Exponentialfkt. und Logarithmus

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad e \approx 2.71828\ldots$$

Euler'sche Zahl

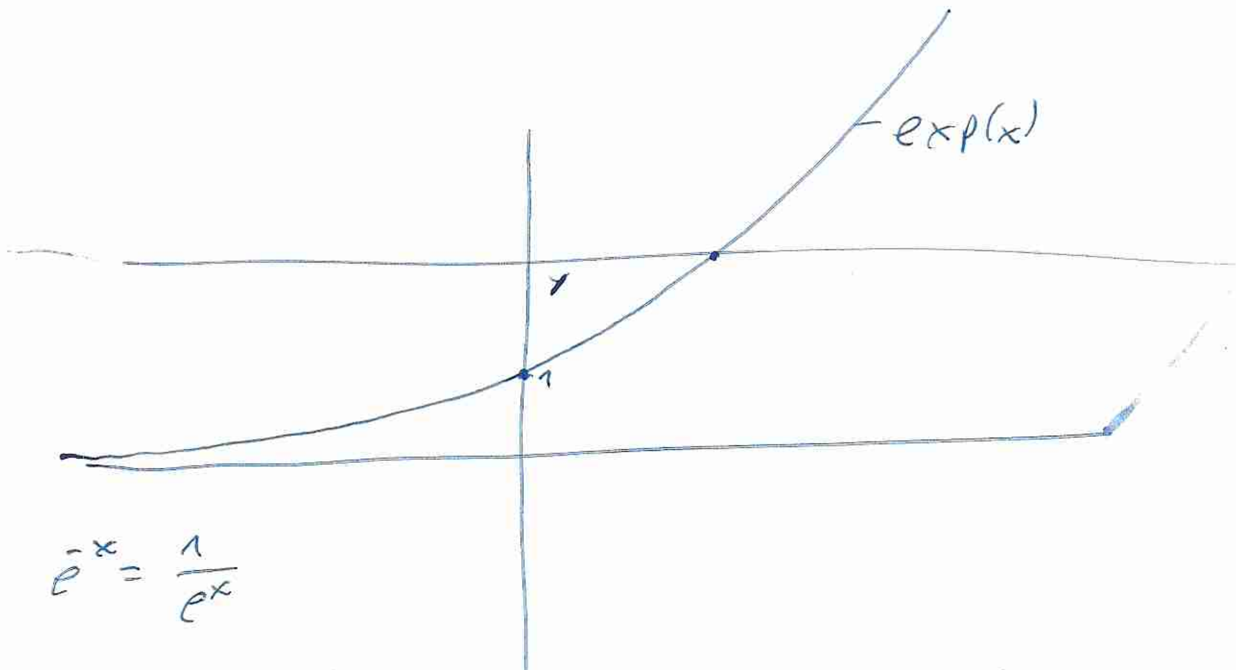
Def.: natürliche Exponentialfkt.

$$\exp(x) = e^x \qquad x \mapsto e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

allgemeine Exponentialfkt.

