6 Differential- & Integralrechnung in mehreren Variablen

Rot: wurde schonmal geprüft

Differentialrechnung in mehreren Variablen S.249

Partielle Ableitung, Satz von Schwarz, ...

Totale Ableitung, Jacobi-Matrix, Gradient

Ableitungsregeln, Hauptsatz über implizite Funktionen

Richtungsableitung

Taylorentwicklung, Hesse-Matrix

by Hasan

Bestimmung von Extrema S.258

Lokale Extrema

Extrema mit Nebenbedingungen (Lagrange'sche Multiplikatoren)

Integralrechnung in mehreren Variablen S.265

Bereichsintegrale ✗

Kurven ✗

Krümmung ebener Kurven

Vektorfeldes & Stammfkt. ✗

8 Fourier-Analyse sicher Eigenschaften, Rechenregeln & Beweise dieser

Fourier-Reihen S.361

trigonom. Reihe, Rechenregeln, Konvergenz

Bessel-Ungleichung, Parseval'sche Glg.

by Phil

Diskrete Fourier-Transformation S.379

Fourier-Koeffizienten, Fourier-Matrix

DFT, IDFT, Rechenregeln, FFT

Fourier-Transformation S.386

by Jonas

CHW, Rechenregeln, Konvergenzsatz

Abtasttheorem S.394

by Jakob

by Phil

by Boris

by Mara

6.2 Differentialrechnung in mehreren Variablen

Jacobi-Matrix

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Funktion $f: D \to \mathbb{R}^m$ heißt im Punkt $x_0 \in D$ **total differenzierbar**, falls eine lineare Abbildung $f': \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

existiert, sodass:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + \vec{f}'(\vec{x} - \vec{x}_0) + \vec{R}(\vec{x})$$

gilt, und Rest $\vec{R}(\vec{x})$ die Bedingung

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|\vec{R}(\vec{x})\|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0$$

gilt. $\vec{f}'$ heißt Ableitung von $\vec{f}$ im Punkt $\vec{x}_0$, die dazugehörige Matrix A heißt

Jacobi-Matrix / Funktionalmatrix.

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{x}_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$:
$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \\ \vdots \\ f_m(x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_{0,1} \\ \vdots \\ x_n - x_{0,n} \end{pmatrix} + \vec{R}(x_1, \dots, x_n)$$

Gradient

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion. $\Rightarrow$ **grad** $f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Allgemein: f total differenzierbar $\Rightarrow f$ stetig
$\Rightarrow f$ partiell differenzierbar

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f: D \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion

$\Rightarrow$ **Matrix der Ableitung** von f = **grad f**, also gilt für $\vec{x}, \vec{x}_0 \in D$:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \text{grad}\, f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + R(\vec{x}), \quad \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{R(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0$$

Ableitungsregeln

Produktregel: $h(\vec{x}) = f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} h(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) \cdot \operatorname{grad} g(\vec{x}_0) + g(\vec{x}_0) \cdot \operatorname{grad} f(\vec{x}_0)$$

Kettenregel: $\vec{g}(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$, $F(x) = f(\vec{g}(x))$

$$\Rightarrow F'(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(g_1(x), \dots, g_n(x)) \cdot g_i'(x)$$

Leibniz'sche Notation: $\frac{dF}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial g_i} \cdot \frac{dg_i}{dx}$

Bsp:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Änderung von f in Polarkoordinaten statt kartesischen Koordinaten?

$x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$ $\Rightarrow F(r,\varphi) = f(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) = f(r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi)$

$$F_r = f_x \cdot x_r + f_y \cdot y_r = f_x \cdot \cos\varphi + f_y \cdot \sin\varphi$$

$$F_\varphi = f_x \cdot x_\varphi + f_y \cdot y_\varphi = -f_x \cdot r \cdot \sin\varphi + f_y \cdot r \cdot \cos\varphi$$

$$(F_r \quad F_\varphi) = (f_x \quad f_y) \cdot \begin{pmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{pmatrix}$$

Hauptsatz über implizite Funktionen:

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $F: D \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar, $F(x_0,y_0) = 0$, $F_y(x_0,y_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists$ $\underset{U}{\text{Umgebung}}$ von (x_0,y_0): $F(x,y) = 0$ hat in U eine eindeutig bestimmte Lösung $y(x)$.

$y(x)$ ist stetig diff.bar und es gilt:

$$y'(x) = -\frac{F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))}$$

Richtungsableitung:

Ziel: Partielle Ableitungen geben den Anstieg von f entlang der durch die Koordinatenachsen bestimmten Richtungen an. Wir wollen entlang beliebiger Richtungen ableiten!

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ skalarwertig, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ normiert (d.h. $\|\vec{v}\| = 1$). Richtungsableitung von f an Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ nach $\vec{v}$ ist:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t \cdot \vec{v}) - f(\vec{x})}{t} = f_{x_1}(\vec{x}) \cdot v_1 + \dots + f_{x_n}(\vec{x}) \cdot v_n = \operatorname{grad} f(\vec{x}) \cdot \vec{v}$$

Richtung des größten Anstiegs ist genau die Richtung von grad f!

grad $f = \vec{0}$ $\Rightarrow$ Alle Richtungsableitungen sind 0.

Satz von Taylor:

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ auf D $(n+1)$-mal stetig diff.bar, (x_0, y_0) & $(x,y) = (x_0 + t \cdot h, y_0 + t \cdot k)$ sind 2 Punkte in D, deren Verbindungsstrecke in D liegt.

$$\Rightarrow \exists\, \xi \in (0,1): \quad f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{(h \cdot D_x + k \cdot D_y)^\ell \cdot f(x_0,y_0)}{\ell!} + \frac{(h \cdot D_x + k \cdot D_y)^{n+1} \cdot f(x_0 + \xi \cdot h, y_0 + \xi \cdot h)}{(n+1)!}$$

Hesse-Matrix:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff.bar, Punkt $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, Hesse-Matrix definiert durch:

$$Hf(\vec{x}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(\vec{x}) \right)_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\vec{x}) & \cdots & f_{x_1 x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\vec{x}) & \cdots & f_{x_n x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

$Hf(\vec{x})$ positiv definit $\Rightarrow$ f besitzt an $\vec{x}$ lokales Minimum

$Hf(\vec{x})$ negativ definit $\Rightarrow$ f besitzt an $\vec{x}$ lokales Maximum

$Hf(\vec{x})$ indefinit $\Rightarrow$ kein lokales Extremum, sondern Sattelpunkt

quadratische Aproximation: $f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \vec{h} \cdot \text{grad} f(\vec{x}) + \frac{1}{2!} \vec{h} \cdot Hf(x) \cdot \vec{h}^T + R(\vec{x})$

$R(\vec{x})$... Restglied

Hauptminorenkriterium:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ einzeln Determinanten berechnen!

$\Rightarrow$ Wenn alle det > 0 $\Rightarrow$ G positiv definit

$\Rightarrow$ Wenn das Vorzeichen alternierend und $a_{11} < 0$ $\Rightarrow$ G negativ definit

$\Rightarrow$ Gemischte Variante $\Rightarrow$ G indefinit

6.3 Bestimmung von Extrema

Lokale Extrema

$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$. f besitzt an der Stelle $\vec{x}_0 \in D$ ein relatives/lokales Maximum (Minimum), wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ gibt, sodass $\forall x \in U_\varepsilon(\vec{x}_0) \cap D$ gilt: $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ $\left(f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0) \right)$.

$\vec{x}_0$ heißt absolutes/globales Maximum (Minimum) von f, falls die Ungleichung $\forall x \in D$ gilt.

$\Rightarrow$ Anstiege in allen Richtungen $= 0$ $\Longrightarrow$ $\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \vec{0}$

Punkte mit $\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \vec{0}$ heißen stationäre Punkte!

Bsp: $f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \left.\begin{aligned} f_x &= 2x \\ f_y &= 2y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2x &= 0 \\ 2y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow$ an $\vec{x} = (0,0)$ rel. Extremum (Minimum)

$\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$:

$Hf(\vec{x}_0)$ negativ definit $\Rightarrow$ relatives Minimum an $\vec{x}_0$

$Hf(\vec{x}_0)$ positiv definit $\Rightarrow$ relatives Maximum an $\vec{x}_0$

$Hf(\vec{x}_0)$ indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt

Bsp:

• **Beispiel 51)** Man finde alle stationären Punkte der Funktion $f(x, y, z) = 2x^2 - 3xz^2 + y^3 + 3z^2 - 3y + 3$ und bestimme daraus die relativen Extrema.

stationäre Punkte $\Rightarrow \operatorname{grad}(f) = \vec{0}$ $\qquad \operatorname{grad}(f) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$

$f = 2x^2 - 3xz^2 + y^3 + 3z^2 - 3y + 3$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 4x - 3z^2 \\ f_y &= 3y^2 - 3 \\ f_z &= -6xz + 6z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &(1)\quad 0 = 4x - 3z^2 \\ &(2)\quad 0 = 3y^2 - 3 \\ &(3)\quad 0 = -6xz + 6z \quad /:6 \end{aligned}$$

(2) $\quad 3y^2 = 3 \quad /:3 \Rightarrow y^2 = 1$

$y_1 = 1 \qquad y_2 = -1$

$$① \quad x = \frac{3z^2}{4} \Rightarrow ③ \quad 0 = -\frac{3z^3}{4} + z = z \cdot \left(-\frac{3z^2}{4} + 1\right)$$

$$\underline{z_1 = 0}$$

$$-\frac{3z^2}{4} + 1 = 0$$

$$z^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \underline{z_{2,3} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$\Rightarrow ① \quad x = \frac{3z^2}{4} \Rightarrow \underline{x(z_1)} = x_1 = \underline{0}$$

$$\underline{x(z_2) = x(z_3)} = x_2 = \frac{3 \cdot \frac{4}{3}}{4} = \underline{1}$$

$\Rightarrow$ 6 stationäre Punkte: $P(0, \pm 1, 0)$, $P\left(1, \pm 1, \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$f_x = 4x - 3z^2$	$f_y = 3y^2 - 3$	$f_z = -6xz + 6z$
$f_{xx} = 4$	$f_{yy} = 6y$	$f_{zz} = -6x + 6$
$f_{xy} = 0$	$f_{yx} = 0$	$f_{zx} = -6z$
$f_{xz} = -6z$	$f_{yz} = 0$	$f_{zy} = 0$

$$\Rightarrow Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6z \\ 0 & 6y & 0 \\ -6z & 0 & -6x+6 \end{pmatrix}$$

Hauptminorenkriterium $\Rightarrow$ einzelnen Determinanten betrachten

- $\det|4| = 4$ I

- $\det\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 24y$ II

- $\det\begin{vmatrix} 4 & 0 & -6z \\ 0 & 6y & 0 \\ -6z & 0 & -6x+6 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 6y & 0 \\ 0 & -6x+6 \end{vmatrix} - 6z \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6y \\ -6z & 0 \end{vmatrix} =$

$$= 24y \cdot (6 - 6x) - 6z \cdot (36yz) =$$

$$= 144y - 144xy - 126yz^2 \quad \text{III}$$

- Hf pos. definit $\Rightarrow$ Alle $\det > 0$

  II: $24y > 0 \Rightarrow y = 1$

  III: $144 - 144x - 126z^2 > 0$ bei $x = 0$ und $z = 0$

  $\Rightarrow$ bei $P_1(0, 1, 0)$ lok. Minimum

- Hf neg. def.

  $\Rightarrow$ det alternierend > 0 & < 0, 1. det < 0

  $4 > 0 \Rightarrow$ 1. det immer > 0

  $\Rightarrow$ es gibt kein lok. Maximum

$\Rightarrow$ Alle restlichen Punkte sind Sattelpunkte!

Methode der Langrage'schen Multiplikatoren:

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}^n$, $g_i: D \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m)$ stetig diff.bare Funktionen, f besitzt an x_0 ein lokales Extremum unter den Nebenbedingungen $g_1(\vec{x}) = 0, \dots, g_m(\vec{x}) = 0$ UND grad $g_1(\vec{x}_0), \dots,$ grad $g_m(\vec{x}_0)$ sind linear unabhängig:

$\Rightarrow \exists$ Vektor $(\lambda_{0,1}, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, sodass:
- $F(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(\vec{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\vec{x})$
- $\operatorname{grad} F(\vec{x}_0, \lambda_{0,1}, \dots, \lambda_m) = \vec{0}$

Nachteil: Hesse-Matrix überträgt sich nicht mehr

Bsp: $f(x,y,z) = 12 \cdot \sqrt{xyz}$, NB: $3x + 2y + 5z - 60 = 0$, $x, y, z \geq 0$

$$F(x,y,z,\lambda) = 12 \cdot \sqrt{xyz} - \lambda \cdot (3x + 2y + 5z - 60)$$

$$\left.\begin{array}{l} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mathrm{I}: 2 \cdot \sqrt{\frac{yz}{x}} = \lambda \\ \mathrm{II}: 3 \cdot \sqrt{\frac{xz}{y}} = \lambda \\ \mathrm{III}: 6 \cdot \sqrt{\frac{xy}{z}} = \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{yz}{x} \cdot \frac{y}{xz}} = \sqrt{\frac{y^2}{x^2}} = \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \\ \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{III}} = \frac{z}{x} = \frac{3}{5} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y + 5z - 60 = 0 \\ \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \\ \frac{z}{x} = \frac{3}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \dots \Rightarrow x = \frac{20}{3}, y = 10, z = 4 \Rightarrow f(x,y,z) = 80 \cdot \sqrt{6}$$

6.4 Integralrechnung in mehreren Variablen

Bereichsintegrale:

Satz von Fubini:

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(y) \le x \le \psi(y),\ c \le y \le d\}$

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Funktionaldeterminante:

$\vec{f}(x_1,\dots,x_n) = (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n))$ ist vektorwertige Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Die Determinante der Jacobimatrix wird als Funktionaldeterminante bezeichnet und wird geschrieben als:

$$\det \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_n) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_n) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$$

Kurven:

Kurve in $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung $\vec{c}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Die Variable ist der Parameter der Kurve.

Bogenlänge:

Kurve $\vec{c}$ heißt rektifizierbar/von endlicher Länge $\Longleftrightarrow$ $\vec{c}$ stetig differenzierbar

Länge der Kurve:

$$\left.\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \|\vec{c}(t_j) - \vec{c}(t_{j-1})\| \\ \text{bzw. } L &= \int_a^b \underbrace{\|\vec{c}\,'(t)\|\,dt}_{\text{„Bogenelement"}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Bogenlänge.}$$

Bsp: Schraubenlinie $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \ 0 \le t \le 2\pi$

$$L = \int_0^{2\pi} \|\vec{c}\,'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \right\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1} + 1} = \sqrt{2} \cdot 2\pi$$

Parametrisierung nach Bogenlänge:

$\vec{c}(t): [a,b] \to \mathbb{R}^n \qquad s = \ell(t) = \int_a^t \|\vec{c}\,'(\tau)\|\,d\tau \qquad \ell: [a,b] \to [0,L] \qquad \ell^{-1}: [0,L] \to [a,b]$

$\Rightarrow \tilde{c}(t) = \vec{c}(\ell^{-1}(s)) \qquad s_0 = \ell(t_0)$

$\tilde{\ell}(s_0) = \ell(t_0) = \ell(\ell^{-1}(s_0)) = s_0$

$\tilde{\ell}(s) = s$

$\int_0^t \|\tilde{c}\,'(\sigma)\| \cdot d\sigma = s \quad / \frac{d}{ds} \Rightarrow 1 = \|\tilde{c}\,'(s)\|$

Mantelfläche:

$$M = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Kurvenintegral einer skalarwertigen Funktion:

$\vec{c}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Kurve, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $g(t) = f(\vec{c}(t))$ stückweise stetig.

