Algebra und Diskrete Mathematik

WS 2016

Übungsgruppe L

Eigenthaler

Übungstest 1

Testgruppe A:

Aufgabe 1: Beweisen Sie die folgende Gleichung mit Hilfe von Elementtafeln oder geben Sie ein konkretes Gegenbeispiel an. (6P)

$$\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$$

Aufgabe 2: Man untersuche mittels vollständiger Induktion für welche $n \geq 0$ die folgende Ungleichung gilt. (8P)

$$6\mathrm{n} + 6 < 2^{\mathrm{n}}$$

Aufgabe 3: Man bestimme zwei ganze Zahlen x,y welche die Gleichung 165x + 126y = 3 erfüllen. (6P)

Testgruppe B: Werte anders – siehe Musterlösungen.

Summe: 20P

Folgend die Musterlösungen.

Lösung von Aufgabe 1

Vorbemerkung: Wir beweisen die Gleichungen mit Hilfe von Elementtafeln, wobei wir im Prinzip 8 Fälle unterscheiden. Dabei schreiben wir – für die jeweilige Menge M – 1 statt $x \in M$ und 0 statt $x \notin M$. Anders ausgedrückt: Wir tabellieren die „charakteristischen Funktionen" der betrachteten Mengen.

Gruppe A

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Gruppe B

A	B	C	$B \cap C$	$A \cup (B \cap C)$	$A \cup B$	$A \cup C$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Also gilt: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ und
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
da in der jeweiligen Gleichung die Mengen auf beiden Seiten der Gleichung <u>dieselben Elemente</u> haben.

Lösung von Aufgabe 2

Gruppe A

Die nebenstehende Tabelle legt die Vermutung nahe, dass die Ungleichung für $n \geq 6$ gilt, und beinhaltet zugleich den Induktionsanfang $n=6$.

n	$6n+6$	2^n
0	6	1
1	12	2
2	18	4
3	24	8
4	30	16
5	36	32
6	42	64

Wir kommen nun zum Induktionsschluss $n \to n+1$.

Voraussetzung: $6n+6 < 2^n$, $n \geq 6$.

Behauptung: $6(n+1)+6 < 2^{n+1}$.

Beweis: $6n+6 < 2^n \Longrightarrow 6(n+1)+6 = 6n+6+6 < 2^n+6 <$
$< 2^n + 2^n = 2^{n+1}$, da bereits für $n \geq 3$ gilt: $6 < 2^n$.

Somit haben wir die Ungleichung bewiesen:

$$6n+6 < 2^n, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq 6.$$

Gruppe B

Die nebenstehende Tabelle legt die Vermutung nahe, dass die Ungleichung für $n \geq 6$ gilt, und beinhaltet zugleich den Induktionsanfang $n=6$.

n	$8n+4$	2^n
0	4	1
1	12	2
2	20	4
3	28	8
4	36	16
5	44	32
6	52	64

Wir kommen nun zum Induktionsschluss $n \to n+1$.

Voraussetzung: $8n+4 < 2^n$, $n \geq 6$.

Behauptung: $8(n+1)+4 < 2^{n+1}$.

Beweis: $8n+4 < 2^n \Longrightarrow 8(n+1)+4 = 8n+4+8 < 2^n+8 \leq$
$\leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}$, da bereits für $n \geq 3$ gilt: $8 \leq 2^n$.

Somit haben wir die Ungleichung bewiesen:

$$8n+4 < 2^n, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq 6.$$

Lösung von Aufgabe 3

Gruppe A:

Wir bestimmen zunächst mit dem Euklidischen Algorithmus ggT(165, 126): $165 = 126 \cdot 1 + 39$, $126 = 39 \cdot 3 + 9$, $39 = 9 \cdot 4 + 3$, $9 = 3 \cdot 3 + 0 \Longrightarrow$ ggT(165, 126) = 3.

Weiters erhalten wir aus der Gleichungskette:

$$3 = 39 - 9 \cdot 4 = 39 - (126 - 39 \cdot 3) \cdot 4 = 39 \cdot 13 - 126 \cdot 4 =$$
$$= (165 - 126 \cdot 1) \cdot 13 - 126 \cdot 4 = 165 \cdot 13 + 126 \cdot (-17).$$

Probe: $165 \cdot 13 = 2145$, $126 \cdot 17 = 2142$.

Also hat die Gleichung $165x + 126y = 3$ die ganzzahlige Lösung $x = 13$, $y = -17$.

Gruppe B:

Wir bestimmen zunächst mit dem Euklidischen Algorithmus ggT(315, 190): $315 = 190 \cdot 1 + 125$, $190 = 125 \cdot 1 + 65$, $125 = 65 \cdot 1 + 60$, $65 = 60 \cdot 1 + 5$, $60 = 5 \cdot 12 + 0 \Longrightarrow$ ggT(315, 190) = 5.

Weiters erhalten wir aus der Gleichungskette:

$$5 = 65 - 60 \cdot 1 = 65 - (125 - 65 \cdot 1) = 65 \cdot 2 - 125 \cdot 1 =$$
$$= (190 - 125 \cdot 1) \cdot 2 - 125 \cdot 1 = 190 \cdot 2 - 125 \cdot 3 = 190 \cdot 2 - (315 - 190 \cdot 1) \cdot 3 =$$
$$= 190 \cdot 5 + 315 \cdot (-3).$$

Probe: $190 \cdot 5 = 950$, $315 \cdot 3 = 945$.

Also hat die Gleichung $315x + 190y = 5$ die ganzzahlige Lösung $x = -3$, $y = 5$.

Anmerkung: Der verwendete Algorithmus wird auch als „erweiterter" Euklidischer Algorithmus bezeichnet.