$$f(x) = a^x, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

↓ Basis



$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

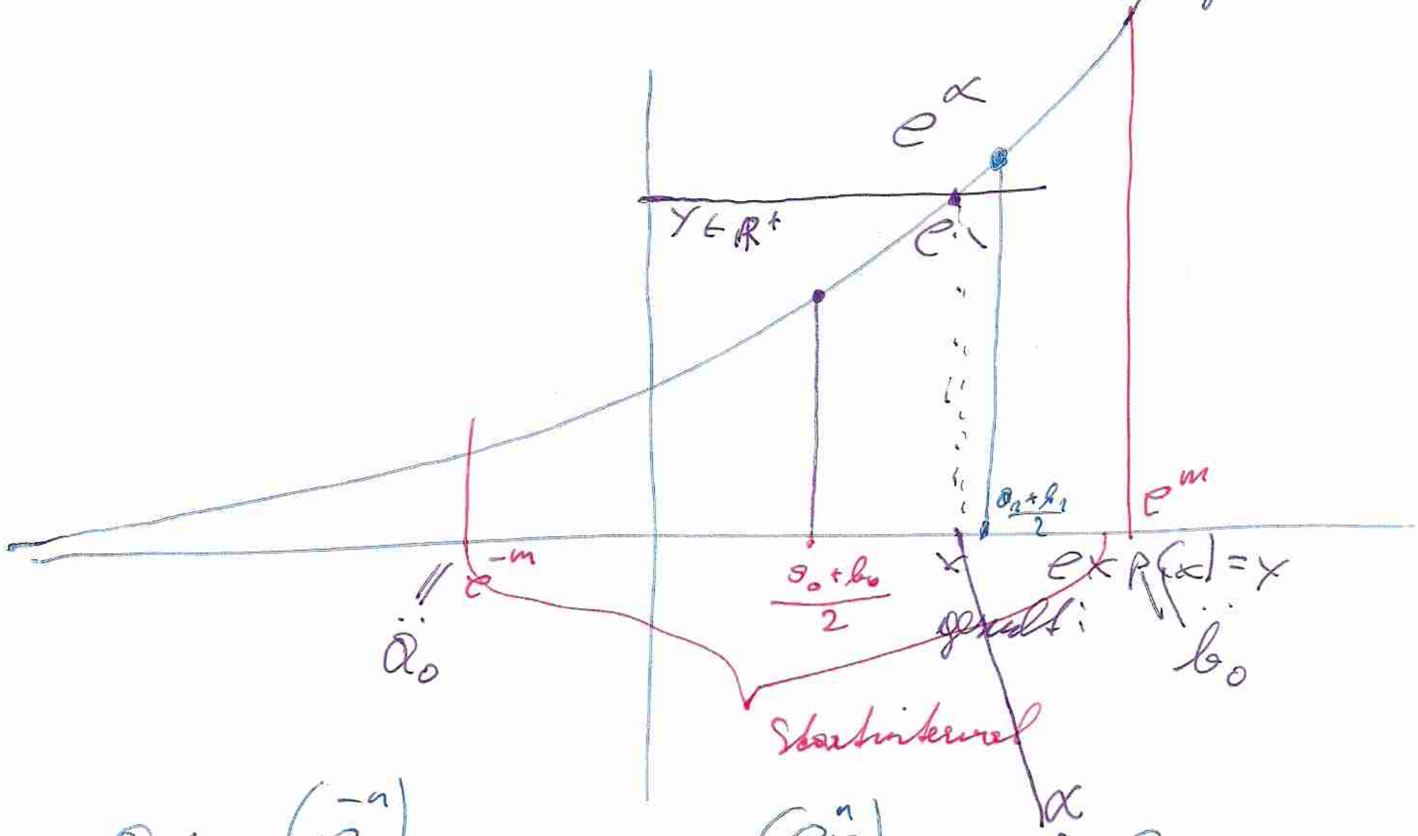
Satz:

$$\exp(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

ist <u>bijektiv</u>

- Injektiv: klar weil $\exp(x)$ str. mon. wachsend

Beweis Surjektiv: Idee: "Intervallhalbierung" für Beweis Surjektivität



$0 \xleftarrow[\text{mon.}]{} (e^{-n})_{n\geq 1}$ $\qquad (e^{n})_{n\geq 1} \xrightarrow[\text{mon.}]{} +\infty$

$$\Rightarrow \exists m : e^{-m} < y \leq e^{m}$$

Intervall $I_0 = [\underset{e^{-m}}{a_0}, \underset{e^{m}}{b_0}]$

$c_0 := \frac{a_0+b_0}{2}$ $\qquad$ bet. $\exp(c_0) = \exp\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)$

2 Fälle:

1.: $\exp(c_0) < y$

$\Rightarrow$ neues Intervall (x liegt im rechten Intervall.)

$$I_1 = [a_1, b_1] \quad a_1 = c_0, \quad b_1 = b_0$$

2.: $y \leq \exp(c_0)$

$\Rightarrow$ neues Intervall (x liegt im linken Int.)

$$I_1 = [a_1, b_1] \quad a_1 = a_0, \quad b_1 = c_0$$

$\Rightarrow$ Iterieren: Intervall I_1 halbieren

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

$\exp(c_1)$

$< y$ $\qquad$ $> y$

entsprechend updaten der Intervallgrenzen

$$e^{a_n} \longrightarrow e^{\alpha}$$

$$e^{b_n} \longrightarrow e^{\alpha}$$

$$\begin{tikzcd}
e^{a_n} \arrow[d] & \leq & y \arrow[d, equal] & \leq & e^{b_n} \arrow[d] \\
e^{\alpha} & & e^{\alpha} & & e^{\alpha}
\end{tikzcd}$$

Sandwich-Th.

---

2 Folgen

Folge · $(a_n)_n$ der linken Intervall-grenzen

· $(b_n)_n$ der ~~rechte~~ rechte Intervall-grenzen

a_n mon. wachsend

b_n mon. fallend

Intervalllänge $|b_n - a_n| = 2^{-n} \cdot |b_0 - a_0| \to 0$

a_n, b_n so gewählt, daß

$\exp(a_n) < y \;, \forall n$

$\exp(b_n) \geq y \;, \forall n$

$a_n \to \alpha$

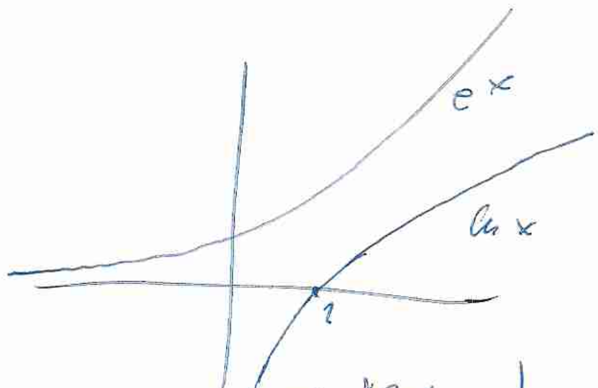
$\in \mathbb{R}$

$b_n \to \alpha$

$\exp(a_n) = e^{a_n} \to e^{\alpha} \leftarrow \exp(b_n) = e^{b_n}$ gerfen (Potenzk.)

