Bsp. $\displaystyle\int \frac{\overbrace{x^3-3x^2+5x}^{P(x)}}{\underbrace{x^3-3x^2+4}_{Q(x)}}\cdot dx$

- $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3-3x^2+5x+4-4}{x^3-3x^2+4} =$$

$$= \frac{x^3-3x^2+4}{x^3-3x^2+4} + \frac{5x-4}{x^3-3x^2+4} =$$

$$= 1 + \frac{5x-4}{x^3-3x^2+4} \qquad = \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$\deg R < \deg Q$

- $x^3-3x^2+\underline{4}$

$-1-3+4=0 \qquad x=-1$ Lsg. $x_1=-1$

$(x^3-3x^2+4) : (x+1) = x^2-4x+4$

$$\begin{array}{l}
-x^3-x^2 \\
\hline
0-4x^2 \\
\quad +4x^2+4x \\
\hline
\quad 0+4x+4 \\
\qquad -4x-4 \\
\hline
\qquad 0 \; R
\end{array}$$

$x^2-4x+4=(x-2)^2$

$x_2=2$

$x_3=2$

$$\frac{5x-4}{(x-2)^2\cdot(x+1)} = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 1 + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} - \frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\cdot dx = \int 1\cdot dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx + 2\cdot\int\frac{1}{(x-2)^2}\,dx$$

$$\boxed{\int \frac{1}{u^2}\,du = \frac{u^{-1}}{-1} + C} \qquad - \int \frac{1}{x+1}\cdot dx =$$

$$= x + \ln|x-2| + 2\cdot\frac{(x-2)^{-1}}{-1} - \ln|x+1| + C$$

$$= x + \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} - \ln|x+1| + C$$

$$Q(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)\cdot(x-2)^2$$

$$\frac{5x-4}{x^3-3x^2+4} = \frac{5x-4}{\underline{(x-2)^{2}}\cdot\underline{(x+1)^{1}}}$$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+1} \quad \Big| \cdot \overset{(x-2)^2\cdot(x+1)}{\overset{\shortparallel}{Q(x)}}$$

A, B, C unbekannt

$$5x-4 = A\cdot(x-2)\cdot(x+1) + B\cdot(x+1) + C\cdot(x-2)^2$$

- ein Mögl. A, B, C zu best.: ausmultiplizieren & Koeff.-vgl.

- $x=2$: $6 = 0 + 3B + 0 \Rightarrow B = 2$
- $x=-1$: $-9 = 0 + 0 + 9C \Rightarrow C = -1$
- $x=0$: $\cancel{-4} = -2A + B + 4C =$

