UE Einführung in Numerical Computing
Übungsblatt 2

17. Oktober 2020

Rechenbeispiele

11. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

   (a) Man bestimme das charakteristische Polynom

   (b) Man bestimme die Eigenwerte

   (c) Man bestimme algebraische und geometrische Vielfachheiten der Eigenwerte

   (d) Man bestimme Eigenvektoren für alle Eigenwerte

12. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

   (a) Man bestimme das charakteristische Polynom

   (b) Man bestimme die Eigenwerte von A und die Matrix D mit den Eigenwerten in der Hauptdiagonale.

   (c) Man überprüfe dass $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von A sind (zu welchen Eigenwerten?)

13. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

   (a) Wie transformiert man die Matrix A mit Hilfe der Eigenvektoren in die dazu ähnliche Diagonalmatrix D.

(b) Man bestimme die Determinante von A

14. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man bestimme folgende Ausdrücke

(a) $||A||_1$, $||A||_\infty$

(b) $||A^{-1}||_1$, $||A^{-1}||_\infty$

(c) $||A||_1||A^{-1}||_1$, $||A||_\infty||A^{-1}||_\infty$

(d) $||\vec{x}||_1$, $||\vec{x}||_\infty$

(e) $||A\vec{x}||_1$, $||A\vec{x}||_\infty$

(f) $||A||_1||\vec{x}||_1$, $||A||_\infty||\vec{x}||_\infty$

15. Seien a, b, c in Gleitkommadarstellung mit 8 Stellen gegeben:

$a = 0,23371258.10^{-4}$
$b = 0,33678429.10^{2}$
$c = -0,33677811.10^{2}$

(a) Man zeige, dass (a+b)+c und a+(b+c) nicht gleich sind.

(b) Welches der beiden Ergebnisse ist genauer?

Achtung: im Lauf der Rechnungen kann es dazu kommen, dass Sie keine reguläre Maschinenzahl erhalten, dem muss durch Rundung Rechnung getragen werden. Die Operation + muss also eigentlich durch eine geeignete Gleitpunktoperation ersetzt werden (Pseudoarithmetik)

16. Seien a, b, c gegeben:

$a = 0,0345$
$b = 29$
$c = 2$

(a) Man bringe a, b, c in Gleitkommadarstellung mit Mantissenlänge 4

(b) Zeige dass (a.b).c nicht gleich a.(b.c) ist.

(c) Welches der beiden Ergebnisse ist genauer?

Achtung: im Lauf der Rechnungen kann es dazu kommen, dass Sie keine reguläre Maschinenzahl erhalten, dem muss durch Rundung Rechnung getragen werden. Die Operation . muss also eigentlich durch eine geeignete Gleitpunktoperation ersetzt werden (Pseudoarithmetik)

17. Gegeben sei folgende Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

   (a) Man bestimme für die Matrix A die bei der Gauß-Elimination auftretenden Elementarmatrizen M_1 und M_2

   (b) Man bestimme damit dann die entsprechende LU-Zerlegung

   (c) Man überprüffe für $k = 1$ und $j = 2$ folgende Eigenschaften

$$M_k^{-1} = I + v_k e_k^T$$

$$M_k^{-1} M_j^{-1} = I + v_k e_k^T + v_j e_j^T$$

   (M_k, v_k wie in der Vorlesung definiert)

18. Gegeben sei folgende Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

   (a) Man bestimme die LU-Zerlegung (untere und obere Dreiecksmatrix)

   (b) Verwende die LU-Faktorisierung zur Berechnung der Determinante von A

   (c) Löse das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (1, 0, 5)^T$

Programmierbeispiele

19. Mittelwert $\bar{x}$ und Varianz s^2 eines Datensatzes $x_1, \ldots, x_n$ eines Datensatzes sind durch

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad\qquad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{1}$$

   definiert. Eine alternative Formel zur Berechnung der Varianz ist

$$s^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) - \bar{x}^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \tag{2}$$

   sie hat den Vorteil, dass man nur einmal über die x_i zu iterieren braucht - wenn zum Beispiel nicht der ganze Datensatz in den Speicher passt, ist das eine gute Eigenschaft.

   (a) Welche der beiden Berechnungsarten ist genauer? Vergleichen sie die beiden Formeln empirisch, indem sie mit Octave Datensätze verschiedener Größen n mit bekannter Varianz und bekanntem Mittelwert generieren[1], und die Varianz dann nach (1) und (2) berechnen.

[1] Nützlich ist hier zB. die Funktion *normrnd*, die Octave zur Verfügung stellt.

(b) Plotten sie die Abweichungen der berechneten Varianzwerte von den bekannten (richtigen) Werten und vergleichen Sie.

(c) Finden sie eine Erklärung für das Phänomen?

20. Schreiben sie eine Funktion, die eine obere Dreiecksmatrix U und einen Vektor b als Argumente erhält, und das Gleichungssystem $Ux = b$ mittels Rückwartssubstitution löst. Überprüfen sie ihre Ergebnisse mit Octave. Sie dürfen von korrekt dimensionierten Eingabedaten ausgehen, sollten aber signalisieren, falls sich das Gleichungssystem als unlösbar erweist.