$\Rightarrow$ Exponentialfkt. $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
besitzt Umkehrfkt.

heißt: natürlicher Logarithmus : $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$



$$y = \ln x$$
$$\Updownarrow$$
$$e^y = x$$

Rechenregeln (aus Rechenregeln für Exponentialfkt./Potenzen)

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(a^b) = b \cdot \ln a$$

---

allgemeine Exponentialfkt.: $x \mapsto a^x$, $a > 0$
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

besitzt ebenso Umkehrfkt.

$\Rightarrow$ Logarithmus zur Basis a : $\log_a x$

$$y = \log_a x \iff a^y = x$$

Umrechnen:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$a^y = e^{y \cdot \ln x}$$

Darstellung der Exponentialfkt. $x \mapsto \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^x$

Satz: Eigenschaften der Exponentialfkt. e^x

- $$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

  (Grenzwert einer Folge)

- $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

  (Potenzreihendarstellung)

- $$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

  (Funktionalglg.)

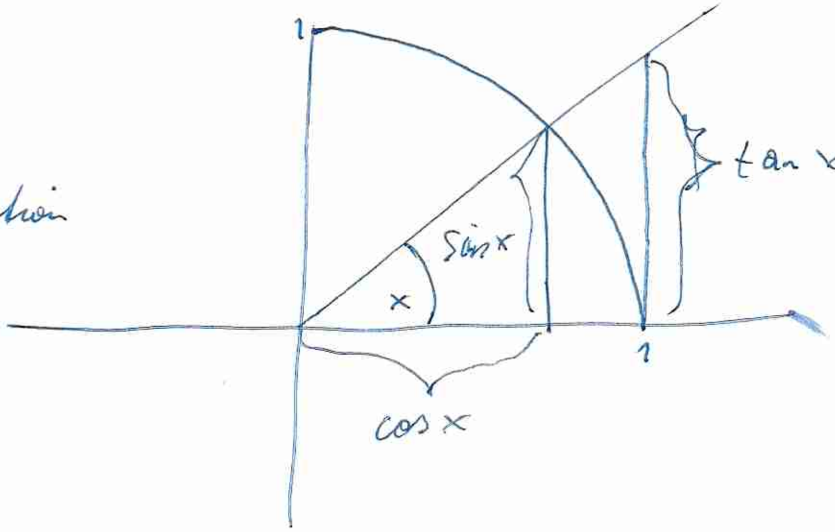
Winkelfkt. und Arcusfkt.

Sinus $\sin(x)$: 2π- per. Fkt.

Cosinus $\cos(x)$: 2π- per. Fkt.

Tangens $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

geometr. Interpretation



Potenzreihenentwicklung (aus Differentialrechnung, später)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots$$

$$= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8} - + \dots$$

$$= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad , x \in \mathbb{R}$$

Zusammenhang mit Exponentialfkt.:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + -$$

$$+ ix - i\cdot\frac{x^3}{3!} + i\cdot\frac{x^5}{5!} - i\cdot\frac{x^7}{7!} + - \ldots$$

$$= \cos x + i\cdot\sin x$$

Euler'sche Formel

$$e^{ix} = \cos x + i\cdot\sin x$$

Folgerungen

$$e^{ix}\cdot e^{iy}$$

$$\parallel$$

$$(\cos x + i\cdot\sin x)\cdot(\cos y + i\cdot\sin y)$$

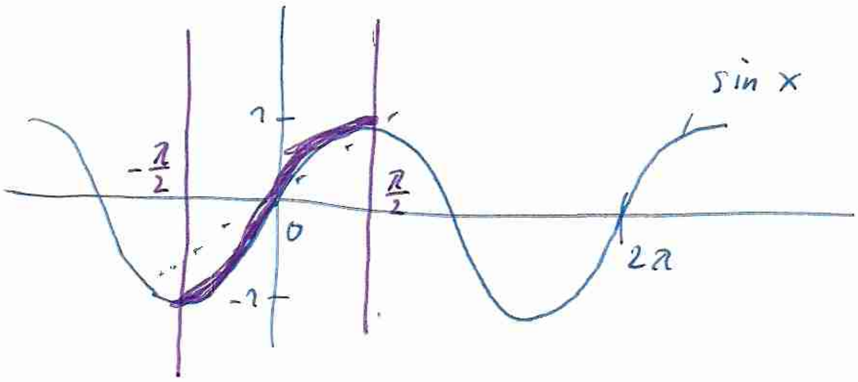
$$= (\cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y) + i(\sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y)$$