$$= -2A + 2 \cancel{-4}$$

$$2A = 2 \Rightarrow A = 1$$

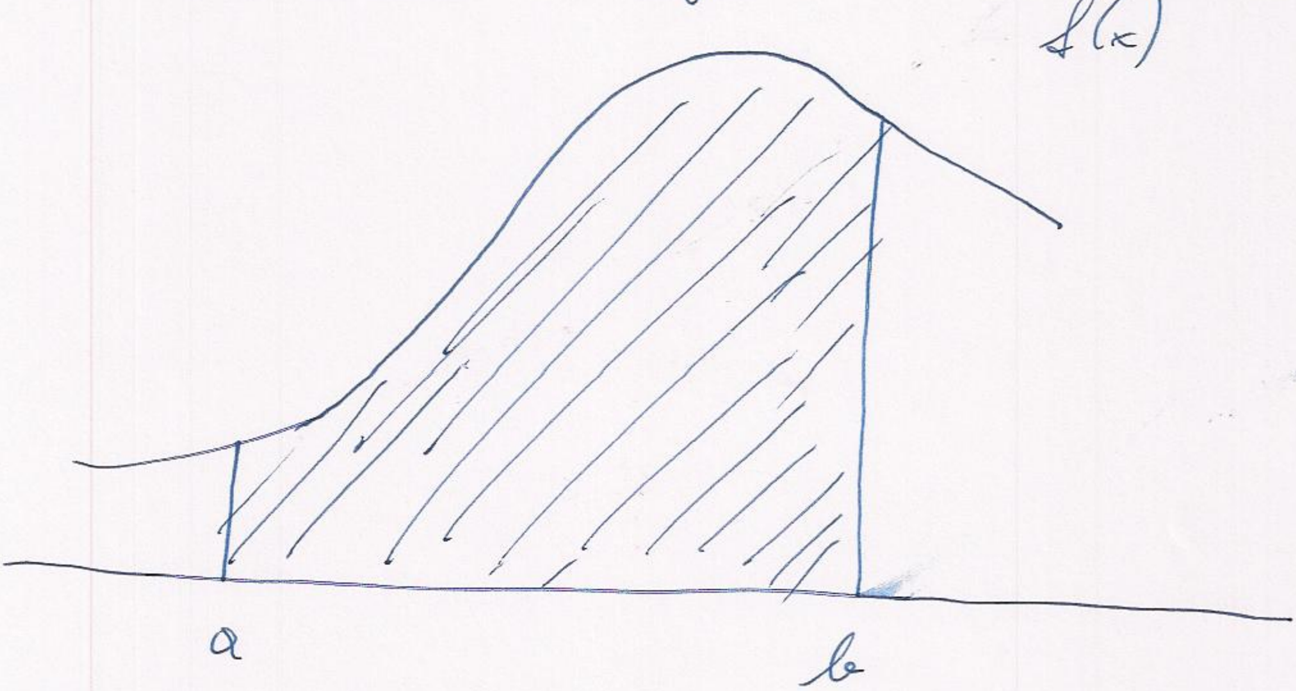
$$\frac{1}{(x^2+1)^2 \cdot (x-1)} =$$

$$= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{E}{x-1}$$

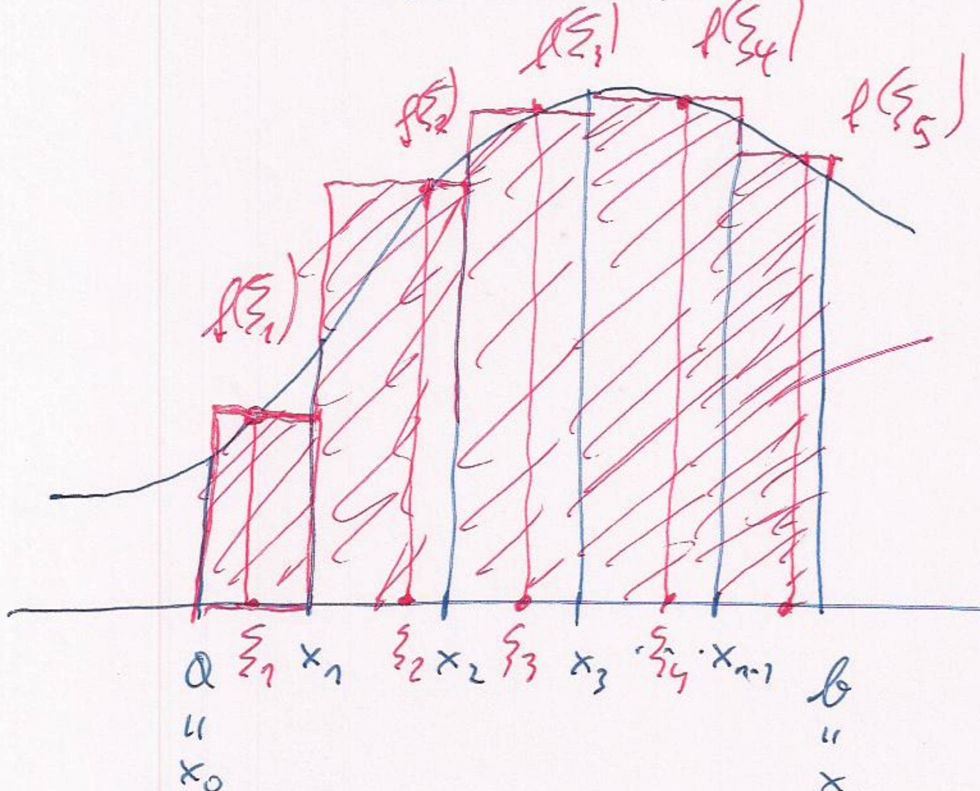
$$\int \frac{x}{x^2+1} \cdot dx = \frac{1}{2} \ln |x^2+1|$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \ln |f(x)| + C$$