$\Rightarrow$ Kurvenintegral von f längs $\vec{c}$: $\int_a^b f(\vec{c}(t)) \cdot \|\vec{c}\,'(t)\|\, dt$

Krümmung ebener Kurven:

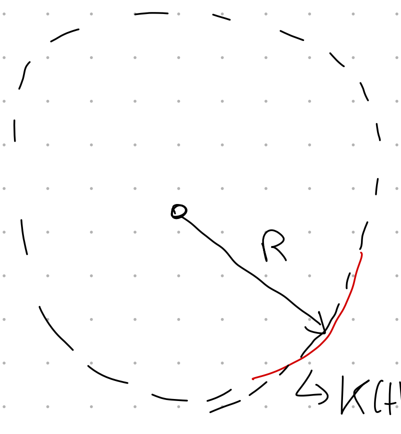
Krümmung $\hat{=}$ Änderung der Richtung bezogen auf Bogenlänge

Krümmung der Kurve im Punkt $\vec{c}(t)$: $\quad \kappa(t) = \frac{d}{ds} \varphi(\ell^{-1}(s)), \quad \ell(t) = s$

<u>Satz</u>: $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$ ist zweimal stetig differenzierbar

$\Rightarrow$ Krümmung: $\quad \kappa(t) = \dfrac{c_1'(t) \cdot c_2''(t) - c_1''(t) \cdot c_2'(t)}{(c_1'(t)^2 + c_2'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$

Falls $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$: $\quad \kappa(t) = \dfrac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$



$\Rightarrow \kappa(t) = \frac{1}{R}$

$\Rightarrow$ Annähern durch Kreis

Vektorfeldes und Stammfunktionen:

$\uparrow$

Kurvenintegrale 2. Art

Kurve $\vec{c}(t): [a,b] \to \mathbb{R}^n$, vektorwertige Funktion $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$, $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Kurvenintegral des Vektorfelds $\vec{f}$ längs der Kurve $\vec{c}$:

$$\int_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_{\vec{c}} \left(f_1(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 + \dots + f_n(x_1, \dots, x_n)\, dx_n \right) =$$

$$= \int_a^b \vec{f}(\vec{c}(t)) \cdot \vec{c}\,'(t)\, dt = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(\vec{c}(t)) \cdot \vec{c}_k\,'(t) \right) dt$$

Eigenschaften:

- Betrag des Kurvenintegrals hängt nicht von Parametrisierung ab.

- entgegengesetzte Richtung $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel

- Linearität: $$\int_{\vec{c}} \left(\vec{f}_1(\vec{x}) + \vec{f}_2(\vec{x}) \right) dx = \int_{\vec{c}} \vec{f}_1(\vec{x})\, d\vec{x} + \int_{\vec{c}} \vec{f}_2(\vec{x})\, d\vec{x}$$

- Additivität: $$\int_{\vec{c}_1} \vec{f}(\vec{x})\, d\vec{x} + \int_{\vec{c}_2} \vec{f}(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x})\, d\vec{x}$$

  $\vec{c} = \vec{c}_1 + \vec{c}_2$, $\vec{c}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

  $\vec{c}_2 : [b,c] \to \mathbb{R}^n$

Gebiet:

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt zusammenhängend, wenn zu je zwei Punkten $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in D$ eine Kurve $\vec{c}: [a,b] \to D$ mit $\vec{c}(a) = \vec{x}_1$ und $\vec{c}(b) = \vec{x}_2$ existiert. Eine Menge D, die offen und zusammenhängend ist, heißt Gebiet.

Gradientenfeld / Potential:

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\vec{f}$ ein stetiges Vektorfeld. $\vec{f}$ ist ein Gradientenfeld, wenn es ein Skalarfeld F mit $\operatorname{grad} F = \vec{f}$ gibt. F heißt dann Stamm=funktion bzw. $-F$ heißt Potential von $\vec{f}$.

Integrabilitätsbedingungen:

Ein stetig differenzierbares Gradientenfeld $\vec{f}$ erfüllt die Integrabilitätsbedingungen:

$$\forall i,j: 1 \leq i,j \leq n: \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

$\Rightarrow$ Integrabilitätsbedingungen sind nur notwendig, aber nicht hinreichend für die Wegunabhängigkeit eines Kurvenintegrals!

In einem Gradientenfeld sind Kurvenintegrale über geschlossene Kurven gleich 0:

$$\oint_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x})\, d\vec{x} = 0$$

allg. von a nach b: $\int_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x})\, d\vec{x} = F(\vec{c}(b)) - F(\vec{c}(a))$

Bsp: $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2+4xy-3y^2 \\ 2x^2-6xy-3y^2 \end{pmatrix}$ ist ein Gradientenfeld. $\Rightarrow$ Stammfkt. $F(\vec{x}) = $??

$F_y = 2x^2-6xy-3y^2$

Integrabilitätsbed.: $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 4x-6y = \frac{\partial f_1}{\partial x}$ ✓

$F(x,y) = \int (3x^2+4xy-3y^2)\,dx = x^3+2x^2y-3xy^2+C(y)$

$F_y = 2x^2-6xy+C'(y) = 2x^2-6xy-3y^2$

$\hookrightarrow C'(y) = -3y^2 \Rightarrow C(y) = \int -3y^2\,dy = -y^3+C \quad, C\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow F(x,y) = x^3+2x^2y-3xy^2-y^3+C, \; C\in\mathbb{R}$

Einfach zusammenhängend:

Ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist einfach zusammenhängend, wenn sich jede geschlossene Kurve in D stetig auf einen ihrer Punkte zusammenziehen lässt.

8 Fourier-Analyse

Fourier Reihen $\neq$ Fourier Transformation (FT) $\subseteq$ Laplace Transformation

$\downarrow$ Diskrete Fourier Transformation (DTFT) $\qquad \downarrow$ z-Transformation

$\downarrow$ Abtasttheorem

8.1 Fourier-Reihen:

Funktion f heißt periodisch wenn:

$$f(t+T) = f(t) \quad , \forall t \in \mathbb{R} \qquad T \ldots \text{ Periode}$$

Ein periodisches trigonometrisches Polynom $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ kann wie folgt dargestellt werden:

Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

Reell: $$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right) \quad , a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

Grad $\quad$ Koeffizienten $\qquad N \in \mathbb{N}$

Komplex: $$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega t} \quad , c_k \in \mathbb{C} \qquad i^2 = -1$$

S. 362

Die beiden Darstellungen der Trigonometrischen Reihen sind eindeutig. (Beweis S. 364)

Aus der eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ ergibt sich:

$$a_0 = 2c_0 \qquad a_n = c_n + c_{-n} \qquad b_n = (c_n - c_{-n})i$$

$$c_k = \frac{a_k - i b_k}{2} \qquad c_{-k} = \frac{a_k + i b_k}{2}$$

Berechnung der Koeffizienten:

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cos(n\omega t)\, dt \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t)\, dt$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-ik\omega t}$$

S. 366

für $\lim_{N \to \infty} f(t)$ sei:

$$S_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega t} \quad \text{bzw.} \quad S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right]$$

die N-te Partialsumme.

Falls der Grenzwert der N-ten Partialsumme für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert, dann wird durch die obige Reihe eine T-Periodische Funktion erklärt.

Der Grenzwert existiert allerdings nicht immer!

Deshalb: Eine Funktionsfolge $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots$ Konvergiert gleichmäßig auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gegen die Funktion $f(x): I \to \mathbb{R}$, wenn für jedes beliebig kleines $\varepsilon > 0$ für alle $x \in I$ gemeinsamer Index $N = N_\varepsilon$ existiert sodass:

$$n \geq N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \,, \ \forall x \in I$$

S. 368

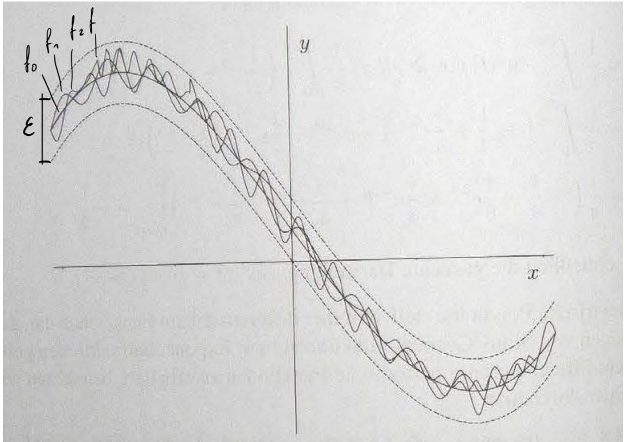


Abbildung 8.3 Gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge

Weierstraß'scher M-Test für die **gleichmäßige Konvergenz**:

gilt $|f_k(x)| \leq M_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty$

dann ist die Funktionsreihe $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ auf I gleichmäßig konvergent.

S. 368

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine T-Periodische Funktion, die auf $[0, T]$ stückweise stetig ist. Dann ist $S_f(t)$ die Fourier-Reihe von $f(t)$

$$S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$S_f(t) \sim f(t)$, $S_f(t)$ ist die zu $f(t)$ gehörende Fourier-Reihe.

M-Test OK, stückweise stetig

Rechenregeln für Fourier-Reihen: S. 372

$$S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \sim f(t), \quad S_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ik\omega t} \sim g(t)$$

Linearität:

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha c_k + \beta d_k) e^{ik\omega t}$$

Konjugation:

$$\overline{f(t)} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{c_{-k}} e^{ik\omega t}$$

Zeitumkehr:

$$f(-t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{ik\omega t}$$

Streckung:

$$f(ct) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ik\omega c t}, \quad c>0$$

$F(t) = f(ct) \dots \frac{T}{c}$ - periodisch

Verschiebung Zeitbereich:

$$f(t+a) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega a} c_k e^{ik\omega t}$$

$a \in \mathbb{R}$

Verschiebung im Frequenzbereich:

$$e^{in\omega t} f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k-n} e^{ik\omega t}$$

$n \in \mathbb{Z}$

Differentiation:

$$S_{f'}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik\omega t) c_k e^{ik\omega t}$$

Integration:

$F(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ ist nur dann wieder T-periodisch wenn $\int_0^T f(t)\,dt = 0$, also $c_0 = 0$. Dann gilt:

$$S_F(t) = -\frac{1}{T}\int_0^T t \cdot f(t)dt + \sum_{k\in\mathbb{Z}, k\neq 0} \left(\frac{c_k}{ik\omega}\right) e^{ik\omega t}$$

Bessel-Ungleichung:

$$\left|\frac{a_0}{2}\right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = 2\sum_{k=-\infty} |c_k|^2 \leq \frac{2}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt$$ S. 376

Parseval'sche Gleichung:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt$$, T-periodisch auf $[0,T]$ stückweise stetig S. 378

Konvergenz im Quadratischen Mittel:

$$\|g(t) - f(t)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t) - g(t)|^2 dt}$$

Eindeutigkeitssatz:

$h(t) = g(t)$ wenn alle c_k gleich sind und $f(t) = \frac{1}{2}\left(f(t_-) + f(t_+)\right)$, $t \in \mathbb{R}$

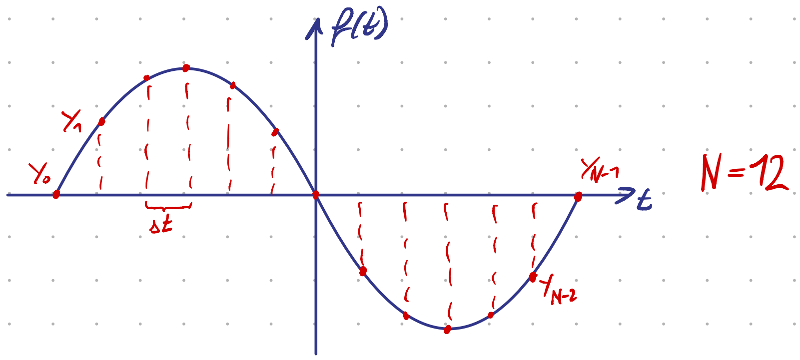
8.2 Diskrete Fourier-Transformation:

Diskrete komplexe T-Periodische Funktion $f(t)$ ist an N Stellen erklärt in äquidistanten Abständen $t_j = \frac{jT}{N}$.

Da $f(t)$ periodisch ist, kann sie durch N Werte beschrieben werden:

$$\vec{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})^T \in \mathbb{C} \quad , \quad \Delta t = \frac{T}{N}$$

$$\Rightarrow \; y_0 = f(0), \; y_1 = f(\Delta t), \; y_2 = f(2\Delta t), \dots, \; y_{N-1} = f((N-1)\Delta t)$$



Fourier-Koeffizienten bzw. Spektralkoeffizienten c_k

S.380

für $k = 0 \dots N-1$ und $\vec{y} = (y_0, \dots, y_{N-1})^T$

$j \approx t$ & $N \approx T$ (Sinngemäß)

komplex konjugiert

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-i k j \frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \overline{\omega^{kj}}$$

analog zur kontinuierlichen: $c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-ikt\frac{2\pi}{T}}$ $\quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$$

Die Spektralkoeffizienten können auch als Riemann'sche Zwischensumme aufgefasst werden:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \omega^{-kj} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) e^{-kj\frac{2\pi i}{N}} = \frac{1}{\underbrace{N\Delta t}_{T}} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) e^{-kj \frac{2\pi i \cancel{\Delta t}}{N \cancel{\Delta t}}} \Delta t$$

$$c_k = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) e^{-ik\omega t_j} \Delta t$$

Berechnung der Koeffizienten über die Fourier-Matrix: S. 381

$\vec{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})^T$, F_N ist $N \times N$

$$F_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{c} = \frac{1}{N} \overline{F_N} \vec{y}$$

$$F_N^{-1} = \frac{1}{N} \cdot \overline{F_N}$$

$$\vec{y} = N \, \overline{F_N}^{-1} \vec{c} = N \, \overline{F_N^{-1}} \vec{c} = \frac{N}{N} \overline{\overline{F_N}} \vec{c} = F_N \vec{c}$$

Diskrete- und inverse Diskrete Fourier Transformation: S 382.

