

UE Einführung in Numerical Computing

Übungsblatt 5

December 7, 2022

Rechenbeispiele

41. Gegeben sind folgende Stützstellen:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 2, & y_0 = 3 \\ x_1 = 7, & y_1 = 2 \\ x_2 = 10, & y_2 = 4 \end{array}$$

- (a) Man bestimme das Interpolationspolynom M in der monomialen Basis
- (b) Man bestimme die Lagrange-Polynome l_j und das Lagrange-Interpolationspolynom P
- (c) Man erstelle eine Grafik für M und für P mit den entsprechenden Stützstellen
- (d) Man bestimme die Werte an den Stellen $x=3, 5$ und 8 für M und für P

42. Gegeben sind folgende Stützstellen:

$$\begin{array}{ll} x_0 = -1, & y_0 = 0 \\ x_1 = 1, & y_1 = 2 \\ x_2 = 2, & y_2 = 4 \end{array}$$

- (a) Man bestimme das Newton-Interpolationspolynom
- (b) Man erstelle dazu eine Grafik
- (c) Man berechne die Werte des Newton-Interpolationspolynoms an der Stelle $x=0$

43. Gegeben sind folgende Stützstellen:

$$\begin{array}{ll} x_0 = -1, & y_0 = 0 \\ x_1 = 1, & y_1 = 2 \\ x_2 = 2, & y_2 = 4 \end{array}$$

- (a) Man bestimme mit dem Schema der dividierten Differenzen die Koeffizienten für das Newton Interpolationspolynom
- (b) Füge eine weitere Stützstelle hinzu:

$$x_3 = 3, y_3 = 2$$

und bestimme das neue Polynom

- (c) Man berechne die Werte an der Stelle $x=0$ jeweils für die Newton Interpolationspolynome aus Beispiel a) und b)
 - (d) Man erstelle zu obigen Beispielen Grafiken
44. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \log(x) - \frac{x-1}{x}$$

Für die folgenden Mengen von Stützstellen, bestimme man durch Interpolation den Funktionswert an der Stelle 5,25 und vergleiche jeweils dieses Ergebnis mit dem exakten Wert.

Erstellen Sie dazu auch grafische Darstellungen!

(a)

$$\begin{aligned} x_0 &= 4, & y_0 &= f(x_0) \\ x_1 &= 8, & y_1 &= f(x_1) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x_0 &= 4, & y_0 &= f(x_0) \\ x_1 &= 8, & y_1 &= f(x_1) \\ x_2 &= 10, & y_2 &= f(x_2) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x_0 &= 2, & y_0 &= f(x_0) \\ x_1 &= 4, & y_1 &= f(x_1) \\ x_2 &= 8, & y_2 &= f(x_2) \end{aligned}$$

45. Wieviele Multiplikationen werden benötigt, um den Wert des Polynoms $p(t)$ vom Grad $n-1$ an einer gegebenen Stelle t zu bestimmen, wenn das Polynom dargestellt wird in

- (a) Monomialer Basis
- (b) Lagrange Basis
- (c) Newton Basis

46. Man bestimme die Werte von a, b, c, d, e derart, dass die folgende Funktion ein kubischer Spline ist:

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b(x-1)^3 & x \in (-\infty, 1] \\ c(x-2)^2, & x \in [1, 3] \\ d(x-2)^2 + e(x-3)^3 & x \in [3, \infty) \end{cases}$$

Zusätzlich soll gelten:

$$f(1) = 1, f'''(0) = 6, f'''(4) = 6$$

Man zeichne die erhaltene Funktion!

47. Welche Eigenschaften eines natürlichen kubischen Splines besitzt die folgende Funktion und welche nicht?

$$f(x) = \begin{cases} (x+1) + (x+1)^3 & x \in (-1, 0] \\ 4 + (x-1) + (x-1)^3 & x \in (0, 1] \end{cases}$$

Man zeichne die erhalten Funktion f !

Programmierbeispiele

48. Ein Experiment ergab folgende Daten:

t	0.0	0.5	1.0	6.0	7.0	9.0
y	0.0	1.6	2.0	2.0	1.5	0.0

Mit einer Methode Ihrer Wahl interpolieren Sie die Daten mit einem Polynom vom Grad 5 und erstellen Sie eine grafische Darstellung im gegebenen Bereich $t \in [0, 9]$

49. Ein Experiment ergab folgende Daten:

t	0.0	0.5	1.0	6.0	7.0	9.0
y	0.0	1.6	2.0	2.0	1.5	0.0

Bestimmen Sie einen kubischen Spline, der die gegebenen Daten interpoliert und erstellen Sie eine grafische Darstellung im gegebenen Bereich $t \in [0, 9]$

50. Folgende Datenpunkte sind gegeben

t	0	1	4	9	16	25	36	49	64
y	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Eine Interpolation dieser Datenpunkte sollte eine Approximation der Wurzelfunktion ergeben

- (a) Bestimmen Sie ein Polynom vom Grad 8, das diese 9 Datenpunkte interpoliert
- (b) Erstellen Sie eine grafische Darstellung des erhaltenen Polynoms und der vom System erstellten Wurzelwerte (sqrt) im Bereich $[0, 64]$
- (c) Erstellen Sie eine grafische Darstellung des erhaltenen Polynoms und der vom System erstellten Wurzelwerte (sqrt) im Bereich $[0, 1]$ und vergleichen Sie die Werte.