Bestimmtes Integral



Ziel: Fläche unterhalb Fkt. f(x) zu bestimmen (im Intervall [a, b])



$$S_n = f(\xi_1)\cdot(x_1 - x_0) + f(\xi_2)\cdot(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)\cdot(x_n - x_{n-1})$$

- Zerlegung in Teilintervalle $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$
- Auswerten der Fkt. an Zwischenstelle $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
- Summe $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1})$

Def.:

- $$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})}$$

heißt <u>Riemann'sche Zwischensumme</u>

S_n ist "Näherung" für Fläche unter Fkt. $f(x)$ auf $[a, b]$

- Unterteilungspunkte $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

$\Rightarrow$ <u>Zerlegung</u> des Intervalls $I = [a, b]$ in Teilintervalle $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$

- Länge des längsten Teilintervalls einer Zerlegung Z heißt <u>Feinheit der Zerlegung</u>: $F(Z)$

Def.: $I = [a, b]$, $f: I \to \mathbb{R}$.

Falls:

jede Folge von Riemann'schen Zwischen=

summen $$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

für die Feinheit $F(Z_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$,

konvergiert gegen den selben Grenzwert

$\Downarrow$

Integrationsgrenzen

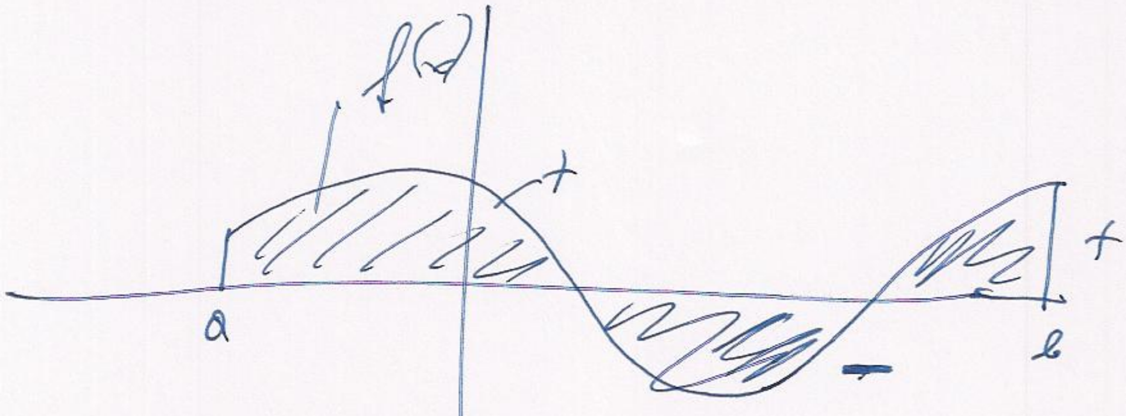
$$\boxed{\lim_{n \to \infty} S_n = \int_a^b f(x) \cdot dx}$$

Integrationsvar.