DFT... Diskrete Fourier-Transformation
IDFT... inverse Diskrete Fourier-Transformation

DFT: $c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \omega^{-kj}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$

$, \ \omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$

IDFT: $y_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \omega^{jk}$, $j = 0, 1, \dots, N-1$

Rechenregeln für Diskrete Fourier-Transformation:

$\vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{C}$ mit Spektralkoeffizienten $\vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{C}$:

Linearität:

$$a\vec{y} + b\vec{z} \xrightarrow{DFT} a\vec{c} + b\vec{d}$$

Periodische Faltung:

$$\vec{y} * \vec{z} \xrightarrow{DFT} (\vec{c}_k \cdot \vec{d}_k)_k$$

Verschiebung im Zeitbereich:

$$(y_{k+n})_k \xrightarrow{DFT} (\omega^{kn} c_k)_k$$

Verschiebung im Frequenzbereich:

$$(\omega^{kn} y_k)_k \xrightarrow{DFT} (c_{k-n})_k$$

Parseval-Gleichung:

S. 384

$$\sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |y_j|^2$$, analog zur kontinuierlichen: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt$

Fast Fourier Transformation FFT:

FFT ist für Zweierpotenzen von N, $N = 2^r$ ($r \geq 1$) am effizientesten.

$$y_j = \sum_{k=0}^{2^r - 1} c_k \, e^{\frac{2\pi i}{2^r} kj}$$ in gerade u. ungerade c_k's aufteilen:

$$y_j = \sum_{m=0}^{2^{r-1}} c_{2m} \, e^{\frac{2\pi}{2^{r-1}} mj} + e^{\frac{2\pi}{2^r} j} \sum_{m=0}^{2^{r-1}} c_{2m+1} \, e^{\frac{2\pi}{2^{r-1}} mj}$$

```
function FFT (N:integer; c:complexarray):complexarray;
    if N=1 then FFT[0]:=c_0
    else
        w:=e^(2πi/N);
        evenarray:=[c_0, c_2, ..., c_{N-2}];
        oddarray:=[c_1, c_3, ..., c_{N-1}];
        [u_0, u_1, ..., u_{N/2-1}]:=FFT(N/2, evenarray);
        [v_0, v_1, ..., v_{N/2-1}]:=FFT(N/2, oddarray);
        for j:=0 to N-1 do
            τ:=w^j;
            FFT[j]:=u_{j mod N/2} + τ v_{j mod N/2};
        od;
    fi;
```

Abbildung 8.8 Der FFT-Algorithmus für den Fall $N = 2^r$

2.2.1 FFT

Die FFT ist ein Algorithmus, der die DFT bzw. IDFT in Laufzeit $O(N \log N)$ berechnet. Er ist im Buch auf Seite 385 in Pseudocode zu finden.

2.3 Fourier-Transformation

Die Fourier-Analyse kann nur mit Periodischen Signalen umgehen und daher nur Sinus/Cosinusfrequenzen von ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz ergeben.

Mit der Fourier-Transformation wird die Summe der Analyse zu einem Integral und die einzelnen Koeffizienten zu einer Funktion $F(\omega)$ (die „Fouriertransformierte" von $f(t)$). Dadurch kann in dem ursprünglichen Signal jede Frequenz enthalten sein, wodurch das Signal nicht mehr periodisch sein muss.
Anmerkung: Das Signal darf sogar nicht periodisch sein!

Die Fouriertransformierte einer Funktion $f(t)$ ist wie folgt definiert:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = (CHW) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} \mathrm{d}t \tag{48}$$

Diese Transformation lässt sich auch umkehren, die inverse Fourier-Tranformation ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} (CHW) \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{-i\omega t} \mathrm{d}\omega \tag{49}$$

(CHW) steht für Cauchy-Hauptwert. Da man als Integralgrenzen nicht tatsächlich ∞ einsetzen kann, wird das wie bekannt über den Limes gerechnet:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t = \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} f(t) \mathrm{d}t$$

Definition 2. Absolute Integrierbarkeit
Eine Funktion heißt absolut integrierbar, wenn das Integral ihres Betrags immer noch kleiner ∞ ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t < \infty \tag{50}$$

Definition 3. Faltung von Funktionen
Die Faltung von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ ist definiert als:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) \cdot g(\tau) \mathrm{d}\tau \tag{51}$$

Satz 9. Rechenregeln für Fourier-Transformationen

$$
\begin{aligned}
&\text{Konjugation:} && \mathcal{F}\{\overline{f(t)}\} = \overline{F(-\omega)} && (52)\\
&\text{Streckung:} && \mathcal{F}\{f(ct)\} = \frac{1}{|c|} \cdot F\left(\frac{\omega}{c}\right) \quad \text{mit } c \neq 0 && (53)\\
&\text{Verschiebung im Zeitbereich:} && \mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-i\omega a} \cdot F(\omega) \quad \text{mit } a \in \mathbb{R} && (54)\\
&\text{Verschiebung im Frequenzbereich:} && \mathcal{F}\{e^{-i\Omega t} \cdot f(t)\} = F(\omega - \Omega) \quad \text{mit } \Omega \in \mathbb{R} && (55)\\
&\text{Symmetrie 1:} && f(-t) = f(t) \Longleftrightarrow F(-\omega) = F(\omega) && (56)\\
&\text{Symmetrie 2:} && f(-t) = -f(t) \Longleftrightarrow F(-\omega) = -F(\omega) && (57)\\
&\text{Ableitung im Zeitbereich ohne Unstetigkeit:} && \mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega) && (58)\\
&\text{Ableitung im Zeitbereich ohne Unstetigkeit:} && \mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega) - \sum_{k=1}^{m} \left[f(t_k^+) - f(t_k^-)\right] \cdot e^{-i\omega t_k} && (59)\\
&\text{Ableitung im Frequenzbereich:} && \mathcal{F}\{t \cdot f(t)\} = i \cdot F'(\omega) && (60)\\
&\text{Faltung:} && \mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(\omega) \cdot G(\omega) && (61)
\end{aligned}
$$

Satz 10. Umkehr- und Eindeutigkeitssatz
Besitzt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die folgenden Eigenschaften, ist sie Umkehrbar:

(i) f ist absolut integrierbar

(ii) sie ist in jedem endlichen Intervall stetig differenzierbar

(iii) es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ die Mittelwerteigenschaft:

$$f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \tag{62}$$

Die Umkehrfunktion ist dann gegeben durch:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2\pi} F(-\omega)\right\} = f(t) \tag{63}$$

2.4 Abtasttheorem

Das Abtasttheorem besagt, dass ein Signal $f(t)$ mit einer Frequenz ω_s abgetastet werden kann, wenn die Abtastfrequenz ω_s mehr als doppelt so groß ist wie die höchste Frequenzkomponente des Signals $f(t)$.

Definition 4. Abtastbedingungen für ein Signal $f(t)$:

1. $f(t)$ hat eine endliche Bandbreite Ω, also $F(\omega) = 0$ für $|\omega| > \Omega$.

2. Die Abtastfrequenz $\omega_s = \frac{2\pi}{\Delta t}$ ist mehr als doppelt so groß wie die Bandbreite Ω des Signals $f(t)$, also $\omega_s > 2\Omega$.

Laplace:

8.5 Laplace-Transformation
S.397

Def. 8.54
Eine Funktion $f: [0, \infty) \to \mathbb{C}$ heißt Laplace-transformierbar wenn das uneigendliche Integral

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

für ein $s \in \mathbb{R}$ konvergiert

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$F(s)$ Bildfunktion von $f(t)$
$f(t)$ Urbildfunktion von $F(s)$

Laplace-Transformierte wichtiger Grundfunktionen

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$s > \alpha \in \mathbb{R}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$

wichtig!

Satz 8.56 Existenz- und Eindeutigkeitssatz der Laplace-Transformation
Ist die Funktion $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ auf jedem beschränkten Intervall stückweise stetig und besitzt $f(t)$ höchstens

exponentielles Wachstum für alle $t > 0$ dann gilt:

Info: exponentielles Wachstum: Konstanten $M, \sigma \in \mathbb{R}$ $|f(t)| \leq Me^{\sigma t}$

i) eine $\mathcal{L}$-Transformierte existiert für $s > \sigma$

ii) Integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ $\quad s \geq s_0 > \sigma$ konvergiert gleichmäßig

iii) $f(t)$ ist bis auf die Unstetigkeitsstellen durch $F(s)$ eindeutig bestimmt

iv) $\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$

Rechenregeln
S. 398, 399

(Anm: bei Alttests musste man 3 auswendig wissen)

- Linearität:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- Streckung:

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right) \quad c \neq 0$$

(Anm. Zeitdehnung bzw. -streckung $f(c \cdot t)$)

- Differentiation und Integration im Zeitbereich

Wenn $f(t) \ldots f^{(n)}(t)$ $\mathcal{L}$-transformierbar

$f(t) \ldots f^{(n-1)}(t)$ stetig auf $(0, \infty)$, dann gilt:

Diff:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots f^{(n-1)}(0^+)$$

Integration

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(u)\,du\} = \frac{1}{s} F(s)$$

- Differentiation u. Integration im Bildbereich für $\mathcal{L}$-transformierbar $f(t)$ gilt:

Diff:

$$\mathcal{L}(t f(t)) = -\frac{d}{ds} F(s)$$

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

Integration falls $\frac{f(t)}{t}$ $\mathcal{L}$-transformierbar

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\,du$$

- Verschiebung im Bildbereich

$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a) \qquad a \in \mathbb{R}$$

- Verschiebung im Zeitbereich

$a \geq 0$ im Zeitbereich einer von $[0, \infty)$ def. Funktion verwendet man Heaviside-Funktion $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

dann gilt:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s) \quad a \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{u(t-a) = e^{-as}\frac{1}{s} \quad a \geq 0$$

- Faltung $(f \cdot g)(t)$ von $f(t)$ und $g(t)$

$$(f \cdot g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

Es gilt die Produktformel

$$\mathcal{L}\{(f \cdot g)(t)\} = F(s)G(s)$$

z-Transformation:

8.6 z - Transformation
S. 404

Ein Signal wird zu diskreten Zeitpunkten $k\Delta t$ für $k \in \mathbb{N}$ im Takt $\Delta t > 0$ abgetastet.
Dadurch entsteht die komplexe Zahlenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$

Def. 8.65
Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, mit $f_k \in \mathbb{C}$, eine komplexe Zahlenfolge.
Die Folge (f_k) heißt z-transformierbar, wenn die unendliche Reihe

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}$$

für ein $z \in \mathbb{C}$ konvergiert.

inverse z Transformation $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$

Eine Folge f_k ist genau dann z-transformierbar, falls

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|f_k|} < \infty$$

Anm. Limes superior einer Folge ist der größte Häufungspunkt der Folge. Ist die Folge nach oben unbeschränkt dann gilt: $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$

7. Differenzen- & Differentialgleichungen

Differenzengleichungen: zeitdiskret z.B.: Türme von Hanoi, Fibonacci, ...

Differentialgleichungen: zeitkontinuierlich z.B.: Pendel, Wärmeaustausch, ...

7.1 Differenzengleichungen:

Differenzengleichungen eignen sich allgemein zur Beschreibung von Prozessen, die stufenförmig, d.h. in diskreten Schritten ablaufen und bei denen man angeben kann, wie die Prozessgrößen auf der n-ten Stufe aus den Größen der vorhergehenden Stufen bestimmt werden.

in F kommt x_n u. x_{n+k} wirklich vor.

Implizite Form: $F(n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) = 0$, $n = 0, 1, \dots, k$ k-te Ordnung

Explizite Form: $x_{n+k} = f(n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1})$, $n = 0, 1, \dots, k$ k-te Ordnung

↳ ist f linear in x_n, dann heißt f linear, ansonsten nichtlinear.

Grundsätzlich gibt es bei Differenzengleichungen eine allgemeine und eine partikuläre Lösung.

7.2 Differenzengleichungen $\boxed{\text{1. Ordnung}}$: S. 289

$$x_{n+1} = a x_n + b, \quad n = 1, 2, 3, \dots \qquad a, b \text{ konstant}$$

x_{n-1}

x_0 gegeben.

$$x_1 = a x_0 + b$$

$$x_2 = a x_1 + b = a^2 x_0 + ab + b$$

$$x_3 = a x_2 + b = a^3 x_0 + a^2 b + ab + b$$

$$\vdots$$

$$x_n = a^n x_0 + (1 + a + \dots + a^{n-1}) b = \begin{cases} a^n x_0 + b \dfrac{a^n - 1}{a - 1}, & \text{für } a \neq 1 \\ x_0 + bn, & \text{für } a = 1 \end{cases}$$

Allgem. Differenzengleichung 1. Ordnung:

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n \quad , n = 1, 2, 3, \dots$$

Störfunktion, da hier kein x_n vorkommt

a_n … Fdge/Funktion von x

Ist $b_n = 0$, dann ist die Gleichung

$$x_{n+1} = a_n x_n \quad , n = 1, 2, 3, \dots$$

homogen.

Die Lösungsgesamtheit einer linearen Differenzengleichungen ist gegeben durch:

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$$

$x_n^{(h)}$ … allgemeine Lösung zur homogenen Gleichung

$x_n^{(p)}$ … partikuläre Lösung zur inhomogenen Gleichung

homogene Lösung: $x_n^{(h)}$

$$x_n = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot x_0 = x_0 \prod_{i=0}^{n} a_i \quad \text{und} \quad C = x_0$$

$$\Rightarrow x_n^{(h)} = C \prod_{i=0}^{n-1} a_i$$ … allgemeine Lösung, C nicht bestimmt

mit Anfangswert $x_0 = ?$ C bestimmen

partikuläre Lösung: $x_n^{(p)}$

1) Variation der Konstanten

ODER:

2) Methode des unbestimmten Ansatzes

1) Variation der Konstanten:

Bei dieser Methode wird die Konstante C in der allgemeinen homogenen Lösung „variiert“, d.h. man macht den Ansatz:

$$x_n^{(p)} = C_n \prod_{i=0}^{n-1} a_i$$

2) Methode des unbestimmten Ansatzes

Basierend auf der Störfunktion können verschiedene Ansätze zur Lösung gewählt werden.

7.6 Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE):

Kontinuierliche Prozesse in der Technik/Physik/Biologie/Chemie

z.B.: Freier Fall:

$$s''(t) = g \quad , g \ldots \text{Erdbeschleunigung}$$

$$s'(t) = \int s''(t)\,dt = gt + C_1 \quad \ldots \text{Geschwindigkeit}(t)$$

allgemeine Lösung $\rightarrow$ $$s(t) = \int s'(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2 \quad \ldots \text{Weg}(t)$$

Mit Anfangsbedingungen lassen sich die beiden integrationskonstanten C1 und C2 bestimmen:

$$C_1 = v_0, \ C_2 = s_0 \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0 \leftarrow \text{partikuläre Lösung}$$

Allgemeine Form:

implizit: $F = (x, y, y', y'', \ldots, y^{(k)}) = 0$, k-te Ordnung

explizit: $y' = f(x,y)$

Ist f linear in der Funktion von y, dann ist es eine lineare Differentialgleichung, ansonsten eine nichtleineare Differentialgleichung.

Allgemeiner Existenzsatz von Peano: S. 377

Ist f(x,y) eine in einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$ stetige Funktion, dann besitzt die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in D$ (mindestens) eine Lösung $y = y(x)$.

Existenz und Eindeutigkeitssatz:

Ist $f(x,y)$ eine stetige Funktion auf einem Rechtecksbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und erfüllt dort eine sogenannte Lipschitzbedingung

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad , L > 0$$

, dann besitzt die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in D$ genau eine Lösung $y = y(x)$.

