Runde 7, Beispiel 44

LVA 118.181, Übungsrunde 7, 01.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 01.12.2006

1 Angabe

Man löse das nichtlineare RWP

$$yy'' + (y')^2 = 0 \qquad y(-1) = 0; y'(1) = 1$$

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Theoretische Grundlagen: Autonome Differentialgleichungen

Konkretes Anwendungsbeispiel: Nichtlineare Schwingungen. Die untenstehende, autonome (= von der Zeit t unabhängige) Differentialgleichung tritt z.B. immer dann auf, wenn die Zustandsänderung x'' einer skalaren Grösse x nur vom Zustand (x, x') und nicht von der Zeit t abhängt.
Lösungsverfahren für die autonome Differentialgleichung: $x'' = f(x, x')$, $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = v_0$:

1. Sämtliche Nullstellen η von $f(\eta, 0) = 0$ bestimmen. $x(t) = \eta$ ist jeweils partikuläre Lösung (Ruhelage)

2. Substitution $x' = v$, $x'' = v \cdot v'$ ergibt für $v(x)$ die Differentialgleichung

$$v \cdot v' = f(x, v)$$

3. Allgemeine Lösung $v(x) = v(x, c_1)$, $c_1 \in \mathbb{R}$ bestimmen

4. Anfangswertproblem c_1 aus $v_0 = v(x_0, c_1)$ berechnen

5. Allgemeine implizite Lösung ist

$$t + c_2 = \int \frac{d\xi}{v(\xi, c_1)}$$

6. Implizite Lösung des Anfangswertproblems:

$$t + c_0 = \int \frac{d\xi}{v(\xi, c_1)}$$

2.2 Randwertaufgaben

Definition: Treten in der Bestimmungsgleichung für die eindeutige Charakterisierung der Lösung einer DGL Auswertungen der gesuchten Funktion und deren Ableitungen nicht nur an einer Stelle (wie beim AWP), sondern an zwei Stellen $a \neq b$ auf, dann spricht man von einer **Randwertaufgabe (RWA)** bzw. von einem **Randwertproblem (RWP)**.
Allgemeines Prinzip zur Lösung von RWA/RWP:

- Auffinden der allgemeinen Lösung der gegebenen DGL (mit Parametern $c_1, c_2, \ldots, c_n$)
- Anpassen der Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ durch Einsetzen der Randbedingungen in die allgemeine Lösung

$\Rightarrow$ Gleichungssystem $c_1, c_2, \ldots, c_n$
Spezialfall: DGL ist linear und Randbedingungen sind auch Linear $\Rightarrow$ Lineares Gleichungssystem für $c_1, c_2, \ldots, c_n$.
Falls nichtlineare RWA/RWP, so ist das Problem i.A. wesentlich komplizierter.
Für die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \leq x \leq b, a < b$$

tritt meist eine der vier folgenden Randbedingungen auf:

(1)	$y(a) = r_1$	$y(b) = r_2$	1. Art
(2)	$y'(a) = r_1$	$y'(b) = r_2$	2. Art
(3)	$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = r_1$	$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = r_2$	3. Art
(4)	$y(a) = y(b)$	$y'(a) = y'(b)$	Period. Randbed.

$$(r_1, r_2, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$$

In (1),(2) und (3) treten in jeder Gleichung nur die Werte für ein Intervallende auf (Randbedingungen sind separier).
Fall (4) führt mit $T = b - a$ zu T-periodischen Lösungen, falls $f(x, y, y')$ ebenfalls T-periodisch in x ist.

3 Lösung des Beispiels

Wir überführen die Differentialgleichung in eine trennbare:

$$y' \cdot y = x, \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$y\ dx = c\ dx \qquad | \int$$

$$\frac{y^2}{2} = c_1 \cdot x + c_2$$

$$y = \sqrt{2xc_1 + 2c_2}$$

Einsetzen der Randbedingung $y(-1) = 0$ ergibt:

$$0 = \sqrt{2c_1 + 2c_2}$$

Daraus folgt, dass $c_1 = c_2$ gilt.
Einsetzen der Randbedingung $y'(1) = 1$:

$$y = \sqrt{2xc_1 + 2c_2}$$
$$y' = \frac{1}{2}(2xc_1 + 2c_2)^{-\frac{1}{2}} 2c_1$$
$$c_1 = c_2 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = c_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

$$\mathbf{y} = \sqrt{\mathbf{2}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\mathbf{c_1} + \mathbf{2}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}$$