Mathematik III

Vorlesung 1

Markus Diem

6. Oktober 2006

1 Allgemeines

Vorlesung: Freitag 08:30 - 10:00 Uhr, FH HS 2

Übung: Beginn: Freitag 20. Oktober 2006
Angaben: sind als *.pdf im Internet,
unter: `http://info.tuwien.ac.at/panholzer/`

Buch: Meyberg und Vachenauer, *Höhere Mathematik 2*,
4. Auflage, Springer, Berlin 2001

Stoff: **Harmonische Analyse**
- Fourier Reihen Entwicklung
- Diskrete Fourier Transformation
- Fourier Transformation

Differentialgleichungen
- Gewöhnliche Differentialgleichung
- Spezielle Typen
- Laplace Transformation
- Potenzreihenentwicklung
- Randwertprobleme
- Numerische Lösungsverfahren

Partielle Differentialgleichungen
- Lineare und quasi lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung
- Lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung (Klassifikation)
- Separationsansatz

2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Gleichungen, in denen neben x und der gesuchten Funktion $y = y(x)$ auch deren Ableitungen $y'(x), ..., y^{(n)}(x)$ vorkommen, werden als Differentialgleichungen bezeichnet. Es werden hier hauptsächlich reellwertige Funktionen betrachtet.

Definition:

$$F: \mathbb{R}^{n+2} \supseteq D \to \mathbb{R}$$
$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

nennt man implizite Form einer Differentialgleichung n-ter Ordnung, falls $y^{(n)}$ vorkommt.

Explizite Form:

$$y^{(n)} = G(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

2.1 Lösungen von Differentialgleichungen

Definition: Eine Funktion mit Definitionsbereich $y(x) : I \to \mathbb{R}$ heißt Lösung der Differentialgleichung, falls $y(x)$ die Differentialgleichung erfüllt. $y(x)$ muss dabei n-mal differenzierbar sein.

Beispiel: $y' = xy + x^2$ Differentialgleichung 1. Ordnung. Sie ist linear, da y und y' nur linear vorkommen.

Lösungen von Differentialgleichungen sind im Allgemeinen parameterabhängig (d.h. nicht eindeutig).

- Spezielle- bzw. Partikulärlösung ist eine Lösung, die nicht von Paramtern abhängt.
- Allgemeine Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung ist eine Lösung, die von n frei wählbaren Parametern (= Integrationskonstanten) abhängt.
- Vollständige Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung, ist eine allgemeine Lösung, die alle Lösungen beinhaltet.

Gegeben sei eine Differentialgleichung n-ter Ordnung:

$$y^{(n)} = G(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

Die eindeutige Lösung bekommt man nur durch zusätzliche Bedingungen.
Anfangswertproblem (AWP): Bedingungen (= Gleichungen) an einem Punkt x_0. Bei einer Differentialgleichung n-ter Ordnung müssen Bedingungen bis zur $n-1$-ten Ordnung in x_0 bekannt sein.
Randwertproblem (RWP):

Anfangswertproblem:

$$y^{(n)} = G(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$
$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$
$$y_0, y_1, ..., y_{n-1} \in \mathbb{R}$$

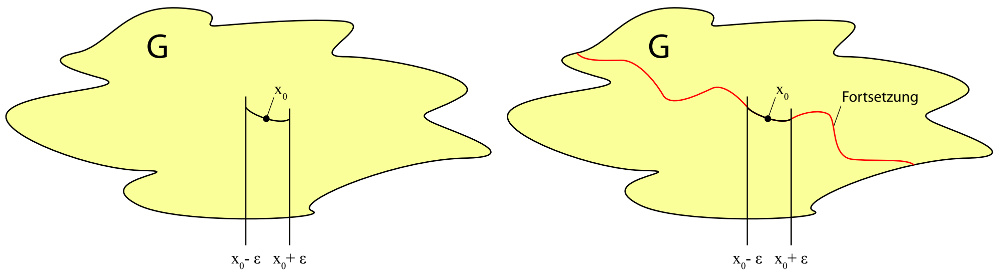

Abbildung 1: Lokale Lösung des Anfangswertproblems (links) und die Fortsetzung (rechts).

Definition: Die lokale Lösung des Anfangswertproblems ist eine Lösung der Differentialgleichung im Intervall $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, welche die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0,\ \dots$ erfüllt.

Ein Anfangswertproblem heißt *well posed* oder sachgemäß gestellt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Existenz einer lokalen Lösung des Anfangswertproblems.
- Eindeutigkeit der lokalen Lösung.
- Stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten.

Letzteres ist besonders für numerische Lösungsverfahren wichtig.