7.7 Lineare Differentialgleichungen 1. u. 2. Ordnung: S.377

Lin. Diff.-Gleichung 1. Ordnung: $y' + a(x)y = \begin{cases} 0 & \text{homogene Gleichung} \\ s(x) & \text{inhomogene Gleichung} \end{cases}$

Störfunktion

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, $y_h(x)$... allg. Lösung zur homo

$y_p(x)$... beliebige Lösung zur partikulären

1. Lösen der hogenen Gleichung durch "Trennen der Variablen"
2. Bestimmung der partikulären Lösung durch "Variation der Konstanten"
3. Bestimmen der Lösungsgesamtheit $y'(x) = y_h(x) + y_p(x)$

bsp.: $y' - \frac{1-x}{x} y = 4x^2$

1.: homogen: $y' - \frac{1-x}{x} y = 0 \quad / + \frac{1-x}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{x} y \quad / : y \quad / \cdot dx$$

$$\frac{1}{y}\, dy = \frac{1-x}{x}\, dx = \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx \quad / \int$$

$$\ln|y| = \ln|x| - x + C \quad / e^{(\ldots)}$$

$$y = e^{\ln|x| - x + C} = e^{\ln|x|}\, e^{-x}\, \underbrace{e^{C}}_{C}$$

$$y_h(x) = x \cdot e^{-x} \cdot C$$

2.: Partikuläre:

$$y_p(x) = C(x) \cdot x \cdot e^{-x}$$

$(uvc)' = u'vc + uv'c + uvc'$

$$y_p'(x) = C'(x)\, x\, e^{-x} + C(x)\, e^{-x} - C(x)\, x\, e^{-x}$$

einsetzen in ursprüngliche DGL

$$C'(x)xe^{-x} + C(x)e^{-x} - C(x)xe^{-x} - \frac{1-x}{x}C(x)xe^{-x} = 4x^2 \quad / e^{-x}$$

$$C'x + C - Cx - \frac{1-x}{\cancel{x}}C\cancel{x} = 4x^2e^x$$

$$C'x \cancel{+C} - Cx \cancel{-C} + Cx = 4x^2e^x \quad /:x$$

$$C' - C + C = 4xe^x$$

$$C'(x) = 4xe^x \quad / \int dx$$

$$C(x) = 4\int \underset{g}{x}\,\underset{f'}{e^x}\,dx \qquad \int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$$

$$g' = 1, \; f = e^x$$

$$C(x) = 4 \cdot \left[xe^x - \int e^x\,dx\right]$$

$$C(x) = 4\left[xe^x - e^x + D\right]$$

$$C(x) = 4xe^x - 4e^x + D$$

$$C(x) = 4e^x(x-1) + D$$

3. $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$$y(x) = xe^{-x}C + 4\cancel{e^x}(x-1)x\cancel{e^{-x}}$$

$$\underline{y(x) = Cxe^{-x} + 4(x^2-x)}$$

Lin Diff-Gleichung 2. Ordnung:

$$y'' + ay' + by = \begin{cases} 0 & \text{homogene Gleichung} \\ S(x) & \text{inhomogene Gleichung} \end{cases}$$

analog zu 1. Ordnung

$a, b \ldots$ konstant

1. Lösung der homogenen durch Exponentialansatz $y_h(x) = e^{\lambda x}$ u. $y'' + ay' + by = 0$
2. Bestimmen partikuläre Lösung $y_p(x)$ mit unbestimmten Ansatzes mit Parameter $\lambda = y'$
3. Lösungsgesamtheit $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ bestimmen

1.: $y_h'' + a y_h' + b y_h = 0$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a \lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0 \quad / : e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

charakteristische Gleichung

Lösungen λ_1, λ_2 (auch charakteristische Wurzeln) bestimmen die Form der allgemeinen Lösung von $y_h(x)$:

$$y_h(x) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} & , \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ u. reell} \\ e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) & , \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta \text{ konjugiert komplex} \\ (C_1 + C_2 x)\, e^{\lambda_1 x} & , \lambda_1 = \lambda_2 \text{ reell} \end{cases}$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

2. Methode des unbestimmten Ansatzes:
Ansatz der für die Lösung der partikulären in abhängigkeit der Störfunktion aus nachstehender Tabelle wählen:

Störfunktion	Versuchslösung
1	A
e^{rx}	$A e^{rx}$
$\sin rx$ oder $\cos rx$	$A \sin rx + B \cos rx$
$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$	$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_k x^k$
$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k) e^{rx}$	$(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_k x^k) e^{rx}$

Resonanzfall: Ist ein Summand der Versuchslösung bereits eine Lösung der homogenen Gleichung, dann muss der gesamte Versuchslösungsansatz mit x multipliziert werden. Dieser Vorgang muss gegebenfalls wiederholt werden.

Bsp.: $y'' + y' - 2y = 2x - 3$

homo: $y_h'' + y' - 2y = 0$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} = -2$

$\Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$ u. reell

$\Rightarrow y_h(x) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$

$y_h(x) = C_1 e^{x} + C_2 \cdot e^{-2x}$

partikuläre: $s(x) = 2x - 3 \Rightarrow$ Versuchslösung $y_p(x) = A_0 + A_1 x$

$y_p' = A_1$

$y_p'' = 0$

$0 + A_1 - 2(A_0 + A_1 x) = 2x - 3$

$A_1 - 2A_0 - 2A_1 x = 2x - 3$

$(A_1 - 2A_0)x^0 \quad -2A_1 x = -3 + 2x$

Koeffizientenvergleich: $x^0: A_1 - 2A_0 = -3 \quad -1 - 2A_0 = -3 \quad /+1 \quad /:-2$

$A_0 = \frac{2}{2} = 1$

$x^1: -2A_1 = 2$

$A_1 = -1$

$\Rightarrow y_p(x) = 1 - x$

Lösungsgesamtheit: $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} + 1 - x$ ... allg. Lösung

Mit Anfangsbedingungen könnte man nun $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ bestimmen.

Lin. Diff.-Gleichung k-ter Ordnung: $y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = s(x)$

Nichtlineare DGL und qualitative Methoden:

1. Trennbare DGL: $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$

Lösung: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ (Voraussetzung: $g(y) \neq 0$)

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$ (Trennung der Variablen)

Hat $g(y)$ Nullstellen y_0, dann $y = y_0$ auch Lösung der DGL

Bsp: logistisches Wachstum

2. Exakte DGL: Gegeben eine Funktion $y(x)$

DGL: $f(x,y) \cdot dx + g(x,y) \cdot dy = 0$,

sodass $\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$ – Gradientenfeld (Satz v. Schwarz, $f_y = g_x$)

dann $y'(x) = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$

und $\exists u(x,y)$ sodass $u_x = f$; $u_y = g$

$u = \int f \cdot dx$, verbleibt konstante $c(y)$

$u_y =$ irgendwas $+ c'(y) = g$; nach $c'(y)$ lösen

3. Methode des integrierenden Faktors (für nicht-exakte DGL)

Falls $f_y \neq g_x$, ein m finden, sodass $\underline{(m \cdot f)_y = (m \cdot g)_x}$

m ist eine Fkt. entweder nach x oder nach y, sodass diese DGL mit Produktregel und Trennung der Variablen gelöst werden kann.

Danach ist $\boxed{m \cdot f \cdot dx + m \cdot g \cdot dy = 0}$
eine <u>exakte DGL</u> und kann normal gelöst werden.

4. Bernoulli-DGL:

$$y' + a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^{\alpha} = 0; \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

1. Subst. $z = y^{1-\alpha}$; $z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} \cdot y'$
2. DGL mit $(1-\alpha) \cdot y^{-\alpha}$ multiplizieren:

$$\underbrace{(1-\alpha) \cdot y^{-\alpha} \cdot y'}_{z'} + (1-\alpha) \cdot a(x) \cdot \underbrace{y^{1-\alpha}}_{z} + (1-\alpha) \cdot b(x) = 0$$

$$z' + (1-\alpha) \cdot a(x) \cdot z + (1-\alpha) \cdot b(x) = 0$$

Lineare DGL 1. Ordnung

5. Ähnlichkeits-DGL: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Subst. $z = \frac{y}{x}$; $z' = \frac{1}{x}\left(f(z) - z\right)$, Trennbare DGL nach z

6. Euler'sche DGL (Euler-Cauchy-DGL):

k-te Ableitung

$$a_k \cdot x^k \cdot y^{(k)} + a_{k-1} \cdot x^{k-1} \cdot y^{(k-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = s(x)$$

Subst. $z(t) = y(e^t)$; $y(x) = z(\ln(x))$; $y' = \frac{z'(\ln(x))}{x}$

Dann $y^{(k)} = \frac{z^{(k)}(t)}{x^k}$, alle x kürzen sich

$$\Rightarrow \underbrace{a_k \cdot z^{(k)}(t) + a_{k-1} \cdot z^{(k-1)} + \ldots + a_1 z' + a_0 z = s(e^t)}_{\text{Lineare DGL}}$$

Lösungen: $z(t)$, $y(x) = z(\ln(x))$

(wo t steht, $\ln(x)$ einsetzen)

7. Gleichgewichtspunkt

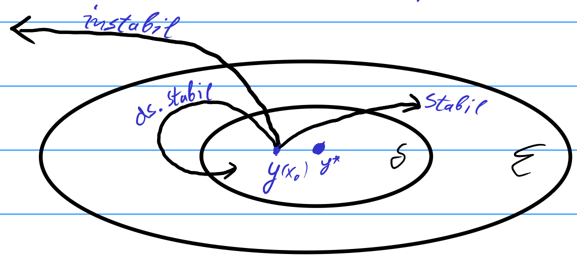
Angenommen wir haben eine DGL vom Typ $y' = f(y)$

Dann: y^* Gleichgewichtspunkt, wenn $y^* = f(y^*)$
(ähnlich zu Fixpunkte in Numerik)

Für DGL 1. Ordnung: $\boxed{y^*(x) \text{ Lösung von } y' = f(y), \; \forall x: f(y^*(x)) = 0}$

y^* stabil, falls für x_0, sodass $y(x_0)$ im δ-Bereich von y^*,
für $\forall x > x_0$ $y(x)$ in ε-Bereich von y^*;

y^* <u>asymptotisch stabil</u>, falls $\lim_{x \to \infty} y(x) = y^*$



<u>Satz:</u> Wenn $f'(y^*) > 0$, y^* instabil

(Bei einer kleinen Abweichung von y^* wird y "weggeschoben", weiter und weiter weg von y^*)

Wenn $f'(y^*) < 0$, y^* asymptotisch stabil

(Bei einer kleinen Abweichung wird y "zurückgezogen")

- **Explizit lösbare PDGL**

-Linear, 1. Ordnung:

$$a \cdot u_x + b \cdot u_y = f \qquad , u = u(x,y),\ f = f(x,y)$$

Koordinatenwechsel:

$$\begin{cases} \xi = bx + ay \\ \eta = bx - ay \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x = U_\xi \cdot \xi_x + U_\eta \cdot \eta_x \\ u_y = U_\xi \cdot \xi_y + U_\eta \cdot \eta_y \end{cases}$$

Kettenregel, weil ξ und η Funktionen nach x und y sind

Einsetzen in der DGL: $F = ab(U_\xi + U_\eta) + ab(U_\xi - U_\eta)$

- Lösen für U_ξ, als normale DGL
  - Verbleibt eine "Konstante" (Fkt. nach η)
  - Rücktransformieren

— Linear, 2. Ord.

$$u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx} + f(x,t)$$

Koordinatenwechsel mit Ansatz $\begin{cases} \xi = x - ct \\ \tau = x + ct \end{cases}$

Allgemein ist es Ziel bei Koordinatenwechsel, dass nach Einsetzen in der PDGL eine der Ableitungen verschwindet! (Kettenregel beachten)

- **Rumpf-DGL**

$$a(x,y) \cdot u_x + b(x,y) \cdot u_y = 0$$

Für $\forall$ Variablenpaare: $\underbrace{\frac{dx}{dy} = -\frac{a(x,y)}{b(x,y)}}_{\text{Gewöhnliche DGL, Trennung der Variablen}}$

Lösung: Ausdruck nach y = Ausdruck nach x + Konstante

! Die Lösung der Rumpf-DGL ist eine Funktion nach den Konstanten!!!

(Die s.g. Methode der Charakteristiken)

Bsp.: Für 2 Variablen x, y: $u = F(c_1)$

3 Variablen x, y, z: $u = F(c_1, c_2)$

c_1 aus x, y; c_2 aus x, z oder y, z

• Falls $au_x + bu_y \neq 0$:

$$au_x + bu_y + cu + d = 0$$

– Koordinatenwechsel

$$u_\xi \cdot (\underbrace{A\xi_x + B\xi_y}) + u_\eta (A\eta_x + B\eta_y) + C \cdot u + D = 0$$

• Als Rumpf-DGL nach $\xi(x,y)$ betrachten

• ξ finden, η wählen sodass (Determinante) $\rightarrow \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$

$u_\xi \cdot 0 + u_\eta (A\eta_x + B\eta_y) + Cu + D = 0$, mit η bekannt

$\Rightarrow$ gewöhnliche DGL

• Falls $A = A(x, y, u)$ (u ist auch Teil der Koeff.):

– u als Variable betrachten

– Charakteristiken bilden

– u daraus ableiten

Bsp.: $xuu_x + yuu_y = xy$

$f(x, y, u(x,y)) = 0$

$xu \cdot f_x + yu \cdot f_y - xy f_u = 0$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{yu}{xu} \\ \frac{du}{dx} = \frac{xy}{xu} \end{array} \right.$$

$c_1 = \frac{y}{x}$; $c_2 = \frac{u^2}{2} - \frac{c_1 x^2}{2} = \frac{u^2}{2} - \frac{yx}{2}$

$\Rightarrow G\left(\frac{y}{x}, u^2 - yx\right) = 0$

$\Rightarrow u^2 - yx = g\left(\frac{y}{x}\right) \leftarrow$ beliebig, stetig diff-bar

$$u_{1,2} = \pm\sqrt{yx + g\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Lineare / Quasilineare DGL 2. Ordnung

$$A \cdot u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

(Wobei A, B, C: $A(x, y, u, u_x, u_y)$, also selbst Funktionen)

Typ der PDGL:

$B^2 - AC > 0 \to$ hyperbolisch
$B^2 - AC = 0 \to$ parabolisch
$B^2 - AC < 0 \to$ elliptisch

Koordinatenwechsel: $U(\xi, \eta) = u(x, y)$

$$a \cdot U_{\xi\xi} + 2b\, U_{\xi\eta} + c\, U_{\eta\eta} = \tilde{f}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= A \cdot \xi_x^2 + 2B\, \xi_x \cdot \xi_y + C \cdot \xi_y^2 \\ b &= A \cdot \xi_x \eta_x + B(\xi_x \cdot \eta_y + \xi_y \cdot \eta_x) + C \cdot \xi_y \cdot \eta_y \\ c &= A \cdot \eta_x^2 + 2B \cdot \eta_x \eta_y + C \cdot \eta_y^2 \end{aligned}\right\}$$ Kettenregel anwenden, um darauf zu kommen

Lösungsansätze:

- Hyperbolische DGL: $\boxed{U_{\xi\eta} = \frac{\tilde{f}}{2b}}$
- Parabolische DGL: $\boxed{U_{\eta\eta} = \frac{\tilde{f}}{c}}$
- Elliptische DGL: $\boxed{U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = \frac{\tilde{f}}{a}}$

Wobei $\xi = \frac{B}{A} + \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}$

$\eta = \frac{B}{A} - \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}$

Produktansatz / Trennungsansatz

Gilt nur für PDGl, wo u, u_x, u_y, u_{xx} und u_{yy} auftreten, **ohne u_{xy} oder u_{yx}!**

$$a \cdot u_{xx} + c \cdot u_{yy} + d \cdot u_x + e u_y + f \cdot u = 0$$

$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$ (Funktionen nach 1 Variable!)

$$\Rightarrow a \cdot \frac{X''(x)}{X(x)} + c \cdot \frac{Y''(y)}{Y(y)} + d \cdot \frac{X'(x)}{X(x)} + e \cdot \frac{Y'(y)}{Y(y)} + \underbrace{f}_{f_1(x) + f_2(y)} = 0$$

$$\underbrace{\frac{aX''}{X} + \frac{dX'}{X} + f_1}_{\text{Hängt nur v. } x \text{ ab}} = \underbrace{-\left(\frac{cY''}{Y} + \frac{eY'}{Y} + f_2\right)}_{\text{Hängt nur v. } y \text{ ab}}$$

$\Rightarrow$ **Müssen beide konstant sein!**

$$\frac{aX''}{X} + \frac{dX'}{X} + f_1 = -\left(\frac{cY''}{Y} + \frac{eY'}{Y} + f_2\right) = \lambda \text{ (Konstante)}$$

Gewöhnliche DGL 2. Ordnung

Bsp.: Wellengleichung $u_{xx} = c^2 u_{tt}$

$$U = X(x) \cdot T(t)$$

$$T(t) \cdot X''(x) = c^2 \cdot X(x) \cdot T''(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X} = c^2 \cdot \frac{T''(t)}{T} = \lambda$$

$$X'' = \lambda X \quad ; \quad T'' = \frac{\lambda}{c^2} \cdot T$$

Mittels Exponentialansatz lösen

9.2. AUFLÖSUNG VON GLEICHUNGEN UND GLEICHUNGSSYSTEMEN

- neben algebraische Gl. (treten bei der Nullstellbestimmung von Polynomen auf) => transzendente Gl.
  $e^x - 100x = 0$ (nicht exakt lösbar)
- schrittweise Best. von Lösungen x einer Gl. $f(x) = 0$
  $f: J \to \mathbb{R}$ f-stetig $J \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen
- Funktion $\varphi: J \to \mathbb{R}$ $\varphi(x) = x - f(x)$
  $f(x) = 0 \iff \varphi(x) = x$
- jede Nullstelle x^* von f (jede Lösung $f(x^*) = 0$) erfüllt die Bedingung $\varphi(x^*) = x^*$ => x^* = Fixpunkt von φ
- mit Hilfe des Startwertes x_0 eine Folge (x_n) $n \geq 0$ konstruieren: $x_{n+1} = \varphi(x_n)$
- ist die Folge konvergent u. gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ $\xrightarrow{\text{Stetigkeit von } \varphi}$

  $x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_n) = \varphi(x^*)$

  => x^* - Fixpunkt (Folgenglieder werden den Fixpunkt schrittweise approximieren)
- schrittweise Annäherung an die Lösung = Iterationsverfahren

φ – Iterationsfunktion
(x_n) - Iterationsfolge - konvergent => Iterationsverfahren konvergent.

! FIXPUNKTSATZ: sei $\varphi: J \to \mathbb{R}$ eine kontrahierende Abbildung von einem kompakten Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$
↳ erfüllt folgende Bedingungen:
- $\varphi(x) \in J \ \forall x \in J$ $\quad \varphi(J) = J$
- φ genügt der Lipschitzbedingung:

$$|\varphi(x) - \varphi'(x)| \leq \lambda \cdot |x - x'| \ \forall x, x' \in J \text{ mit } 0 < \lambda < 1$$

Lipschitz konst.

=> dann besitzt φ genau einen Fixpunkt $x^* \in J$ - Limes der Iterationsfolge (x_n) mit $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ $n = 0, 1, 2, \ldots$ für jeden beliebigen Startwert $x_0 \in J$

-> die Funktion $\varphi : J \to \mathbb{R}$ erfüllt eine Lipschitz-bedingung mit der Konstanten λ, wenn φ stetig differenzierbar ist und auf J gilt:
$|\varphi'(x)| \leq \lambda$

NEWTON'SCHES NÄHERUNGSVERFAHREN

- f - zweimal auf J stetig differenzierbar u. es gilt: $f'(x) \neq 0 \;\; \forall x \in J$ => Newton'sche Näherungsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- sowohl bei einfachen, als auch bei mehrfachen Nullstellen (von $f(x)$ und $f'(x)$ anwendbar
- quadratische Konvergenz (Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens => Konvergenzordnung) = Fehler im $(n+1)$. Schritt annähernd proportional zum Quadrat des Fehlers im n. Schritt

REGULA FALSI

- f - stetig (nicht notwendig differenzierbar) auf J
- Differentialquotient $f'(x)$ im Newton'schen Näherungsformel durch einen Differenzenquotienten ersetzen

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- zwei Startwerte x_0 und x_1, sodass $f(x_0)$ und $f(x_1)$ - entgegengesetztes Vorzeichen => Zwischenwertsatz:

zw. x_0 und x_1 liegt sicher eine Nullstelle

$\Rightarrow$ x_2 mit der Formel mit $n=1$ berechnen

- Verfahren mit x_2 und x_i sodass $f(x_2)$ und $f(x_i)$ entgegengesetztes Vorzeichen besitzen
- das Verfahren (Standardform - Formel, ∃ auch Primitivform) konvergiert stets gegen eine Nullstelle x^* von f, falls x_0 und x_1 nahe genug bei x^* gewählt werden
- Konvergenzordnung p - goldener Schnitt u. Rechenaufwand

9.3. VERFAHREN ZUR LÖSUNG LINEARER GLEICHUNGSSYSTEME

- direkte Verf. - exakte Verfahren - keinen Verfahrensfehler, z.B.: Gauß'sche Eliminationsverfahren u. Cramer'sche Regel
- iterative Verfahren - die Lösung des Systems wird schrittweise angenähert
  - → ausgehend von einer Näherungslösung $\vec{x}_0$ als Startvektor bildet man eine Folge von Vektoren $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots$ im $\mathbb{R}^n$
  - → konvergiert die Folge $(\vec{x}_k)$ gegen einen Vektor $\vec{x}^*$ ⇒ konvergenten n-dimensionalen Iterationsverfahren zur Bestimmung von $\vec{x}^*$

GAUß'SCHES ELIMINATIONSVERFAHREN MIT PIVOTISIERUNG

1. problematisch: betragsmäßig kleine Pivotelemente (El. in der Diagonalen der Dreiecksmatrix - durch diese muss man dividieren) ⇒ in jedem Schritt das jeweils größte El. in der rechten unteren Restmatrix durch Zeilen- u. Spaltenvertauschungen zum Pivotel. zu machen ⇒ Pivotisierung

- **bei von** Zeile zu Zeile unterschiedlichen Größenordnungen der Koeffizienten in der Systemmatrix - durch Zeilenmultiplikationen ⇒ einheitliche Skalierung

2. nach der Transformation auf Halbdiagonalform kann es zur Auslöschung von Dezimalstellen kommen ⇒ schlechte Kondition (durch Rechnung mit höherer Genauigkeit oder durch Nachiteration verbessert)

GESAMTSCHNITTVERFAHREN VON JACOBI

- Lösung des Systems ausgehend von einer groben Näherungslösung schrittweise verbessert
- lineares $n \times n$ Gleichungssystem der Form $A\vec{x} = \vec{b}$

  $|A| \neq 0 \implies$ Lösung = eindeutig
- additive Zerlegung der Systemmatrix $A = (a_{ij})$ in:
  - untere Dreiecksmatrix U (ohne Diagonale)
  - Diagonalmatrix Δ
  - obere Dreiecksmatrix O

  $\rightarrow A = U + \Delta + O$

$a_{ii} \neq 0 \ \forall i$ (durch Zeilenvertauschungen stets erreichbar)

$$A\vec{x} = \vec{b} \implies \Delta\vec{x} = -(U+O)\vec{x} + \vec{b}$$

- Lösung $\vec{x}$ ist Fixpunkt der Iteration

$$\vec{x}_{k+1} = \varphi(\vec{x}_k) = \Delta^{-1}\left(-(U+O)\vec{x}_k + \vec{b}\right)$$

- in Koordinaten angeschrieben:

$$x_{k+1}^{[i]} = \frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} \cdot x_k^{[j]} + b_i\right) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$x_k^{[i]}$ – i-te Komponente der k-ten Näherung $\vec{x}_k$

- Konvergenz des Verfahrens wenn eine Bed. erfüllt:

Quadratensummenkriterium
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)^2} < 1$$

Zeilensummenkriterium
$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

Spaltensummenkriterium
$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \qquad j = 1, \ldots, n$$

- große Diagonalelemente

EINZELSCHRITTVERFAHREN VON GAUß-SEIDEL

- bei einem Gesamtschrittverfahren: in einem Iterationsschritt werden alle Koordinaten der Näherung $\vec{x}_{k+1}$ aus jenen von $\vec{x}_k$ bestimmt
- bei einem Einzelschrittverfahren: zur Berechnung der einzelnen Koordinaten $x_{k+1}^{[i]}$ werden die iterativ verbesserten Werte der zuvor berechneten Koordinaten $x_{k+1}^{[j]}$ vom $\vec{x}_{k+1}$ verwendet $\Rightarrow$ rasche Konvergenz

$$\begin{cases} A\vec{x} = \vec{b} \\ A = U + D + O \end{cases} \Rightarrow (U+D)\vec{x} = -O\vec{x} + \vec{b}$$

$\Rightarrow$ Iteration $\vec{x}_{k+1} = \varphi(\vec{x}_k) = (U+D)^{-1}(-O\vec{x}_k + \vec{b})$

- NICHT Matrix $(U+D)^{-1}$ berechnen $\Rightarrow$

$$(U+D)\vec{x}_{k+1} = -O\vec{x}_k + \vec{b}$$

$$\vec{x}_{k+1} = D^{-1}\left(-U\cdot\vec{x}_{k+1} - O\vec{x}_k + \vec{b}\right)$$

- im Koordinaten ausgedrückt:

$$x_{k+1}^{[i]} = \frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\cdot x_{k+1}^{[j]} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\cdot x_k^{[j]} + b_i\right) \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{matrix}$$

- Konvergenz: Zeilensummenkr. oder Spaltensummenkr.

9.4. APPROXIMATION UND INTERPOLATION

- stetige Fkt $f: I \to \mathbb{R}$ $\quad I \subseteq \mathbb{R}$
- f durch eine Ersatzfkt. $p: I \to \mathbb{R}$ näherungsweise darstellen (Polynomfkt i.A.)
- Approx: über eine Minimalbedingung eine möglichst gute Übereinstimmung zw. f und p in I erreichen
- Interpolation - über eine Inzidenzbedingung $f(x_i) = p(x_i)$ für vorgegebene Argumente $x_i \in I$ formuliert
- viele Werte von f bekannt (+ Messfehler) $\Rightarrow$ Approx.
- wenige Werte von f (+ exakt) $\Rightarrow$ f interpolieren

(1) APPROXIMATION - AUSGLEICHSGERADE

- von f endlich viele Wertepaare (x_i, y_i) mit $y_i = f(x_i)$ $i = 1, 2, \dots, n$ bekannt $\Rightarrow$ Polynom p nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt, sodass die Quadratsumme - minimal

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - p(x_i) \right)^2$$

- linearer Ansatz: $p(x) = a + bx$ $\Rightarrow$ die Funktion

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

in den beiden Var. a u. b (Parameter der Ersatzfkt. p) **minimieren**

- dazu: Verschwinden der ersten partiellen Ableitungen notwendig

$$1) \quad \frac{\partial Q}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)(-1) = 0$$

$$2) \quad \frac{\partial Q}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)(-x_i) = 0$$

$\Rightarrow$ 1) $\sum y_i = na + b \sum x_i \Rightarrow \bar{y} = a + b\bar{x}$ $\qquad$ $\bar{x}, \bar{y}$ - arithm. Mittel

$$\boxed{a = \bar{y} - b\bar{x}}$$

- wobei $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$ und $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$ – arithmetische Mittelwerte der Koordinaten
- Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ liegt auf der Ersatzgeraden $y = a + bx$

=> in 2) einsetzen

$$\boxed{b = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}}$$

- Ausgleichsgerade der Punkte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$
- Forderung nach Minimierung der Fehlerquadrat-summe Q => bestmögliche Gerade durch diese Punkte

② INTERPOLATION – POLYNOMFUNKT. (allg. Ansatz)

- Ersatzfkt. p finden, welche an best. Stellen mit f exakt übereinstimmt
- gegeben: Punkte (x_i, y_i) mit $f(x_i) = y_i$ $i = 0, 1, \dots, n$

=> die gesuchte Fkt. p muss die Bed. $p(x_i) = y_i \; \forall i$ erfüllen

- wenn p = Polynomfkt => p = Interpolationspolynom zu den Interpolationsstellen (x_i, y_i) $i = 0, 1, \dots, n$

  x_i = Stützstellen

  y_i = Stützwerte

SATZ: zu $n+1$ Interpolationsstellen (x_i, y_i) $i = 0, 1, \dots, n$ mit paarweise verschiedenen Stützstellen x_i gibt es genau ein Interpolationspolynom p, dessen Grad höchstens n hat.

- das eindeutige Interpolationspolynom p zu dem System von Interpolationsstellen $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ mit dem allgemeinen Ansatz gewonnen:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

=> lineare Gleichungssystem

$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_n x_i^n = y_i \quad i = 0, 1, \ldots, n$

- Matrixschreibweise:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n & y_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n & y_n \end{array} \right)$$

- Determinante des Systems = Vandermond'sche Determinante $= \prod_{i<j} (x_j - x_i)$

- Koeffizienten a_i des Interpolationspolynoms = eindeutig wenn alle Stützstellen - paarweise verschieden

(3) INTERPOLATION NACH LAGRANGE

- Interpolationspolynome - explizit angegeben

$$\boxed{L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \ldots (x_i - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)}}$$

- Polynome für $i = 0, 1, \ldots, n$

=> das Lagrange'sches Interpolationspolynom bilden

$$\boxed{p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x)}$$

- alle $L_i(x)$ - Polynome vom Grad n

$L_i(x_i) = 1$ und $L_i(x_j) = 0$ für $i \neq j$

=> p = Polynom dessen Grad höchstens n ist

- p erfüllt Interpolationsbedingungen:

$$p(x_i) = y_i \quad \forall i$$

=> p = gesuchte Interpolationspolynom.

