy-Folge(CF)

$$a_n - a_m = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{sin(k)}{2^k}, m < n$$

$$|a_n - a_m| \geq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|sin(k)|}{2^k} \geq \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m+1}} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{1}{2^k}}_{\geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2}$$

$\Rightarrow m, n > N$
$\Rightarrow |a_m - a_n| \geq \frac{1}{2^n}$
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \Rightarrow N = N(\epsilon) : |a_m - a_n| \geq \epsilon$

$\frac{1}{2^N} = \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} = 2^N$
$N = log_2 \frac{1}{\epsilon} = \lceil -log_2 \epsilon \rceil$