Bestimmtes Integral von f auf $[a, b]$

$f(x)$ heißt dann integrierbar

$a > b$: $$\int_a^b f(x) \cdot dx = - \int_b^a f(x) \cdot dx$$



$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$$

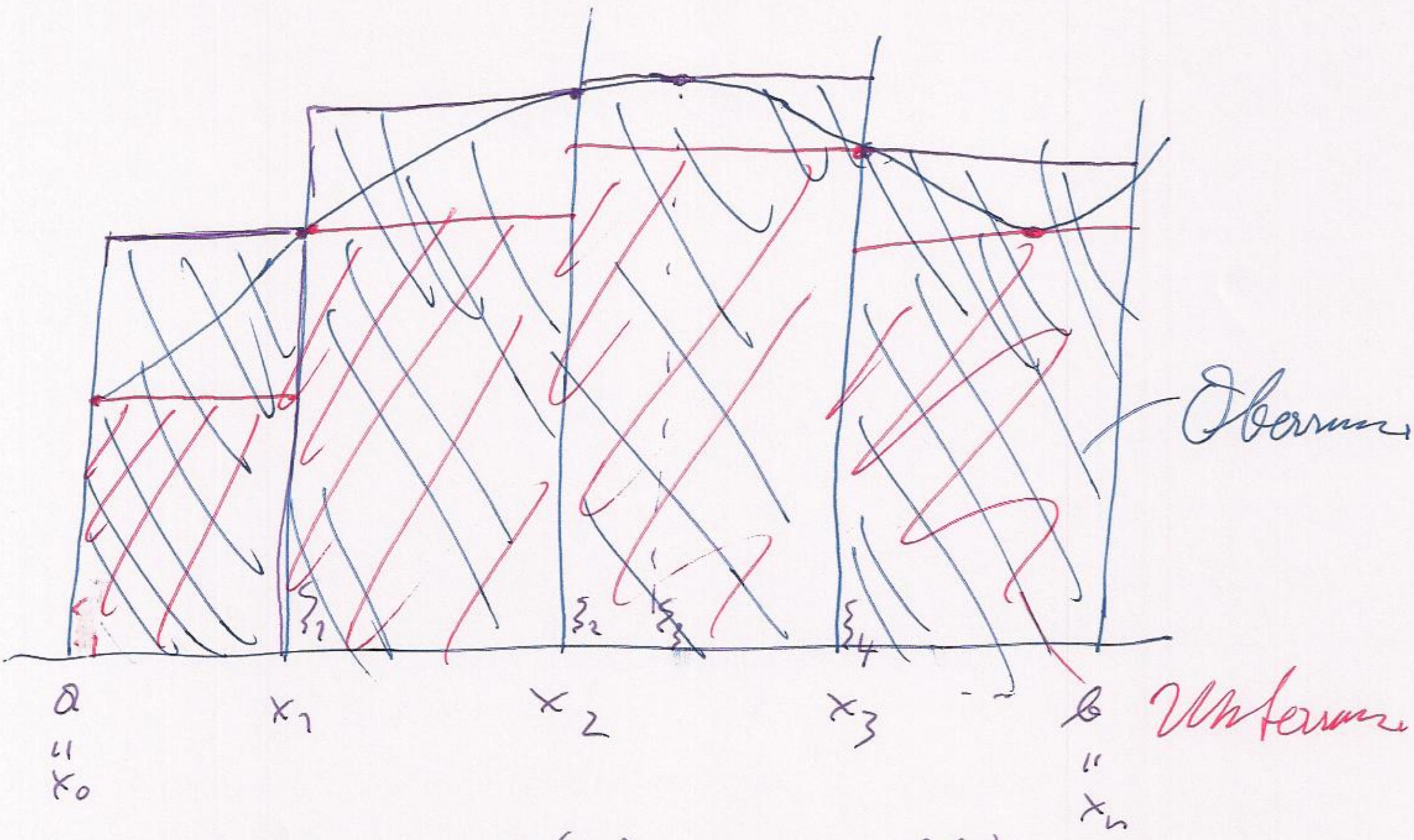
Bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)\,dx$:

Fläche zwischen Graph von f und x-Achse,

oberhalb x-Achse: +

unterhalb x-Achse: −

Spezielle Wahl der Zwischenstellen ξ_i bei Riemann'scher Zwischensumme



$$\xi_i : f(\xi_i) = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$\Rightarrow$ Obersumme $O(f)$

$$\xi_i : f(\xi_i) = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$\Rightarrow$ Untersumme $U(f)$

Satz (Riemann'sches Integrabilitätskriterium).

f auf $[a,b]$ integrierbar

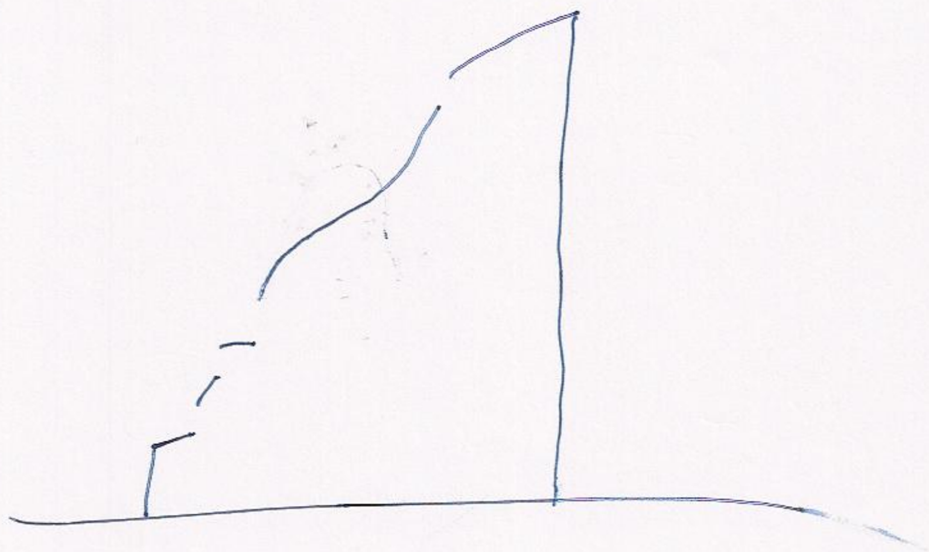
$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists$ Zerlegung Z von $[a,b]$:

$$\underbrace{O_Z(f)}_{\text{Obersumme}} - \underbrace{U_Z(f)}_{\text{Untersumme}} < \varepsilon$$

Welche Funktionen sind sicher integrierbar?

Satz: Jede auf $[a, b]$ monotone Funktion ist integrierbar.

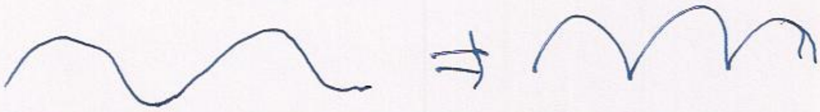


Satz: Jede auf $[a,b]$ stetige Funktion ist integrierbar.

Satz: f auf $[a,b]$ integrierbar

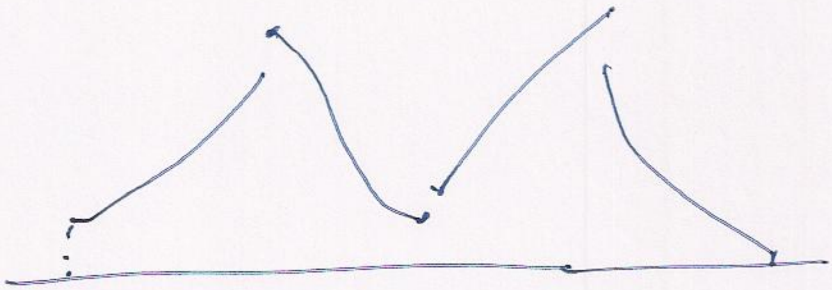
$$\Downarrow$$

$|f|$ auf $[a,b]$ integrierbar



---

auch: stückweise stetige Fkt.



- endlich viele Unstetigkeitsstellen
- alle Unstetigkeitsstellen sind Sprungstellen