④ INTERPOLATION NACH NEWTON

- Newton'sches Interpolationspolynom:

$$\boxed{p(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + b_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})}$$

- Einsetzen der Interpolationsstellen => Gleichungssyst. für Koeff. b_i (bereits in Dreiecksform)
- ein neuer Stützpunkt hinzu => um einen Summand erweitert u. Koeff. b_{n+1} neu berechnet (alles was bereits existiert bleibt unverändert - **bei Lagrange** nicht)
- praktische Berechnung der Koeff - **Interpolations**-polynom vom Grad $\leq k$

$$p_{0\ldots k}(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + b_k(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})$$

- Koeff. b_k von x^k in $p_{0\ldots k}(x)$ durch Interpolationsstellen eindeutig bestimmt (unabhängig von deren Reihenfolge)

$b_k = f[x_0, \ldots, x_k]$ k-ten Differenzenquotienten
k-te dividierte Differenz

↳ Berechnung rekursiv

- $\boxed{x = x_0}$ im Interpolationspolynom einsetzen
0-te Differenzenquotient $f(x_0) = b_0 \Rightarrow b_0 = f[x_0] = f(x_0)$
- $\boxed{x = x_1} \Rightarrow f(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) \Rightarrow b_1 = f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$
erste Differenzenquotient

- $\boxed{x = x_2}$ zweite Differenzenquotient

$$f(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

$$\Rightarrow b_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_0]}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} - \frac{f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}$$

(Stützstellen vertauscht) $$= \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

- der k-te Differenzenquotient kann rekursiv aus 2 Differenzenquotienten der Ordnung $k-1$ berechnet werden

SATZ: für den k-ten Differenzenquotienten $f[x_0,\dots,x_k]$ der Funktion f an den Stellen $x_0,\dots,x_k$ gilt:

$$f[x_0,\dots,x_k] = \frac{f[x_1,\dots,x_k]-f[x_0,\dots,x_{k-1}]}{(x_k-x_0)} \qquad k \geq 1$$

- Differenzenquotienten $b_k = f[x_0,\dots,x_k]$ mit dem Differenzenschema berechnen

x_0	$f[x_0]$			
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

$$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$$

$$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$$

- Werte in der Hauptdiagonalen = Koeff. b_k

5 SPLINE INTERPOLATION

- Polynome höheren Grades vermeiden (Fehler zw. Stützstellen möglich) => stückweise Interpolation mit Hilfe von Polynomen niedrigeren Grades
- Ersatzfunktionen = Splines
- **nat. kubische Splines** = zweimal stetig differenzierbare Fkt. - **stückweise** aus Polynomen 3. Grades zusammengesetzt, die an den Anschlussstellen im Funktionswert, Steigung u. Krümmung übereinstimmen
- zu einem gegebenen System von Interpolationsstellen (x_i, y_i) $i = 0, 1, \dots, n$ bestimmt man die natürliche kubische Splinefkt. $s(x)$: im jedem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ ist $s(x)$ ein Polynom 3. Grades

$$s(x) = p_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$
$$x_{i-1} \le x \le x_i \qquad i = 1, \dots, n$$

- Koeffizienten a_i, b_i, c_i und d_i werden aus den folgenden Bedingungen bestimmt:
  - Interpolationsbed. $(n+1)$ $\left\{ \begin{array}{l} p_1(x_0) = y_0 \\ p_1(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ p_n(x_n) = y_n \end{array} \right.$
  - Anschlussbed. $3(n-1)$ $\left\{ \begin{array}{l} p_i(x_i) = p_{i+1}(x_i) \\ p_i'(x_i) = p_{i+1}'(x_i) \\ p_i''(x_i) = p_{i+1}''(x_i) \end{array} \right.$ $\quad i = 1, \dots, n-1$
  - Randbed. 2 $\left\{ \begin{array}{l} p_1''(x_0) = 0 \\ p_n''(x_n) = 0 \end{array} \right.$

$4n$ Bed. => $4n$ Polynomkoeff.

9.5. NUMERISCHE INTEGRATION

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b p(x)\,dx + \int_a^b r(x)\,dx = Q(a,b) + R(a,b)$$

$Q(a,b)$ – Quadraturformel

$R(a,b)$ – Restglied

① SEHNENTRAPEZREGEL

- Unterteilung des Integrationsintervalls $[a,b]$ durch äquidistante Stützstellen $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ in n Teilintervall gleicher Länge $n \geq 1$
- Länge der Teilintervale $h = \frac{b-a}{n}$ = Schrittweite des Verfahrens
- für die $n+1$ Stützstellen gilt: $x_i = x_0 + ih$
- entsprechende Funktionswerte $y_i = f(x_i)$ $i = 0, 1, \dots n$
- das bestimmte Integral durch eine Zwischensumme approximieren

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

- man wählt: $f(\xi_i) = \dfrac{y_{i-1} + y_i}{2}$ und $\Delta x_i = h$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0+y_1}{2} + \frac{y_1+y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right)$$

$$= \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n\right)$$

$h = \frac{b-a}{n}$ einsetzen $\Rightarrow$ Quadraturformel od. Sehnentrapezregel

$$Q^{ST}(a,b) = \frac{b-a}{2n}\left(y_0 + 2y_1 + 2 \quad + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right)$$

- f zweimal stetig differenzierb : Integrationsfehler

$$R^{ST}(a,b) = -\frac{b-a}{12} h^2 \cdot f'' \quad)$$

mit einem geeigneten $\xi \in [a,b]$

- Fehlerordnung $O(h^2)$ für $h \to$

② KEPLER'SCHE FASSREGEL

- Integranden $f(x)$ nicht durch eine lineare, sondern quadratische Fkt. app x.
- Integrationsintervall $[a,b]$ in Teilintervalle teilen, mit den Stützstellen x_0 a ; $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$ u. Stützwerten $y_0 = f(x_0)$, y_1 $f(x_1)$; $y_2 = f(x_2)$
- Schrittweite $h = \frac{b-a}{2}$
- durch die drei Punkte (x_i, y_i) $=0,1,2$ ist die Interpolationsparabel $p(x)$ ig bestimmt

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= -h \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= h \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Interpolations olynome nach LAGRANGE}$$

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

$$= y_0 \frac{x(x-h)}{2h^2} + y_1 \frac{(x+h)(x-h)}{-h^2} + y_2 \cdot \frac{(x+h)x}{2h^2}$$

$\Rightarrow$ **Integration**

$$\int_a^b p(x)\,dx = \frac{y_0}{2h^2}\int_{-h}^{h} x(x-h)\,dx - \frac{y_1}{h^2}\int_{h}^{h} (x+h)(x-h)\,dx + \frac{y_2}{2h^2}\int_{-h}^{h}(x+h)x\,dx =$$

$$= \frac{y_0}{2h^2} \cdot \frac{2h^3}{3} - \frac{y_1}{h^2}\left(-\frac{4h^3}{3}\right) + \frac{y_2}{2h^2} \cdot \frac{2h^3}{3}$$

$$= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

$h = \frac{b-a}{2}$ einsetzen $\Rightarrow$ Kepler'sche Fassregel

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}$$

③ SIMPSON'SCHE REGEL

- wiederholte Anwendung der Kepler'schen Fassregel
  $\Rightarrow$ Verbesserung der Genauigkeit
- Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ in eine gerade Anzahl $2n$ von Teilintervallen $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n} = b$
- Schrittweite $\frac{b-a}{2n}$
- die Funktion $f(x)$ wird auf jedem Teilintervall $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ durch das quadratische Interpolationspolynom zu den Stellen (x_{2i-2}, y_{2i-2}), (x_{2i-1}, y_{2i-1}), (x_{2i}, y_{2i}) für $i = 1, \dots, n$ ersetzt
- Ersatzfunktion = quadratische Splinefunktion

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + \dots + y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right)$$

$h = \frac{b-a}{2n}$ einsetzen $\rightarrow$ Quadraturformel

Simpson'sche Regel

$$Q^{Si}(a,b) = \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right)$$

$n = 1 \Rightarrow$ Kepler'sche Fassregel

- Restglied $\quad R^{Si}(a,b) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$

- Verfahrensfehler der Ordnung $O(h^4)$
- Simpson'sche Regel liefert den genauen Wert des Integrals, falls f eine Polynomfunktion von höchstens drittem Grad ist.

In den folgenden Seiten ist noch eine Zusammenfassung für die Rechenbeispiele zur Numerik!

NUMERIK - kurz

FIXPUNKTSATZ: sei $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ - kontrahierende Abbildung von J in sich selbst
- $\varphi(x) \in J \ \forall x \in J$
- Lipschitzbed.: $|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq \lambda \cdot |x - x'| \ \forall x, x' \in J$, $0 < \lambda < 1$

$\Rightarrow \exists$ genau einen Fixpkt $x^* \in J \rightarrow$ Iterationsfolge (x_n) konvergiert gegen diesen $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ $\forall$ beliebigen Startwert $x_0 \in J$

$x^* = \lim_{n \to \infty} x_n$

$\rightarrow \varphi$ erfüllt Lipschitzbed.
- φ stetig differenzierbar
- auf J: $|\varphi'(x)| \leq \lambda$

NEWTON'SCHES NÄHERUNGSVERFAHREN

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

REGULA FALSI

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

GLEICHUNGSSYSTEME $A\vec{x} = \vec{b}$

$A = U + D + O$

U: untere Dreiecksmatrix; D: Diagonalmatrix; O: obere Dreiecksmatrix

Konvergenz: Zeilen / Spalten - summenkriterium

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1 \quad i = 1, \dots, n$$

analog Spalten.

GESAMTSCHRITT - JACOBI

$$x_{k+1}^{[i]} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot b_i - \frac{1}{a_{ii}} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} \cdot x_k^{[j]} \qquad i = 1, \dots, n \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

EINZELSCHRITT - GAUß SEIDEL

$$x_{k+1}^{[i]} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot b_i - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_{k+1}^{[j]} - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \, x_k^{[j]} \qquad i = 1, \dots, n \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

APPROXIMATION

- Methode der kl. Quadrate $Q = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - p(x_i))^2$
- linearer Ansatz: $p(x) = a + bx$ $\quad Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$

$$\left. \begin{aligned} \bar{y} &= a + b\bar{x} \\ b &= \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Ausgleichsgerade}$$

$\bar{x}, \bar{y}$ - arithmetisches Mittel

INTERPOLATION

LAGRANGE $\quad L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ $\quad$ Interpolationspolynom $p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$

NEWTON $\quad p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

x_0 einsetzen $\Rightarrow b_0$

x_1 einsetzen $\Rightarrow b_1$ ...

INTEGRATION

SEHNENTRAPEZREGEL: $h = \frac{b-a}{n}$

$$Q^{ST}(a,b) = \frac{b-a}{2n}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n\right)$$

$$x_i = x_0 + ih \qquad y_i = f(x_i)$$

KEPLER'SCHE FASSREGEL

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

↳ ALLGEMEIN: SIMPSON'SCHE REGEL

- $2n$ Intervallteilen $h = \frac{b-a}{2n}$

$$Q^{SI}(a,b) = \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4 + \dots + y_{2n-2} + y_{2n-1} + y_{2n}\right)$$

SIMULATION - DIFFERENTIALGL.

INTEGRATION

EULER'SCHES POLYGONZUGVERFAHREN

$$\int_{x_0}^{x_0+h} y'(x)dx = y(x_0+h) - y(x_0) =$$

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y(x))dx \Rightarrow$$

$$y(x_0+h) = y_0 + \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y(x))dx}_{\text{Rechtecksformel}}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x))dx \approx h f(x_0, y_0)$$

$\Rightarrow$ Näherung $y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$

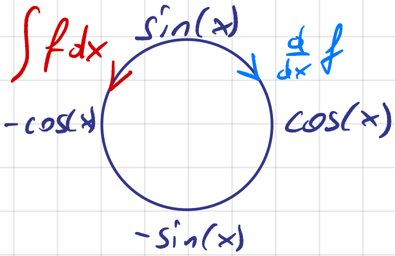
$\hookrightarrow$ allgemein:

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

scwp.com

Allgemeine:



Ableitungseigenschaften:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f'(x_0) = 0$ … kein Anstieg / Konstant
$f'(x_0) > 0$ … Wachstum
$f'(x_0) < 0$ … Abfall

$f''(x_0) = 0$ … Wendepunkt / keine Krümmung
$f''(x_0) > 0$ … Konvex / Tiefpunkt
$f''(x_0) < 0$ … Konkav / Hochpunkt

<u>Integrationsmethoden</u>:

<u>Substitution</u>

1. u auswählen
2. $\frac{du}{dx} = u' \Rightarrow dx = \frac{du}{u'}$
3. dx in Ursprungsintetral einsetzen
4. Integral nach du lösen und Rücksubstituieren

$\int \frac{2x}{x^2}\,dx \qquad u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = u' = 2x$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$\int \frac{\cancel{2x}}{u} \cdot \frac{du}{\cancel{2x}}$

$= \ln|u| + c \Rightarrow \ln|x^2| + c$

<u>Partielle Integration</u>

$u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Bsp.:

$\int \underset{u}{x}\, \underbrace{e^x dx}_{dv}$

$x \cdot e^x - \int e^x \cdot 1\, dx$

$= x e^x - e^x = e^x(x-1)$

Integration mit Hilfe von Partialbruchzerlegung

Unterscheidung von 3 Fällen:

1.Fall:
Grad des Zählers ist kleiner als der Grad des Nenners und der Nenner ist in Binärfaktoren zerlegbar, welche reell und verschieden sind.

2.Fall:
Der Grad des Zählers ist kleiner als der Grad des Nenners und Nenner ist in Linearfaktoren zerlegbar, welche reell aber **nicht** verschieden sind.

3.Fall:
Der Grad des Zählers ist **größer oder gleich** als der Grad des Nenners.

1. Fall:

$$\int \frac{3}{x^2+3x+2}\,dx \longrightarrow x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$x_1 = -\frac{2}{2} = -1$, $x_2 = -\frac{4}{2} = -2$ ... Zwei Nullstellen.

