

UE Einführung in Numerical Computing

Übungsblatt 4

November 28, 2022

Rechenbeispiele

Bitte erstellen Sie - wo möglich - grafische Darstellungen!

31. Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = x + e^x - 2$$

Man bestimme die Nullstelle der Funktion (im Intervall $[0,1]$) durch Fixpunkt-Iteration, Startpunkt $x_0 = 0$

Hinweis: Prüfen Sie, ob die Voraussetzungen für die Fixpunktiteration erfüllt sind. Gegebenenfalls wird man die Voraussetzungen durch geeignete Transformationen herstellen

Bitte Skizzen anfertigen!

32. Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = x + e^x - 2$$

Man bestimme die Nullstelle der Funktion (im Intervall $[0,1]$) mit dem Newton-Verfahren, Startpunkt $x_0 = 0$

Bitte Skizzen anfertigen!

33. Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = x + e^x - 2$$

Man bestimme die Nullstelle der Funktion (im Intervall $[0,1]$) mithilfe des Bisektionsverfahrens.

Vergleiche das Ergebnis mit denen der beiden vorigen Beispiele (Fixpunkt, Newton)

Bitte Skizzen anfertigen!

34. Angenommen wir wollen eine iterative Methode entwickeln, um die Quadratwurzel einer gegebenen positiven Zahl y zu bestimmen

$$f(x) = x^2 - y = 0$$

Jede der unten gegebenen Funktionen g_1, g_2 gibt ein Fixpunktproblem, das zu obigem äquivalent ist. Bestimme für jede dieser Funktionen, ob die zugehörige Fixpunktiteration $x_{k+1} = g_i(x_k)$ lokal konvergiert, wenn $y = 3$ ist

- (a) $g_1(x) = y + x - x^2$
- (b) $g_2(x) = -1 + x + x^2/y$
- (c) Welche Funktion g würde die Newton-Methode für die Fixpunkt-Iteration hier angeben?

Bitte Skizzen anfertigen!

35. Gegeben ist folgendes Problem

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

- (a) Bestimme mit dem Newton-Verfahren zur Nullstellensuche ausgehend vom Startpunkt $x_0 = 1$ den Wert des nächstfolgenden Punktes x_1
- (b) Mit $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$ als Startpunkte bestimme den Punkt x_2 für das obige Problem mit der Sekanten Methode

Bitte Skizzen anfertigen!

36. Die Funktion $f(x) = x^4 - \frac{7}{3}x^2$ hat Nullstellen bei $x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

Zeige: Das Newton Verfahren konvergiert nicht, falls man bei $x_0 = 1$ startet (obwohl das in der "Nähe" der Nullstelle ist)

Bitte eine Skizze anfertigen!

37. (a) Man formuliere für folgendes System die Newton-Iteration

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{cases}$$

- (b) Führe die Newton-Iteration durch mit den Startpunkten $(1,0), (1,1), (0.5,0.5), (-0.5,0.5)$

38. Man führe folgende Minimierungsaufgaben auf Fixpunktaufgaben zurück

(a) $\frac{x^3 - x}{x^2 + 1} = \min$

(b) $(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (0, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \min$

Programmierbeispiele

39. Implementiere Bisektions- und Fixpunktverfahren, um folgende Probleme zu lösen

(a) $x^3 - 2x - 5 = 0$

(b) $e^{-x} = x$

(c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

40. Implementiere Newton- und Sekantenverfahren, um folgende Probleme zu lösen

(a) $x^3 - 2x - 5 = 0$

(b) $e^{-x} = x$

(c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$