$$e^{i\cdot(x+y)}$$

$$\parallel$$

$$\cos(x+y) + i\cdot\sin(x+y)$$

Graph: $\sin(x)$

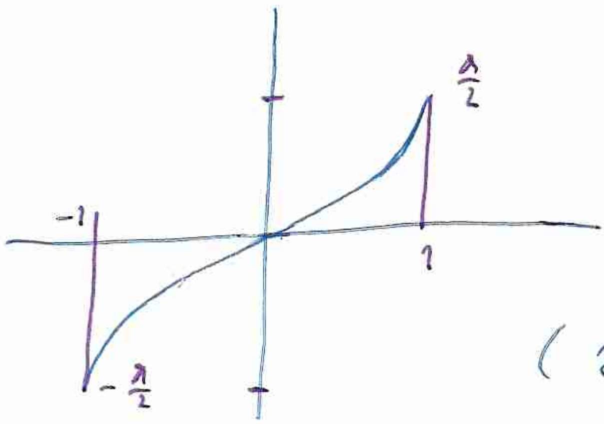


$\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$

- streng monoton wachsend
- bijektiv

$\Rightarrow$ Umkehrfkt.

$\text{Arcsin}\, x : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



(Hauptzweig des Arcussinus)

Analog cos(x) und tan(x):

$\cos(x): [0, \pi] \to [-1, 1]$

streng monoton fallend

bijektiv

$\Rightarrow$ Umkehrfkt.

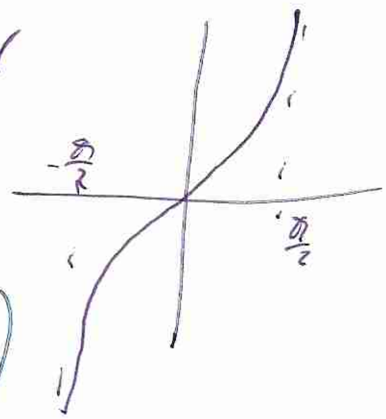
$\operatorname{Arccos}(x) : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$\tan x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

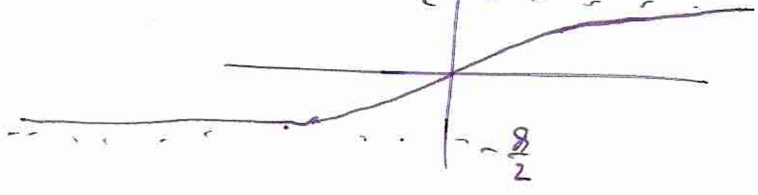
streng monoton wachsend

bijektiv

$\Rightarrow$ Umkehrfkt.



$\operatorname{Arctan}(x) : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



Def.: Elementare Fkt.:

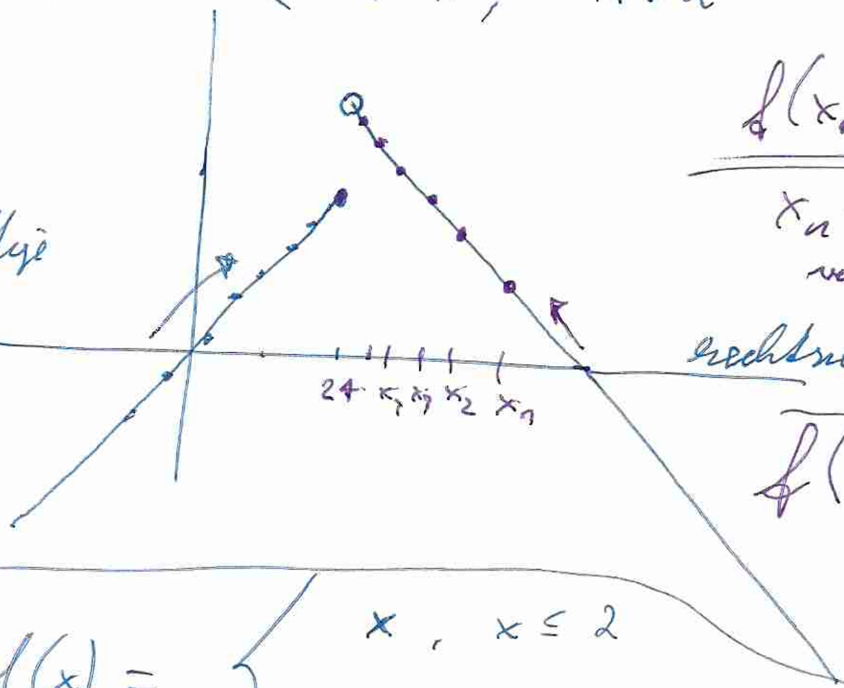
aus
- Polynomfkt.
- Logarithmusfkt.
- Exponentialfkt.
- Winkelfkt.
- Arcusfkt.
- Grundrechenarten
- Funktionskomposition (= Hintereinanderausführen von Abb.)