Jedes Polynom kann aus Faktoren der Nullstellen dargestellt werden.
$P(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$

$$\Rightarrow p(x) = x^2+3x+2 = (x-(-1))(x-(-2)) = (x+1)(x+2)$$

$$\frac{3}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \quad / \cdot (x+1)(x+2)$$

$$3 = A(x+2) + B(x+1)$$

$$3 = Ax + 2A + Bx + B$$

$$x^0 \cdot 3 = x(A+B) + x^0(2A+B)$$

Koeffizientenvergleich:

$x^0: \quad 3 = 2A + B \qquad 3 = 2A - A = A \quad 2$

$x^1: \quad 0 = A + B \Rightarrow B = -A \qquad B = -3$

$$\Rightarrow \int \frac{3}{x^2+3x+2}\,dx = \int \frac{3}{x+1} - \frac{3}{x+2}\,dx = 3\int \frac{1}{x+1}\,dx - 3\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= 3\ln|x+1| - 3\ln|x+2| + C = 3(\ln|x+1| - \ln|x+2|) + C = 3\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$$

2. Fall: (doppelte Nullstelle - jeder Grad der Nullstelle in eigenen Bruch)

$$\int \frac{3x^2+8x+2}{x^3+2x^2+x}\,dx \longrightarrow x(x^2+\overset{p}{2}x+\overset{q}{1}) \quad x_1=0 \quad \text{(Produkt-Nullsatz)}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\left(\tfrac{2}{2}\right)^2-1} = -1 \pm \sqrt{\tfrac{4}{4}-1} = -1 \pm \sqrt{0} = -1 \quad \text{doppelte-NS.}$$

$$x^3+2x^2+x = x\underbrace{(x+1)^2}_{\text{auf}} \quad \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2} \text{ aufteilen}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2+8x+2}{x^3+2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \quad \Big/ \cdot x(x+1)^2 \leftarrow \text{gleich dem Nenner links}$$

$$3x^2+8x+2 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

← Hier könnte man auch die Nullstellen einsetzen und so A, B, C berechnen.

$$3x^2+8x+2 = Ax^2+2Ax+A + Bx^2+Bx + Cx$$

$$3x^2+8x+2 = x^2(A+B) + x(2A+B+C) + x^0(A)$$

Koeffvgl.:

x^2: $3 = A+B$ $\quad 3 = 2+B \Rightarrow B=1$

x^1: $8 = 2A+B+C$ $\quad 8 = 4+1+C \Rightarrow C=3$

x^0: $2 = A$

$$\Rightarrow \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{3}{\underbrace{(x+1)^2}_{u=x+1}}\,dx$$

$$\frac{du}{dx} = u' = 1 \Rightarrow dx = du$$

$$\int \frac{3}{u^2}\,du = 3\int u^{-2}\,du = 3\cdot u^{-1} + c$$

$$= 3 \cdot \frac{-1}{x+1} + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{3}{x+1} + C$$

$$= 2\ln|x| + \ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + C$$

3. Fall: (Grad{Zähler} ≥ Grad{Nenner} – Polynomdivision durch den Nenner)

$$\int \frac{x^3-x^2+2x+2}{x^2-1}\,dx \longrightarrow (x^3-x^2+2x+2):(x^2-1) = x-1$$

$$\begin{array}{l} -(x^3-x) \\ \quad -x^2+3x+2 \\ \quad -(-x^2+1) \\ \qquad 3x+1 \;\; R \end{array}$$

$$\Rightarrow \int x+1+\frac{3x+1}{x^2-1}\,dx = \int x\,dx + \int 1\,dx + \int \frac{3x+1}{x^2-1}\,dx$$

↑ PBZ:

$$x_{1,2} = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2+1} = \pm 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

$$\Rightarrow \frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad / \cdot(x-1)(x+1)$$

$$3x+1 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$3x+1 = Ax + A + Bx - B$$

$$3x+1 = x(A+B) + x^0(A-B)$$

$$x^0: \; 1 = A - B \Rightarrow A = 1 + B$$

$$x^1: \; 3 = A + B$$

$$3 = 1 + B + B \; /-1$$

$$2 = 2B \; /:2$$

$$\underset{\sim}{B = 1}$$

$$\underset{\sim}{A} = 1+1 = \underset{\sim}{2}$$

$$= \int x\,dx + \int 1\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + \ln|x+1| + C$$

$$\frac{x^2+2x}{2} + \ln|(x-1)^2| + \ln|x+1| + C$$

$$\underline{\frac{x^2+2x}{2} + \ln|(x-1)^2\cdot(x+1)| + C}$$

Mathe2 Formelsammlung

Marco Handl

01. September 2011

Letzte Bearbeitung: 4. November 2011

Inhaltsverzeichnis

1 nützliche Formeln und Umformungen

1.1 nützliche Winkelfunktionen und Winkelfunktiosumformungen

$\cos^2(x) + sin^2(x) = 1$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} * cos(2x)$

$cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * cos(2x)$

$-2cos(x)sin(x) = -sin(2x)$

$2cos(x)sin(x) = sin(2x)$

$\sin(2x) = 2sin(x) \cdot \cos(x)$

$cos(2x) = cos^2(x) - sin^2 x$

$tan(2x) = \frac{2tan(x)}{1-tan^2(x)}$

$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$cos(a - \pi) = -cos(a)$

$sin(a - \pi) = -sin(a)$

$cosh(x) = cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$cot\varphi = \frac{cos\varphi}{sin\varphi} = \frac{1}{tan\varphi}$

1.2 Weitere Nützliche Formeln

Quadratische Gleichung:

groß : $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4*a*c}}{2a}$ (für Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$)

klein: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ (für Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$)

Kreisformel: $x^2 + y^2 \leq 1$

Verschobener Kreis: $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ dieser Kreis ist in x Richtung um 1 nach rechts verschoben

Kreisring: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 3$ Ellipsenformel: $\frac{x^2}{a^2} * \frac{y^2}{b^2} = 1$

Summenformeln: $\sum_{i=0}^{n-1} 4 = 4n$ $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ $\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6}$

1.3 Logarithmus-Rechenregeln

$ln(a) + ln(b) = ln(a \cdot b)$

$ln(a) - ln(b) = ln(\frac{a}{b})$

$n \cdot ln(a) = ln(a^n)$

$ln(e^n) = n$

$e^{ln(a)} = a$

Entlogerithmieren:

$ln(a) = b \Rightarrow a = e^b$

$ln(a) = ln(b) \Rightarrow a = b$

2 Funktionen in einer Variable

2.1 Ableitungen in einer Variable

2.1.1 Begriffsdefinitionen

Stetigkeit:

Eine Funktion ist stetig im Punkt x_0 wenn die Annäherung von links und von rechts zu diesem Punkt gleich ist.
$\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o+} f(x)$

Differenzierbar:

Differenzenquotient

wenn $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für beide Funktionen gleich sind.

2.1.2 Ableitung von Winkelfunktionen

$$\begin{array}{ccc} \sin(x) & \rightarrow & \cos(x) \\ \uparrow & & \downarrow \\ -cos(x) & \leftarrow & -sin(x) \end{array}$$

$$f(x) = \sin^2(x) \Rightarrow f'(x) = \sin(2x)$$
$$f(x) = \sin^2(4x) \Rightarrow f'(x) = 4\sin(8x)$$

$$f(x) = \cos^2(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(2x)$$
$$f(x) = \cos^2(10x) \Rightarrow f'(x) = -10\sin(20x)$$

(Hinweis: dies ist zurückzuführen auf die Winkelfunktionsumformung: $2cos(x)sin(x) = sin(2x)$)

äusseren Ableitungen der Umkehrfunktionen

$f(x) = \arcsin(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = \arccos(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

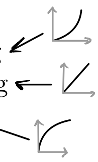
2.1.3 Ableitung des ln

$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

2.1.4 Kurvendiskussion

Die erste Ableitung gibt uns Auskunft über das Anstiegsverhalten einer Funktion f(x):
$f'(x) > 0 \Rightarrow$ Anstieg wird gröSSer.
$f'(x) < 0 \Rightarrow$ Anstieg wird kleiner (negativer).
$f'(x) = 0 \Rightarrow$ Anstieg ist konstant.

Die zweite Ableitung gibt daher analog Auskunft über das Anstiegsverhalten der ersten Ableitung. Dieses wiederum entspricht dem Krümmungsverhalten der ursprünglichen Funktion:
$f''(x) > 0 \Rightarrow$ positive Krümmung
$f''(x) < 0 \Rightarrow$ negative Krümmung
$f''(x) = 0 \Rightarrow$ keine Krümmung



Entwicklungsschritte zu Kurvendiskussionen:

1. Zunächst werden jene Ableitungen berechnet, die für die Kurvendisskusion benötigt werden ($f'(x) - f'''(x)$).

2. Nullstellen finden indem man $f(x) = 0$ setzt und nach x auflöst.

3. Extremwerte

   3.1 $f'(x)$ wird Null gesetzt und die Gleichung nach x gelöst. Somit hat man die x-Koordinate des potentiellen Extrempunkts.

   3.2 Diese x Komponente in die Ursprungsgleichung einsetzten und man erhält die y-Koordinate des potentiellen Extrempunkts.

   3.3 Einsetzten in $f''(x)$ gibt Auskunft, ob tatsächlich ein Hoch oder Tiefpunkt vorliegt.
   $f''(x) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt (positive Krümmung)
   $f''(x) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt (negative Krümmung)

4. Wendepunkte

   4.1 $f''(x)$ wird Null gesetzt und die Gleichung nach x gelöst. Somit hat man die x-Koordinate des potentiellen Wendepunkts.

   4.2 Diese x Komponente in die Ursprungsgleichung einsetzten und man erhält die y-Koordinate des potentiellen Wendepunkts.

   4.3 Einsetzten in $f'''(x)$ gibt Auskunft, ob tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt (Wendepunkt wenn Ergebnis $\neq 0$).

Beispiel:
Man diskutiere die Funktion $f(x) = sin(x) - \sqrt{3} - cos(x)$ im Intervall
$I = [-\pi, \pi]$
Das heiSSt nichts anderes als finde alle Nullstellen, Extemwerte und Wendepunkte.

---

1) Bildung der Ableitungen

$$\begin{aligned} f(x) &= sin(x) - \sqrt{3}\ cos(x) \\ f'(x) &= cos(x) + \sqrt{3}\ sin(x) \\ f''(x) &= -sin(x) + \sqrt{3}\ cos(x) \\ f'''(x) &= -cos(x) - \sqrt{3}\ sin(x) \end{aligned}$$

2) Nullstellen suchen ($f(x) = 0$ und nach x auflösen)

$sin(x) - \sqrt{3}cos(x) = 0 \Rightarrow -sin(x) = -\sqrt{3}cos(x) \Rightarrow$
$\frac{sin(x)}{cos(x)} = \sqrt{3} \Rightarrow tan(x) = \sqrt{3} \Rightarrow$
$x = arctan(\sqrt{3}) \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \quad x = -\frac{2\pi}{3}$

---

3) Extremwerte

3.1) $f'x = 0$ somit erhält man die x-Koordinate der Extrema

$cos(x) + \sqrt{3}sin(x) = 0 \Rightarrow cos(x) = -\sqrt{3}sin(x) \Rightarrow \frac{cos(x)}{sin(x)} = -\sqrt{3}$
$\frac{sin(x)}{cos(x)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}}) \Rightarrow \underline{\underline{x = -\frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{5\pi}{6}}}$

3.2) Werte aus 3.1 in f(x) einsetzen um die y-Koordinaten zu bekommen

$sin(-\frac{\pi}{6}) - \sqrt{3}cos(-\frac{\pi}{6}) = -2 \Rightarrow P(-\frac{\pi}{6}, -2)$
$sin(\frac{5\pi}{6}) - \sqrt{3}cos(\frac{5\pi}{6}) \quad = 2 \ \Rightarrow P(\frac{5\pi}{6}, -2)$

3.3) Werte aus 3.1 in $f''(x)$ einsetzen um Min,Max zu bekommen

$-sin(-\frac{\pi}{6}) + \sqrt{3}cos(-\frac{\pi}{6}) = 2 \Rightarrow -\frac{\pi}{6} = Minimum$
$-sin(\frac{5\pi}{6}) + \sqrt{3}cos(\frac{5\pi}{6}) \quad = 2 \ \Rightarrow \frac{5\pi}{6} = Maximum$

---

4) Wendepunkte

4.1) $f'' = 0$ somit erhält man die x-Koordinaten der Wendepunkte

$-sin(x) + \sqrt{3}cos(x) = 0 \Rightarrow sin(x) = \sqrt{3}cos(x) \Rightarrow$
$\sqrt{3} = \frac{sin(x)}{cos(x)} \Rightarrow x = arctan(\sqrt{3}) \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{\pi}{3}, \quad x = -\frac{2\pi}{3}}}$

4.2) diese Werte in $f(x)$ einsetzen um die y-Koordinaten des WP zu bekommen

$sin(\frac{\pi}{3}) - \sqrt{3}cos(\frac{\pi}{3}) = 0$
$sin(-\frac{2\pi}{3}) - \sqrt{3}cos(-\frac{2\pi}{3}) = 0$

4.3) diese Werte in $f'''(x)$ einsetzen um festzustellen ob ein WP vorliegt

$-cos(\frac{\pi}{3}) - \sqrt{3}sin(\frac{\pi}{3}) = -2$
$-cos(-\frac{2\pi}{3}) - \sqrt{3}sin(-\frac{2\pi}{3}) = 2$
Beide Ergebnisse $\neq 0 \Rightarrow$ beide sind Wendepunkte

2.2 Obersummen Untersummen

Obersumme: $O_z = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_0 + \frac{i}{n})$

Untersumme: $U_z = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} (x_0 + \frac{i}{n})$

x_0 = Integral Untergrenze (das was beim Integral unten steht $\int_{x_0}$)

$x_\nabla = \frac{1}{n}$ $\qquad i$ = Laufvariable

Beispiel Obersumme:

Berechne $\int_2^3 x^2 dx$ mit Hilfe von Untersummen.

laut obiger Formel ergibt sich:

$$U_z = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (2 + \frac{i}{n})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 4 + 4\frac{i}{n} + \frac{i^2}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 4 + \frac{4}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} 4 = 4n \qquad \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \qquad \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6}$$

wenn man das ausrechnet kommt man auf : $\frac{38n^2+15n+1}{6n^2}$

jetzt lasst man noch $n \to \infty$ laufen

$\lim_{n\to\infty} \frac{38n^2+15n+1}{6n^2}$ Division $/n^2 \Rightarrow \frac{38+\frac{15}{n}+\frac{1}{n^2}}{6} = \underline{\underline{6\frac{1}{3}}}$

2.3 Integration in einer Variable

2.3.1 Integration der Winkelfunktionen

$$\begin{array}{ccc} \sin(x) & \Leftarrow & \cos(x) \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ -\cos(x) & \Rightarrow & -\sin(x) \end{array}$$

$\int tan(x)dx = -ln(cos(x))$

$\int \frac{1}{cos^2(x)}dx = tan(x)$ $\int \frac{1}{sin^2(x)}dx = -cot(x)$

$\int sin^2(x)dx = \frac{1}{2}(x - sin(x)cos(x))$ $\int cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(x + sin(x)cos(x))$

Integration der Umkehrfunktionen

$\int \arcsin(x) = x * \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$

$\int \arccos(x) = x * \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$

$\int \arctan(x) = x * \arctan(x) - \frac{1}{2} * log(x^2+1)$

Dies kann leicht mittels partieller Integration überprüft werden.

Integration auf arctan(x)

$\int \frac{1}{x^2+1} = \arctan(x)$ $\int \frac{1}{2x^2+1} = \frac{\arctan(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}}$

$\int \frac{1}{x^2+5} = \frac{\arctan(\frac{x}{\sqrt{5}})}{\sqrt{5}}$ $\int \frac{1}{2x^2+5} = \frac{\arctan(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}*x)}{\sqrt{5}*\sqrt{2}}$

2.3.2 Integration von $\frac{1}{x}$ und ln(x)

$\int \frac{1}{x} = \ln(x)$

$\int \frac{1}{2+x} = \ln(2+x)$ $\int \frac{1}{2-x} = -\ln(2-x)$ (mittels Substitution)

$\int \ln(x) = x * ln(x-1)$ $\int \ln(3x) = x * ln(3x-1)$

$\int \ln(x^5) = x * ln(x^5-5)$ $\int \ln(3x^5) = x * ln(3x^5-5)$

$\int \ln(x+2) = (x+2) * ln(x+2) - x$ dies kann jedoch mit Substituion berechnet werden u=x+2

2.3.3 Integrationsmethoden

<u>Substitution</u>

1) u auswählen
2) $\frac{du}{dx} = u' \Rightarrow dx = \frac{du}{u'}$
3) die Ersatzwerte in Ursprungsintegral einsetzen
4) Integral lösen und Rücksubstituieren

Beispiel Substitution

$\int \frac{2x}{x^2} dx \Rightarrow u = x^2 \Rightarrow u' = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$\int \frac{2x}{u} \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{u} du = ln|u| = \underline{\underline{ln|x^2|}}$

<u>partielle Integration</u>

$u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Beispiel partielle Integration

$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x dx}_{dv}$

$u = x \Rightarrow du = 1$
$dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x = e^x$

$\Rightarrow x \cdot e^x - \int e^x \cdot 1 dx = x \cdot e^x - e^x = \underline{\underline{e^x(x-1)}}$

Partialbruchzerlegung

Hierbei werden 3 Fälle Unterschieden:

erster Fall:
Der Grad des Zählers ist kleiner als der Grad des Nenners und Nenner ist in Binärfaktoren zerlegbar, die reell und verschieden sind.

