UE Einführung in Numerical Computing
Übungsblatt 3

14. November 2022

Rechenbeispiele

21. Durch folgende Punkte soll eine Gerade gelegt werden

$$(0,1),(1,2),(3,3)$$

   (a) Man stelle das (überbestimmte) dazugehörige Gleichungssystem für das Linear Least Squares Problem auf

   (b) Man bestimme die dazugehörigen Normalgleichungen

   (c) Man bestimme die Lösung des Linear Least Squares Problems mit Hilfe der Cholesky Faktorisierung

22. Man bestimme die Householder Transformation, die im Vektor $(1,1,1,1)^T$ alle Einträge bis auf den ersten annihiliert. Also wenn

$$(I - 2\frac{vv^T}{v^Tv})\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   was ist dann der Wert von α und was ist der Vektor v?

23. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$

   (a) Wieviele Housholder Transformationen benötigt man für eine QR Faktorisierung?

   (b) Wie sieht die erste Spalte nach der ersten Householder Transformation aus?

24. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$ wie oben

(a) Wie viele Givens Rotationen benötigt man für die QR Faktorisierung von A?

(b) Wie sieht die erste Spalte nach der ersten Givens Rotation aus, wenn man an der Stelle 21 (2.Zeile, 1. Spalte) eine Null erreichen will?

(c) Wie sieht die erste Spalte aus, wenn man mit Givens Rotationen unterhalb des ersten Eintrages lauter Nullwerte erzeugt?

25. Gegeben sei der Vektor

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Man bestimme

(a) Eine Elementarmatrix, die im Vektor a die dritte Stelle zu Null transformiert

(b) Eine Householder Transformation, die im Vektor a die dritte Stelle zu Null transformiert

(c) Eine Givensrotation, die im Vektor a die dritte Stelle zu Null transformiert

26. (a) Man bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix der Householder Transformation

$$H = I - 2\frac{vv^T}{v^T v}$$

($v \neq 0$)

(b) Man bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix der Givens Rotation

$$G = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$$

mit $c^2 + s^2 = 1$

27. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Die SVD ist gegeben durch

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{11}{\sqrt{195}} & -\frac{3}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{7}{\sqrt{195}} & 2\sqrt{\frac{2}{13}} & \sqrt{\frac{2}{15}} \\ -\sqrt{\frac{5}{39}} & -\frac{1}{\sqrt{26}} & \sqrt{\frac{5}{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{30} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} & \frac{5}{\sqrt{26}} \\ -\frac{5}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}$$

(a) Was sind die Singulärwerte von A?

(b) Man bestimme die Pseudoinverse von A

(c) Bestimme die Lösung x von $Ax \cong b$ mit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ durch Anwendung der Pseudoinversen A^+.

28. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0.1 & -0.5 \\ 0.2 & 3 & 0.5 \\ -0.4 & 0.1 & 5 \end{pmatrix}$

(a) Man bestimme die Gershgorin-Kreise für A

(b) Man fertige eine Zeichnung oder einen Plot mit den Kreisen und den Eigenwerten an

Programmierbeispiele

29. (a) Schreiben Sie eine Funktion, die mittels normalisierter Power Iteration den dominanten Eigenwert und den zugehörigen Eigenvektor einer Matrix ermittelt. Als Abbruchkriterium kann zB. dienen, dass sich die Norm des Vektors, auf den der Algorithmus operiert, um weniger als einen bestimmten, sehr kleinen Wert ändert.

(b) Wenden Sie Ihre Funktion auf die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -4 & 4 \\ -1 & -7 & -4 & -2 \\ -7 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

an und prüfen Sie, ob es sich bei dem berechneten Vektor wirklich um einen Eigenvektor handelt.

(c) Tun Sie dasselbe für

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ -4 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

(d) Bei einer der beiden Matrizen schlägt das Verfahren fehl. Bei welcher, und warum?

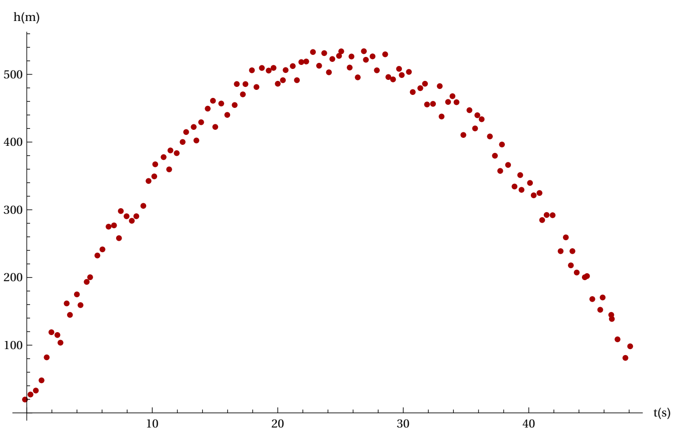
30. (a) Schreiben Sie eine Funktion, die eine .csv Datei, die (t, y) Wertepaare enthält, einliest und die Koeffizienten x_1, x_2 und x_3 eines quadratischen Ausgleichspolynoms

$$f(x,t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$$

berechnet. Stellen Sie dazu die entsprechende Vandermode Matrix A auf und lösen Sie das System der Normalgleichungen (hierfür ist die Verwendung von „\“ in Ordnung).

(b) Auf moodle finden Sie unter „Übungen“ die Datei „height.csv“. Sie enthält die gemessenen Höhen einer auf einem nicht allzu weit entferntem Himmelskörper senkrecht nach oben geworfenen Probemasse.

Abbildung 1: Fallhöhe als Funktion der Zeit



Verwenden Sie ihre Funktion, um ein Ausgleichspolynom zu diesem Datensatz zu finden, und stellen sie Messwerte und Ausgleichsfunktion im selben Plot graphisch dar.

Freiwillige Zusatzfrage: Können sie auf Basis ihrer Ergebnisse und Google herausfinden, um welchen Himmelskörper es sich handelt?