aufgebaut

Bsp.: $\sin\left(\sqrt[5]{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right) + x^3$

Grenzwerte von Fkt., Stetigkeit

Bsp.: $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 2 \\ 5-x, & x > 2 \end{cases}$



linksseitige Grenz

$f(x_n) \to 2$

$x_n \to 2$ von rechts

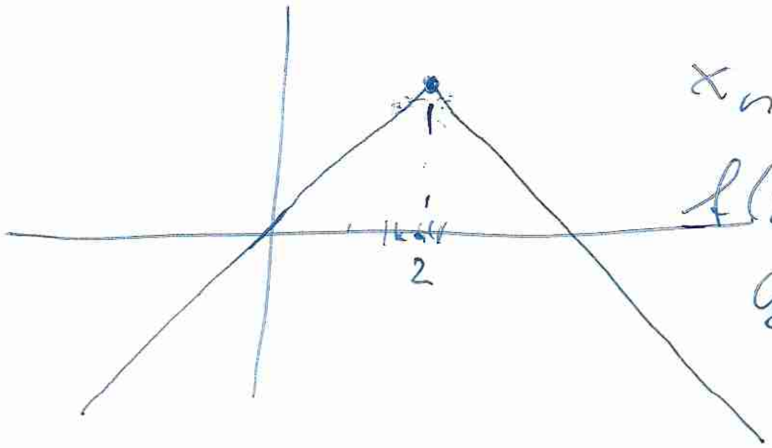
$\underline{f(x_n) \to 3}$

$x_n \to 2$ von rechts

rechtsseitige Grenzwert an Stelle 2

$f(2) = 2$

Bsp.: $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 2 \\ 4-x, & x > 2 \end{cases}$

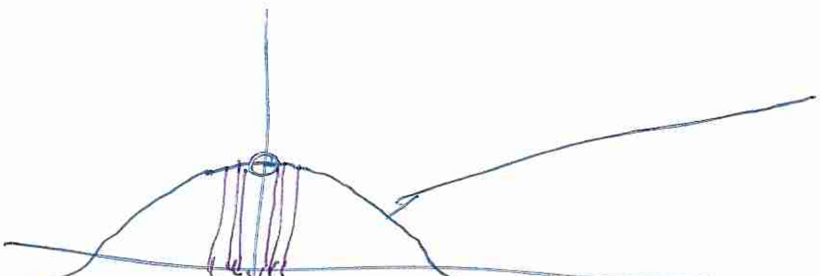


$x_n \to 2$

$f(x_n) \to 2$

Grenzwert
=
Funktionswert

$\frac{\sin x}{x}, \; x \neq 0$



$x_n \to 0,$
$x_n \neq 0$ $\Rightarrow f(x_n) \to 1$

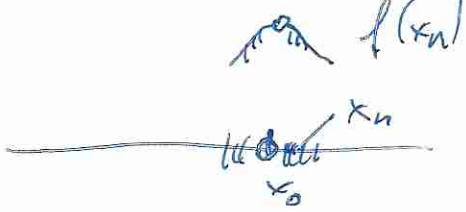
Grenzwert

Def.: $\underset{\subseteq \mathbb{R}}{f: D} \to \mathbb{R}$ besitzt an Stelle x_0

den Grenzwert c, falls:

für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \neq x_0$ und

$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$



$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$$

Notation: $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$

---

falls $c = +\infty$ oder $-\infty$

$\Rightarrow$ uneigentlicher Grenzwert an Stelle x_0

---

rechtsseitiger Grenzwert an Stelle x_0:

für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n > x_0$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

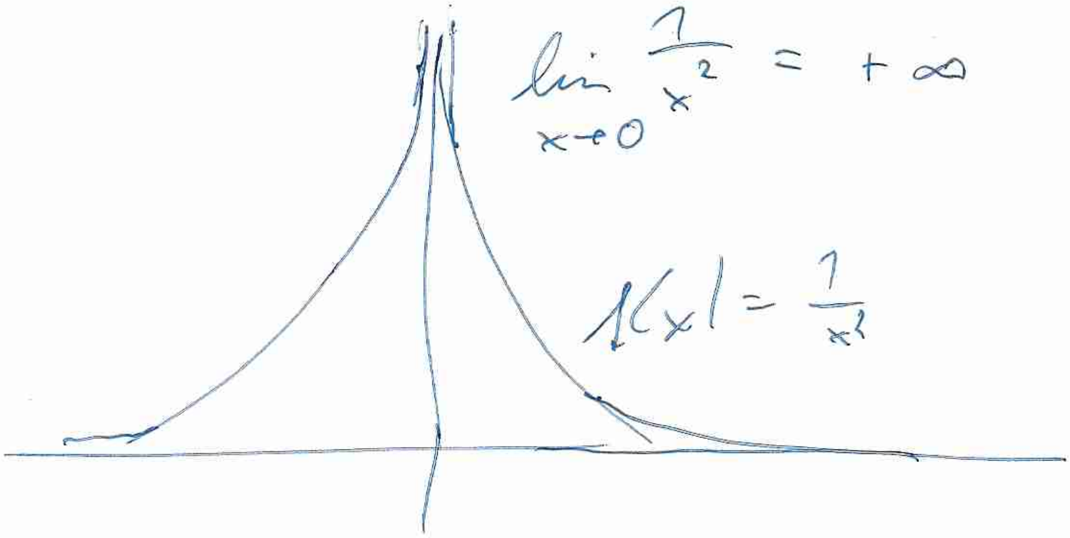
$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$$