Von Interesse ist gegenüber der lokalen Lösung die ganze Funktion in einem betrachteten Gebiet (Abbildung 1).

2.2 Graphische Interpretation einer expliziten Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = f(x, y)\varphi$$

Die Lösung ist eine differenzierbare Kurve (rot in Abbildung 2), die in das Richtungsfeld passt. (d.h. Differenzierbare Kurve, deren Tangentenanstiege in jedem Punkt (x, y) mit $y' = f(x, y)$ gleich sind.) Das graphische Lösungsverfahren heißt auch Eulersches Polygonzugverfahren. Es ist ebenfalls ein numerisches Lösungsverfahren für Differenzialgleichungen.

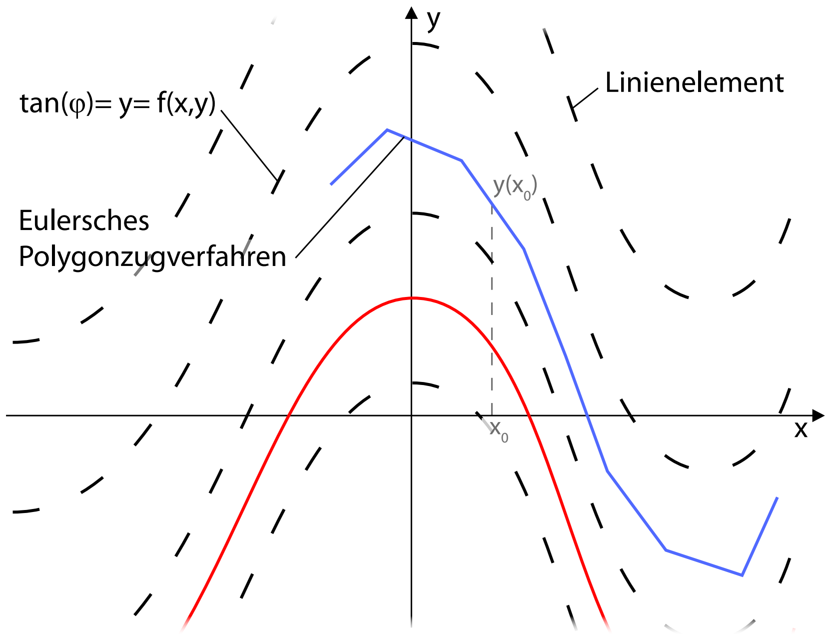

Abbildung 2: Richtungsfeld einer Differentialgleichung.

2.3 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Gegeben sei wiederum eine Differentialgleichung $y' = f(x, y)$

- $f(x, y)$ ist stetig. Diese Forderung muss erfüllt sein, reicht jedoch nicht aus.
- $f(x, y)$ ist differenzierbar (nach x und y). Diese Forderung würde die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung zwar implizieren, ist jedoch zu streng formuliert. In der Praxis gilt sie oft nicht, obwohl eine Lösung existiert und eindeutig ist. Außerdem ist sie zum Teil schwer überprüfbar.
- $f(x, y)$ soll Lipschitz-stetig sein. Diese Forderung garantiert die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung.

Lipschitz-Stetigkeit: Es sei ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben. Eine Funktion $f(x, y)$ erfüllt die globale Lipschitz Bedingung (= sie ist global Lipschitz-stetig) in Bezug auf y, falls es eine positive Konstante $L > 0$ gibt, sodass die globale L Bedingung gilt:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$
$$\forall x, y_1, y_2 \text{ mit } (x, y_1) \in G, (x, y_2) \in G$$

wobei L die Lipschitzkonstante ist. Ein Gebiet G ist eine offene, zusammenhängende (d.h. Von jedem Punkt $(x, y) \in G$ führt ein Weg zu einem beliebigen anderen Punkt $(x_1, y_1) \in G$.) Menge.

Eine Funktion $f(x, y)$ erfüllt eine lokale L Bedingung (= ist lokal Lipschitzstetig), wenn es für alle $(x, y) \in G$ eine Umgebung U gibt, mit $U \subseteq G$, sodass für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in U$ gilt:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|, \quad L > 0$$

d.h. L ist abhängig von (x, y_1) und gegebenenfalls unterschiedlich.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz (von Picard und Lindelöf): Gegeben ist ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Differenzialgleichung $y' = f(x, y)$. Falls f in Bezug auf x und y stetig ist und in Bezug auf y eine lokale L Bedingung erfüllt, dann besitzt das Anfangswertproblem mit $y(x_0) = y_0$ für alle x_0, y_0 mit $(x_0, y_0) \in G$ eine eindeutige Lösung, die sich bis an den Rand von G fortsetzt.