(1) [8 Punkte] Gegeben sind die folgenden Permutationen $\pi, \rho \in S_6$:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Man bestimme die Zyklendarstellungen von π und von ρ.
(b) Man bestimme weiters die Kompositionen $\tau_1 = \rho \circ \pi$ und $\tau_2 = \pi \circ \rho$, sowie das Inverse π^{-1}.
(c) Weiters ermittle man das Vorzeichen von π, also $\mathrm{sgn}(\pi)$.

Lösung:

(a) $\pi = (162)(35) = (35)(162)$

$\rho = (1264)(35) = (35)(1264)$

(b) $\tau_1 = \rho \circ \pi = (1264)(35)(35)(162) =$

$= (1264)(162) = (14)$

$\tau_2 = \pi \circ \rho = (162)(35)(35)(1264) =$

$= (162)(1264) = (46)$

$\pi^{-1} = ((162)(35))^{-1} = (35)^{-1}(162)^{-1} =$

$= (53)(261) = (35)(126) = (126)(35)$

(c) $\mathrm{sgn}(\pi) = \mathrm{sgn}((162)(35)) =$

$= \mathrm{sgn}(162) \cdot \mathrm{sgn}(35) =$

$= 1 \cdot (-1) = -1$

(2) [8 Punkte] Gegeben sei die algebraische Struktur $(G, \cdot)$, mit $G = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}_9 : \mathrm{ggT}(a, 9) = 1\}$, also die sogenannten primen Restklassen modulo 9 zusammen mit der Restklassenmultiplikation modulo 9.

(a) Man gebe die Operationstafel von $(G, \cdot)$ an. Weiters bestimme man das inverse Element von $\bar{4}$.

(b) Aus der Operationstafel ist sofort ersichtlich, dass $(G, \cdot)$ eine Gruppe bildet (es ist hier nicht verlangt, dies formal zu zeigen). Man bestimme nun alle Untergruppen von $(G, \cdot)$.

Hinweise:

- Offensichtlich ist $G = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}\}$.
- Der Satz von Lagrange erweist sich für Teil (b) als nützlich.

Lösung: Der Einfachheit halber lassen wir die Querstriche bei den Restklassen modulo 9 weg.
Die Operationstafel von G lautet dann:

(a)

$\cdot$	1	2	4	5	7	8
1	1	2	4	5	7	8
2	2	4	8	1	5	7
4	4	8	7	2	1	5
5	5	1	2	7	8	4
7	7	5	1	8	4	2
8	8	7	5	4	2	1

Daraus erkennt man:

$4^{-1} = 7.$

(b) Nach Lagrange ist für jede Untergruppe U deren Elementezahl $|U|$ ein Teiler von $|G| = 6$.
Für $|U| = 1$ und $|U| = 6$ erhält man die triviale Untergruppen: $U_1 = \{1\}$, $U_2 = G$.

Für $|U| = 2$ hat U die Form $\{1, x\}$ mit $x^2 = x \cdot x = 1$, also kommt nur $U_3 = \{1, 8\}$ in Frage.

Für $|U| = 3$ hat U die Form $\{1, x, y\}$ mit $x \cdot y = 1$, also kommen nur $\{1, 2, 5\}$ und $\{1, 4, 7\}$ in Frage. Wegen $2 \cdot 2 = 4 \notin \{1, 2, 5\}$ scheidet dies aus, und es bleibt nur die Untergruppe $U_4 = \{1, 4, 7\}$ mit der Operationstafel:

$\cdot$	1	4	7
1	1	4	7
4	4	7	1
7	7	1	4

(3) [4 Punkte = 2 · Anzahl vollständig richtiger Antworten]
Nachfolgend gegeben seien die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, sowie Vektoren $\vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \\ x \end{pmatrix}.$$

Man beantworte folgende Fragen durch Ankreuzen der richtigen Antwort(en):

Wie groß ist der Rang der Matrix A? ○ 0 ○ 1 ☒ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 oder größer
Für welche(n) Wert(e) von x sind die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig? ○ -3 ☒ -2 ○ -1 ○ 0 ○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ für keinen der oben angegebenen Werte

Anmerkung: Sie können selbstverständlich gesonderte Nebenüberlegungen anstellen, um dieses Beispiel zu lösen, aber für die Benotung dieser Frage ist nur relevant, was Sie hier in dieser Tabelle angekreuzt haben!

Lösung: Wir machen bei der Matrix A elementare Spalten-Umformungen und erhalten:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

Der Ansatz $\lambda \vec{b} + \mu \vec{c} = \vec{0}$ liefert das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -3\lambda + 6\mu &= 0 \\ -2\lambda + 4\mu &= 0 \\ \lambda + x\mu &= 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} \lambda - 2\mu &= 0 \\ \lambda + x\mu &= 0 \end{aligned}$$

Für $x = -2$ bleibt nur die Gleichung $\lambda - 2\mu = 0$ übrig und hat die Lösung $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Eine nicht-triviale Lösung ist z.B. $\lambda = 2$, $\mu = 1$, also sind in diesem Fall $\vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig.

Für $x \neq -2$ liefert eine Subtraktion die Gleichung $(x+2)\mu = 0$, woraus $\mu = 0$ und schließlich $\lambda = 0$ folgt. Also gibt es nur die triviale Lösung, und in diesem Fall sind $\vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig.