

# UE Einführung in Numerical Computing

## Übungsblatt 1

3. Oktober 2022

Bitte rechnen Sie die Beispiele "mit der Hand", das heißt geben Sie es nicht einfach in Octave ein und schreiben das Resultat ab. Sie sollten mit den Matrizen-Operationen und Rechenwegen einfach einmal wirklich gut vertraut werden. Selbstverständlich können oder sollten sogar die Resultate danach mit dem Computer (Octave) überprüft werden.

Die Beispiele müssen nicht in der angegebenen Reihenfolge bearbeitet werden. Manchmal kann die Rechnung einfacher werden, wenn man gewisse Resultate schon vorher erarbeitet hat. Bitte überlegen Sie auch immer, ob Sie lange Rechnungen machen müssen. Manchmal sind diese notwendig, manchmal helfen aber auch schon kleine Überlegungen und es ist nur mehr wenig oder eventuell auch gar keine weitere Rechnung mehr notwendig.

### Rechenbeispiele

1. Gegeben sind folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Man berechne, falls sie existieren, folgende Matrizen

- (a)  $A \cdot B$
- (b)  $B \cdot A$
- (c)  $A \cdot C$
- (d)  $A^T \cdot (C + D)$
- (e)  $(C + D) \cdot A$

2. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Man berechne, falls sie existieren, folgende Ausdrücke

- (a)  $\vec{y}A\vec{x}$
- (b)  $\vec{y}^T A \vec{x}$
- (c)  $\vec{x}^T A \vec{y}$
- (d)  $\vec{x}^T (\vec{y}^T A)^T$

3. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & -3 \\ -16 & 7 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Man überprüfe, dass  $A = B \cdot C$  und bestimme die Determinanten von

- (a) A, B und C
- (b)  $A^2$
- (c)  $A^{-1}$
- (d)  $ABC$
- (e)  $C^T C$

4. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & -3 \\ -16 & 7 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Man bestimme

- (a)  $A^{-1}$
- (b)  $B^{-1}$
- (c)  $C^{-1}$
- (d)  $C^{-1}B^{-1}$

5. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & -3 \\ -16 & 7 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Man bestimme

(a)  $B^{-1}C^{-1}$

(b)  $(A^T)^{-1}$

(c)  $(A^{-1})^T$

6. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(a) Welche der Matrizen  $A, B, C$  sind orthogonal?

(b) Welche der Matrizen  $A, B, C$  sind symmetrisch?

(c) Man finde Parameter  $a$  und  $b$  so, dass die Matrix  $a \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & b \end{pmatrix}$  orthogonal wird.

7. Welche der folgenden Matrizen ist positiv oder negativ definit?

(a)  $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

(b)  $B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

(c)  $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(d)  $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

8. Sei  $A$  eine reelle symmetrische Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & \alpha \\ -2 & 6 & -1 \\ \alpha & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Für welche Werte von  $\alpha$  ist die Matrix positiv definit?

(b) Für  $\alpha = 0$  bestimme man Eigenwerte und Eigenvektoren

(c) Man bestimme die Determinante von  $A$

## Programmierbeispiele

9. Schreiben Sie ein Programm, das eine Matrix  $A$  und einen Vektor  $b$  aus zwei .csv Dateien einliest, und die Lösung des Gleichungssystems  $Ax = b$  ausgibt. Sie dürfen beliebige Octave Funktionen verwenden.

10. Schreiben Sie eine Funktion mit zwei Argumenten  $A$  und  $B$ , die das Matrix-Vektor bzw. Matrix-Matrix Produkt  $AB$  berechnet und das Ergebnis ausgibt. Bei inkorrekten Eingabewerten (zB. bei unpassenden Dimensionen) soll eine Fehlermeldung ausgegeben werden. Verwenden Sie den Operator  $*$  u.ä. allenfalls zur Kontrolle.