Notation: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = c$

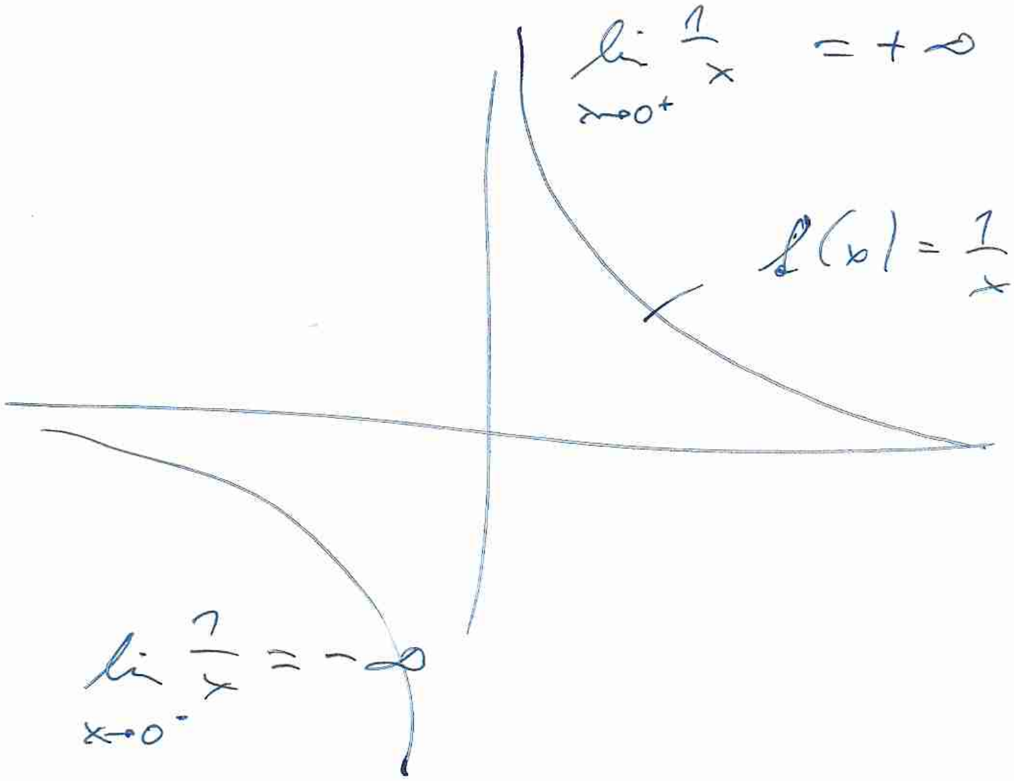
---

analog: linksseitiger Grenzwert, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = c$



$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

auch:

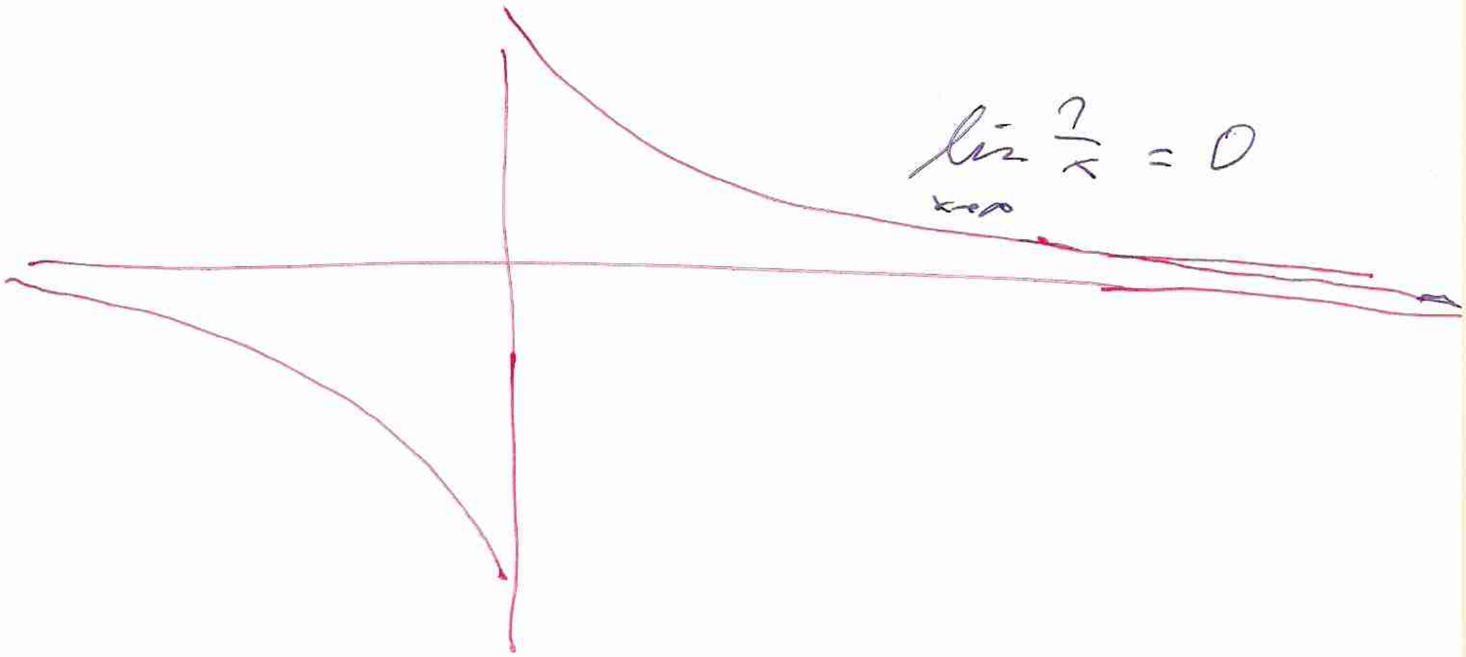
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = c$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$$

definiert via Folgen $(x_n)_n$, $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$

oder $\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$

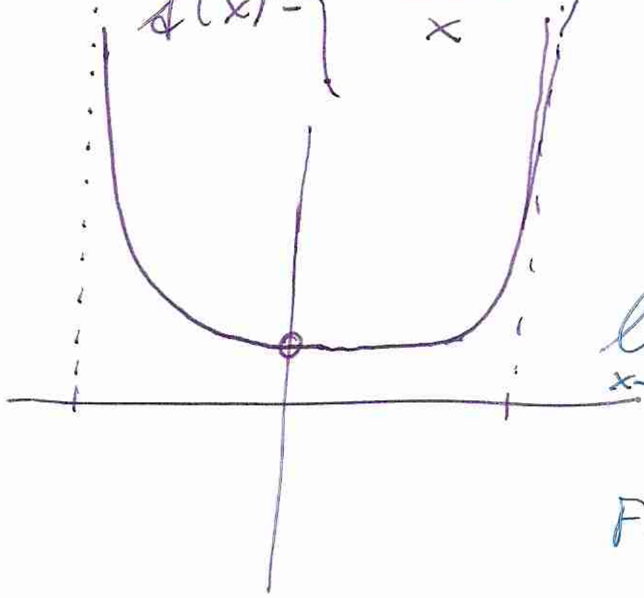
$f(x) = \frac{1}{x}$



Grenzwert:

- kann existieren, auch wenn Funktionswert nicht definiert
- muß nicht mit Funktionswert übereinstimmen

Bsp.: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan x}{x} & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\} \end{cases}$



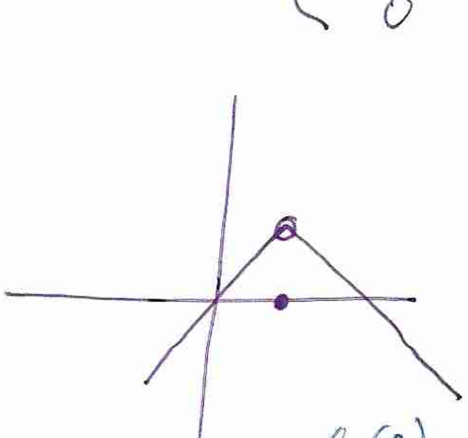
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

(läßt sich zeigen)

Fkt-wert NICHT def

an Stelle 0

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ 4-x, & x > 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$

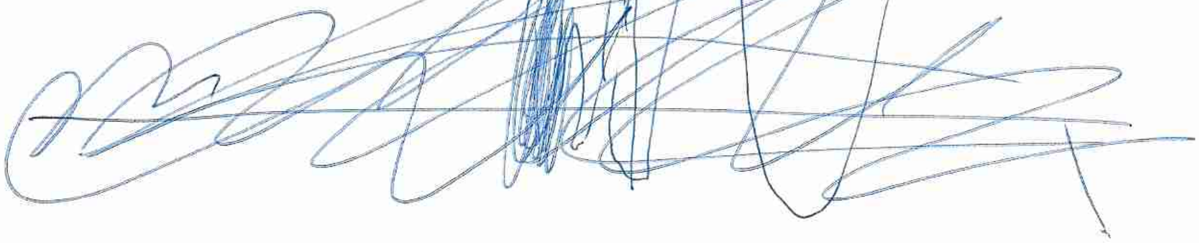


$f(2) = 0, \quad \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2$

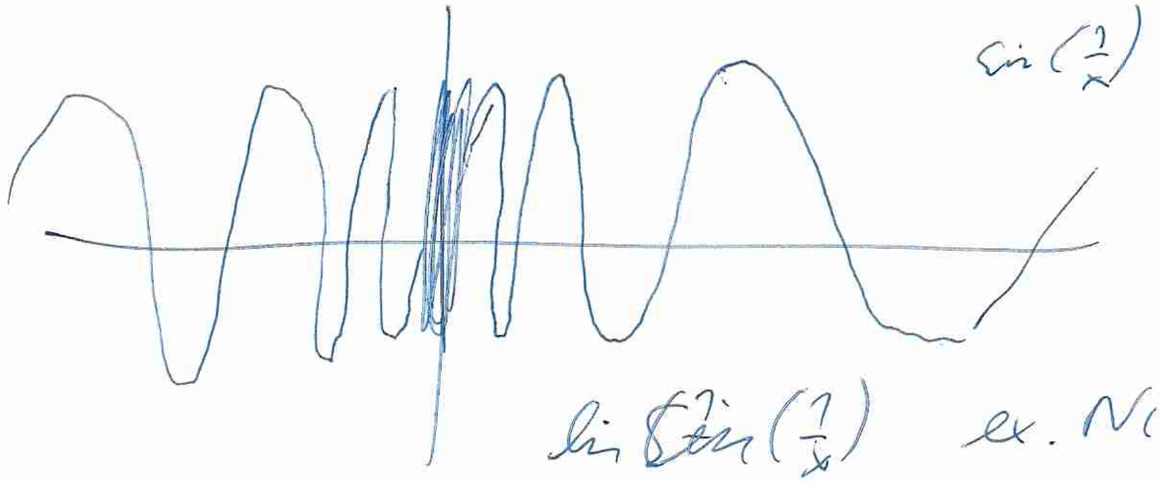
$\neq$

Bsp. $f(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x})$, $x \neq 0$

$\sin(\frac{1}{x})$



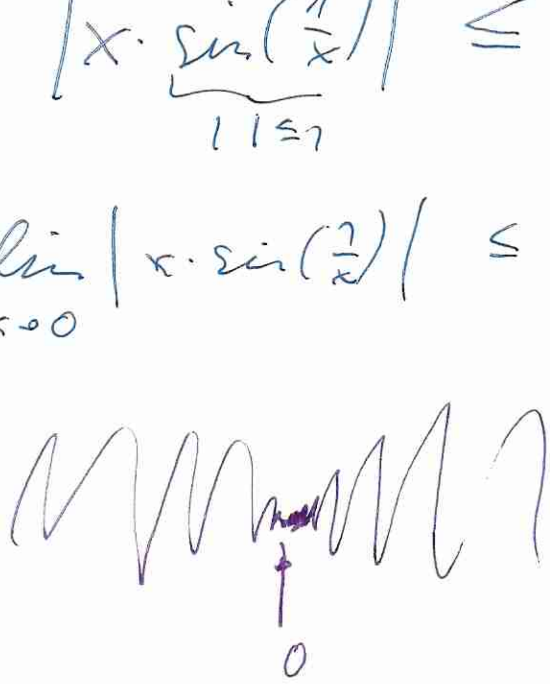
$\sin(\frac{1}{x})$



$\lim\limits_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x})$ ex. NICHT

$$\Big|x \cdot \underbrace{\sin(\tfrac{1}{x})}_{|\,| \leq 1}\Big| \leq |x|$$

$$\lim_{x \to 0} \Big|x \cdot \sin(\tfrac{1}{x})\Big| \leq \lim_{x \to 0} |x| = 0$$



UEBSP:

$$\lim_{x_n \to 1} \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim_{x_n \to 1} x_n}$$

$$\lim_{x_n \to x} f(x_n) = f\left(\lim_{x_n \to x} x_n\right)$$

falls Fkt f stetig

Def.: $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig

an Stelle $x_0 \in D$

falls: $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

Funktionswert = Grenzwert

an Stelle x_0

$f(x)$ stetig in D, falls f an jeder

Stelle $x_0 \in D$ stetig ist

Stetigkeit: Grenzwertbildung mit

Funktionsauswertung

vertauschbar

$$f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

„salopp“: stetige Fkt. kann ohne Stift abzusetzen

gezeichnet werden

Def: Alternative Def. Stetigkeit:

$f: D \to \mathbb{R}$ stetig an Stelle $x_0 \in D$, falls:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$