

1. Gegeben seien folgende lineare Abbildungen:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$h\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

- (a) Bilden Sie die Funktion $h \circ f$!
Hinweis: z.B. $(a \circ b)(x) = a(b(x))$; $x \in \mathbb{R}^n$, n ist entsprechend zu wählen.
- (b) Bilden Sie die Funktion $f \circ h$!
- (c) Ist die Funktion $f \circ g \circ h$ invertierbar?
(Stichhaltige Begründung)
- (d) Berechnen Sie die Umkehrfunktion $g^{-1}(y)$ der Funktion $g(x)$
mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus exakt!

(3) 1

(3) 0

(3) 0

(3) 0

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

f h

c)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 19 & 2 \end{bmatrix}$$

f g f*g h f*g*h

Det A = $\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 19 & 2 \end{bmatrix} = 20 - 95 = -75 \neq 0$ invertierbar!

d)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Angabe

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

I und II
vertauschen

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

II - I

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

I + II

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

II + 2*I

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & -2 & 2 \end{array} \right]$$

III - 2*II

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & 2/5 & -2/5 \end{array} \right]$$

III/5

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & 2/5 & -2/5 \end{array} \right]$$

II - 3*III

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6/5 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & 2/5 & -2/5 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1,2 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 1 & 0 & 0,2 & -0,2 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 & 0,6 & 0,4 & -0,4 \end{array} \right]$$

I - 2*III

2. Auf der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ ist die Verknüpfungsoperation $\otimes$ durch folgende Tabelle gegeben:

$\otimes$	1	2	3	4
(a) a	4	3	2	1
(b) b	3	4	1	2
(c) c	2	1	4	3
(d) d	1	2	3	4

In dieser Tabelle sind die fehlenden Elemente so einzusetzen, dass aus $(\{1, 2, 3, 4\}, \otimes)$ eine Gruppe wird.

- (a) Was ist das neutrale Element dieser Gruppe?
 (b) Ist die Gruppe kommutativ? (Begründung!)
 (c) Bestimmen Sie die inversen Elemente zu den Elementen 1, 2, 3 und 4.
 (d) Bildet die Menge $\{3, 4\}$ versehen mit der Verknüpfungsoperation $\otimes$ aus obiger Tabelle eine Gruppe? (Stichhaltige Begründung!)
 (e) Bildet die Menge $\{2, 3, 4\}$ versehen mit der Verknüpfungsoperation $\otimes$ aus obiger Tabelle eine Gruppe? (Stichhaltige Begründung!)

(2) 2
 (2) 0
 (3) 3
 (3) 3
 (2) 2

a)

Das neutrale Element ist: 4

$$\begin{aligned} a * 1 &= 4 & (1=a) \\ b * 2 &= 4 & (2=b) \\ c * 3 &= 4 & (3=c) \\ d * 4 &= 4 & (4=d) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} a \otimes 2 &= b \otimes 1 & a \otimes 3 &= c \otimes 1 & a \otimes 4 &= d \otimes 1 \\ 3 &= 3 & 2 &= 2 & 1 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \otimes 3 &= c \otimes 2 & b \otimes 4 &= d \otimes 2 & c \otimes 4 &= d \otimes 3 \\ 1 &= 1 & 2 &= 2 & 3 &= 3 \end{aligned}$$

Ja. (man muss fuer alle Elemente pruefen!)

c)

$$a * a' = e = a' * a$$

$$\begin{array}{llll} a * 1 = 4 & b * 2 = 4 & c * 3 = 4 & d * 4 = 4 \\ 4 = 4 & 4 = 4 & 4 = 4 & 4 = 4 \\ a' \text{ ist inverse zu } 1 & b' \text{ ist inverse zu } 2 & c' \text{ ist inverse zu } 3 & d' \text{ ist inverse zu } 4 \end{array}$$

d)

$\otimes$	1	2	3	4
a	4	3	2	1
b	3	4	1	2
c	2	1	4	3
d	1	2	3	4

e)

$\otimes$	1	2	3	4
a	4	3	2	1
b	3	4	1	2
c	2	1	4	3
d	1	2	3	4

d) Ja, weil wir nur 3,4 Elemente haben.

$$c \times 3 = 4$$

$$d \times 3 = 3$$

$$c \times 4 = 3$$

$$d \times 4 = 4$$

$$\in \{3,4\}$$

e) Nein, weil wir auch 1 Elemente drinnen haben.

$$b \times 3 = 1$$

$$c \times 2 = 1$$

$$\notin \{2,3,4\}$$

3. Gegeben ist das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 8 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 10 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & & & = & 20 \end{array}$$

- (a) Lösen Sie dieses Gleichungssystem. Notieren Sie die Lösung in Parameterform! (4)
- (b) Ermitteln Sie die Lösung des mit obigen Gleichungssystem korrespondierenden homogenen Gleichungssystems. Notieren Sie die Lösung ebenfalls in Parameterform! (2)
- (c) Welche Dimension hat der Lösungsraum (die Lösung) dieses Gleichungssystems? (2)
- (d) Ist die Koeffizientenmatrix A des Gleichungssystems invertierbar? (2)
(Stichhaltige Begründung)
- (e) Durch die Koeffizientenmatrix A des Gleichungssystems ist eine lineare Funktion $f_A(x) = Ax$ definiert. Welche Dimension hat der Kern dieser Abbildung, welche Dimension hat ihr Bild (Image)? (2)
(Nachvollziehbare Argumentation)