UE Einführung in Numerical Computing
Übungsblatt 6

14. Dezember 2020

Rechenbeispiele

51. Berechne eine Approximation des Integrals

$$\int_0^1 x^3 dx$$

nach der Mittelpunktsregel, nach der Trapezregel und nach der Simpsonregel. Man erstelle eine grafische Darstellung und vergleiche die Genauigkeit der Approximationen.

52. Es gilt

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi$$

Man kann daher durch numerische Integration eine Approximation für den Wert von π berechnen. Berechne nach der Mittelpunktsregel, nach der Trapezregel und nach der Simpsonregel den Wert von π und vergleiche die Approximationen mit dem „exakten“ Wert.

53. Man verwende numerische Integration, um die folgende Behauptung zu überprüfen:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+10x^2} dx \approx 0.4$$

54. Man berechne eine Approximation an das Integral

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2/2}$$

unter Verwendung der Trapezregel und unter Verwendung der Gauss Quadratur.
Man erstelle eine grafische Darstellung.

55. Man verwende die Gauss-Quadratur zur Berechnung einer Approximation für das Integral

$$\int_0^1 \cos(x)dx$$

durch Transformation auf das Intervall $[-1, 1]$

Man erstelle grafische Darstellungen.

56. Man approximiere die folgenden Integrale durch Anwendung der zusammengesetzten Trapezregel und der zusammengesetzten Simpsonregel:

    (a) $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$

    (b) $\int_0^1 e^x dx$

    Man erstelle dazu grafische Darstellungen und vergleiche die Ergebnisse mit dem exakten Wert.

57. Das Integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$$

ist ein uneigentliches Integral.
Man transformiere das Integral durch $t = \sqrt{x}$ auf ein eigentliches Integral und berechne eine Approximation.

58. Man überprüfe mittels numerischer Integration die folgende Formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Hinweis: Man ersetzt das uneigentliche Integrationsintervall durch ein symmetrisches Intervall um 0, etwa $[-2, 2], [-3, 3], [-4, 4], \ldots$

Programmierbeispiele

59. Schreiben Sie drei Funktionen, die eine Funktion f, Anfangs- und Endpunkte eines Intervalls $[a, b]$ sowie eine natürliche Zahl m als Argumente erhalten, und das bestimmte Integral

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

mittels zusammengesetzer Mittelpunkts-, Trapez- und Simpsonregel berechnen. Überprüfen Sie die Korrektheit ihrer Implementierungen mit Octave[1], beispielsweise mit einigen der Funktionen aus den vorherigen Beispielen.

[1] https://www.gnu.org/software/octave/doc/v4.0.1/Functions-of-One-Variable.html#Functions-of-One-Variable

60. Bei sich schnell ändernden Funktionen verlieren die bisher diskutierten Verfahren zunehmend an Genauigkeit. Eine Möglichkeit, dem zu entgehen ist die sogenannte *adaptive Quadratur*. Die Idee ist hier, die numerische Integration so lange auf kleineren Teilintervallen fortzusetzen, bis kaum noch eine relative Änderung eintritt - zu diesem Zeitpunkt wird retourniert.

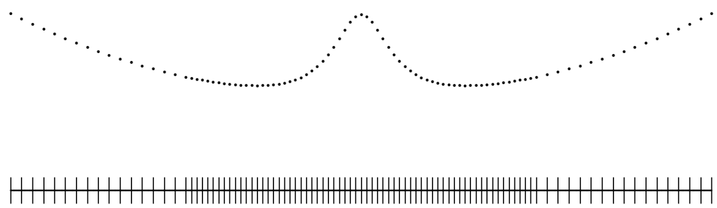

Abbildung 1: Mögliche Anordnung der betrachteten Intervalle bei einer sich nicht überall gleich schnell ändernden Funktion, aus Heath: Scientific Computing

In Pseudocode hat der Algorithmus die folgende Form, wobei hier noch die ein oder andere Integralauswertung eingespart werden kann:

Algorithmus 1 : adSimpson(f, a, b, ϵ)

I_1 = simpson(f, a, b) ;
I_2 = simpson(f, a, $(a+b)/2$) + simpson(f, $(a+b)/2$, b);
if $|(I_1 - I_2)/I_1| < \epsilon$ **then**
  return I_2 ;
else
  return adSimpson(f, a, $(a+b)/2$, ϵ) + adSimpson(f, $(a+b)/2$, b, ϵ) ;
end

Schreiben Sie eine Funktion, die eine adaptive Quadratur mittels der Simpsonregel durchführt. Testen Sie diese an

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

und vergleichen sie mit der einfachen und zusammengesetzten Simpsonregel für verschieden feine Unterteilungen.

Garantiert das hier verwendete Abbruchkriterium, dass wir eine gute Näherung an den tatsächlichen Wert des Integrals erhalten?