Rechenregeln:

1. Zerlegung Nenner in Linearfaktoren.
2. Zerlegung von $\frac{Z(x)}{N(x)}$ in Partialbrüche.
3. Bestimmung der Konstanten(A,B,..)
4. Einsetzen der Konstanten und Integration der geteilten Funktion

Beispiel:

$$\int \frac{\overbrace{3}^{Grad0}}{\underbrace{x^2+3x+2}_{Grad2}} dx$$

1) $x^2+3x+2 \Rightarrow x_{12} = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

Die Vorzeichen werden negiert und unsere Aufteilung lautet somit:
$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$.

2) $\frac{3}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$

3)In diesen Schritt kann man entweder die oben ermittelten Werte einsetzen oder man löst es mittels Koeffizientenvergleich. Hier mit Einsetzen.

$3 = A(x+2) + B(x+1); \quad x_1 = -1; \quad x_2 = -2$ einsetzen
$3 = A(-1+2) + B(-1+1) \Rightarrow A = 3$
$3 = A(-2+2) + B(-2+1) \Rightarrow B = -3$

4) $\int \frac{3}{x+1} dx + \int \frac{-3}{x+2} dx = 3\ln|x+1| - 3\ln|x+2| + C$

$\int \frac{3}{x^2+3x+2} = 3\ln|\frac{x+1}{x+2}| + C$

zweiter Fall:
Der Grad des Zählers ist kleiner als der Grad des Nenners und Nenner ist in Linearfaktoren zerlegbar, die reell aber **nicht** verschieden sind.

Rechenregeln:

1. Zerlegung Nenner in Linearfaktoren.
2. Zerlegung von $\frac{Z(x)}{N(x)}$ in Partialbrüche, wobei alle Potenzen $[(x-x_1)^1, (x-x_1)^2, ...]$ als Nenner zu berücksichtigen sind.
3. Bestimmung der Konstanten(A,B,..)
4. Einsetzen der Konstanten und Integration der geteilten Funktion

Beispiel:

$$\int \frac{\overbrace{3x^2+8x+2}^{Grad2}}{\underbrace{x^3+2x^2+x}_{Grad3}} dx$$

1) hier wird das ganze hin und wieder etwas blöd in was man etwas Zerlegen soll im Zweifelsfall man durch (x-1) dividieren, vielleicht erkennt man dann mehr.

$$x^3+2x^2+x = x*(x^2+2x^2+x) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_{23} = \frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2} = -1 \end{cases}$$

Die Vorzeichen werden negiert und unsere Aufteilung lautet somit:
$x^3+2x^2+x = x(x+1)^2$ das Quadrat aus dem Grund weil x_2 und x_3 gleich sind.

2) $\frac{3x^2+8x+2}{x^3+2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

3)In diesen Schritt kann man entweder die oben ermittelten Werte einsetzen oder man löst es mittels Koeffizientenvergleich. Hier mit Koeffizientenvergelich:

$x^3+2x^2+x = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$
$x^3+2x^2+x = x^2\cdot(A+B) + x\cdot(2A+B+C) + A$
$3 = A+B$
$8 = 2A+B+C$
$2 = A$
$\Rightarrow A = 2; B = 1; C = 3$

4) $\int \frac{2}{x} dx + \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{3}{(x+1)^2} dx = 2\ln|x| + \ln|x+1| + 3\cdot\frac{-1}{\sqrt{x+1}} + C$

$$\underline{\underline{\int \frac{3x^2+8x+2}{x^3+2x^2+x} dx = \ln|x^2\cdot(x+1)| - \frac{3}{\sqrt{x+1}} + C}}$$

dritter Fall:
Der Grad des Zählers ist **<u>größer oder gleich</u>** als der Grad des Nenners.

Rechenregeln:

1. Zähler durch Nenner dividieren(Polynomdivision). Man erhält dadurch in Quotienten einzelne Summanden und einen Restbruch.

2. Auf diesen ist dann Fall 1 oder Fall 2 anzuwenden.

Beispiel:

$\int \frac{x^3-x^2+2x+2}{x^2-1}dx$ Grad des Zählers = 3, des Nenner = 2.

1)$x^3 - x^2 + 2x + 2 : x^2 - 1 = x - 1$ und $3x - 1$ Rest.

$\Rightarrow x^3 - x^2 + 2x + 2 : x^2 - 1 = x - 1 + \frac{3x-1}{x^2-1}$

$\Rightarrow \int xdx - \int 1dx + \int \frac{3x+1}{x^2-1}$

das letzte Integral muss man jetzt nochmals mit partiell Zerlegen:

$$\frac{\overbrace{3x+1}^{Grad1}}{\underbrace{x^2-1}_{Grad2}} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$3x + 1 = A(x - 1) + B(x + 1)$
$3x + 1 = Ax - A + Bx + B$
$3 = A + B$
$1 = -A + B$
$\Rightarrow B = 2; A = 1$
$\Rightarrow \int xdx - \int 1dx + \int \frac{1}{x+1} + \int \frac{2}{x-1} = \frac{x^2}{2} - x + ln|x + 1| + 2ln|x - 1|$

$\int \frac{x^3-x^2+2x+2}{x^2-1}dx = \frac{x^2}{2} - x + ln|(x + 1) \cdot (x - 1)^2| + C$

3 Funktionen in mehreren Variablen

3.1 Quadratische Form

Wenn es heißt: bestimmen sie den Wert a sodass die quadratische Form *irgendein Polynom* positiv definit ist, dann rechnet man das folgendermaßen:

Polynom: $3x^2 + axy + 2xz + 2y^2 + 2yz + 2z^2$

$q(x, y, z) = (x, y, z) * \begin{pmatrix} R & R & R \\ R & R & R \\ R & R & R \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rx & Rx & Rx \\ Ry & Ry & Ry \\ Rz & Rz & Rz \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

$Rx^2 + Rxy + Rxz| + Ryx + Ry^2 + Ryz| + Rzx + Rzy + rz^2$
Das soll kein Betragszeichen sein sondern einfach nur eine Optische Trennung.

3.2 Homogenität von Funktionen

Ein k-dimensionaler Vektorraum ist homogen wenn gilt:

$$f(\alpha \cdot x_1, ..., \alpha \cdot x_n) = \alpha^r \cdot f(x_1, ..., x_n)$$

Beispiel für eine nicht homogene Funktion:

$$\begin{gathered} f(x, y) = ax^2 + y \\ f(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) = \alpha^r f(x, y) \\ a \cdot (\alpha x)^2 + \alpha y = \alpha^r (ax^2 + y) \\ a \cdot \alpha^2 x^2 + \alpha y = \alpha^r \cdot (ax^2 + y^2) \\ \underline{\underline{\alpha \cdot (\alpha x^2 + y) = \alpha^r \cdot (ax^2 + y)}} \end{gathered}$$

Diese Funktion ist nicht homogen da r keinen Wert annehmen kann damit die Gleichung richtig wäre.

3.3 Stetigkeit

Eine Funktion heißt stetig an der Stelle $\vec{x}_0 \in D$ falls $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$ und stetig auf D wenn f an jeder Stelle in D Stetig ist $\lim\limits_{\vec{x}, \vec{y} \to \vec{x}_0 \vec{y}_0} f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$

3.4 Grenzwert

Es existiert ein Gemeinsamer Grenzwert wenn:
$\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$

3.5 Tangentengleichung

Zur Berechnung der Tangente am Punkt x_0 gibt es folgende Formeln:

$\mathbb{R} : y = f(x_0) + f'(x) * (x - x_0)$
$\mathbb{R}^2 : z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) * (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) * (y - y_0)$

Beispiel für R^2:
Für die Funktion $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ berechne man die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $(x_0, y_0) = (0.2, 0.3)$

$f_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$
$f_x(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) * (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) * (y - y_0)$

$z = \sqrt{1 - 0.2^2 - 0.3^2} - \frac{0.2}{\sqrt{1-0.2^2-0.3^2}} * (x - 0.2) - \frac{0.3}{\sqrt{1-0.2^2-0.3^2}} * (y - 0.3)$

$z = 0.93 - 0.21x + 0.043 - 0.32y + 0.096$

$\underline{\underline{z = 1.07 - 0.21x - 0.32y}}$

3.6 implizite Funktionen

...sind Funktionen der Form $x^2y^2 - 1\underline{= 0}$ (**=irgendetwas** deutet auf eine implizite Form hin).
aus dem Hauptsatz für implizite Funktionen geht hervor das: $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$ ist.
Randbemerkung: $\frac{dy}{dx} = y'$; F_x = Ableitung nach x; F_y = Ableitung nach y

3.7 Taylorpolynom

$\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f_k(x_0)}{k!} * (x - x_0)^k$

d.h.: für die 2te Ordnung($\mathbb{R}^2$):

$$f(x, y) = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{k=0} + \underbrace{f_x(x_0, y_0) * (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) * (y - y_0)}_{k=1}$$
$$+ \underbrace{\frac{f_{xx}(x_0, y_0) * (x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0) * (x - x_0) * (y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0) * (y - y_0)^2}{2!}}_{k=2}$$

3.8 Richtungsableitung

Jede beliebige Ableitung z.B.:f_x leitet man immer Richtung des Ursprungs ab. Wenn man jedoch vom Punkt $\vec{x}_0$ in ein bestimmte Richtung $P(-1,-1)$ Ableiten möchte spricht man hierbei von einer Richtungsableitung.
Man geht folgendermaßen vor:

Richtungsableitung: $grad\ f \cdot \vec{e}$

$grad\ f$: ist der Gradient der Funktion $grad\ f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ .. \\ .. \end{pmatrix}$

$\vec{e}$: Einheitsvektor. Dieser berechnet sich folgendermaßen: $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|} * \vec{a}$.
$\vec{e}$ wird auch oft als $\vec{a_0}$ gekennzeichnet.
Leitet man Richtung Koordinatenachse ab so ist die Richtungsableitung auf der x-Richtung $gradf \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die y-Richtung $gradf \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beispiel zur Richtungsableitung:

$$f(x,y) = x^2 + 3y^2 \begin{cases} \rightarrow f_x = 2x \\ \rightarrow f_y = 6y \end{cases} \qquad \vec{x_0} = (1,2)$$

Ableitung in Richtung $P(-1,-1)$

$$grad\ f = \begin{pmatrix} 2x \\ 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|} * \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}} * \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} * \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung: $grad\ f \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{(-1)*2+(-1)*12}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{-\frac{14}{\sqrt{2}}}}$

Hinweise:

$grad\ f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ .. \\ .. \end{pmatrix}$ eingesetzt mit Werten = die Richtung des max. Anstieges

Wert dieses Anstiegs: $|grad\ f| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 + ...}$

3.9 Bestimmung der Extrema

1. Bildung der Partiellen Ableitungen erster Ordnung & 2ter Ordnung.
2. Bestimmung aller Nullstellen $\rightarrow$ alle Punkte welche für Extrema und Sattelpunkte in Frage kommen.
3. Jeden Punkt mit der Hessematix $H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$ durchspielen.

   Es gilt:

   - $H_f < 0 \rightarrow$ Sattelpunkt.
   - $H_f > 0$ & $f_{xx} \geq 0 \rightarrow$ pos. definit $\rightarrow$ Minimumpunkt.
   - $H_f > 0$ & $f_{xx} < 0 \rightarrow$ neg. definit $\rightarrow$ Maximumpunkt.

Beispiel:
Man bestimme alle relativen Extrema & Sattelpunkte von
$f(x,y) = (x^2 + y^2) - 2(x^2 - y^2)$

---

1)Bildung der Ableitungen $\qquad x^2+y^2-2x^2+2y^2$

0)$f(x,y) = (x^2 + y^2) - 2(x^2 - y^2)$
1)$f_x(x,y) = 2(x^2 + y^2) + 2x - 4x = 4x \cdot (x^2 + y^2 - 1)$
2)$f_y(x,y) = 4x^2y + 4y^3 - 4y = 4y(x^2 + y^2 - 1)$
3)$f_{xx}(x,y) = 12x^2 + 4y^2 - 4$
4)$f_{xy}(x,y) = 8xy$
5)$f_{yy}(x,y) = 4x^2 + 12y^2 - 4$

---

2)Bestimmung der Nullstellen

aus 1) $4x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{1 - y^2} \end{cases}$

1) in 2):

$x = 0: \quad 4y(0 + y^2 - 1) = 0 \Rightarrow 4y^3 - 4y = 0 \Rightarrow 4y(y^2 - 1) = 0 \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = \pm\sqrt{1} \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_1(0,0), \quad P_{2,3}(0,\pm1), \quad P_{4,5}(\pm1,0)}}$

---

1) und 2) gleichsetzten:
$4x \cdot (x^2 + y^2 - 1) = 4y \cdot (x^2 + y^2 - 1) \Rightarrow x = y$

in 1):
$4y(y^2 + y^2 - 1) = 0 \Rightarrow 8y^3 - 4y = 0 \Rightarrow 2y^3 - y = 0 \Rightarrow$
$y(2y^2 - 1) = 0 \begin{cases} y_1 = 0 \text{das wurde oben schon abgedeckt} \\ y_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{1}} \end{cases}$

in 2):
$4x(x^2 + x^2 - 1) = 0 \Rightarrow 8x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 2x^3 - x = 0$
$x(2x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \text{das wurde oben schon abgedeckt} \\ x_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{1}} \end{cases}$
$\Rightarrow \underline{\underline{P_{6-9}(\pm\frac{1}{\sqrt{1}}, \pm\frac{1}{\sqrt{1}})}}$

---

3)Einsetzen aller Punkte in die Hessematrix

$P_1(0,0): \quad \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 + 4y^2 - 4 & 8xy \\ 8xy & 4x^2 + 12y^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} =$

$(-4)*(-4) - 0*0 = 16 \Rightarrow H_f > 0 \& f_{xx} \leq 0 \rightarrow neg.definit \rightarrow Maximumpunkt.$

P_{2-9} :....

3.9.1 Berechnung der Extrema mit Nebenbedingungen (Lagrange Multiplikation)

Die Extremwerte einer Funktion $z = f(x, y)$, deren unabhängige Variablen x und y einer Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ unterworfen sind, lassen sich mit Hilfe des Lagrangeschen Multiplikatorverfahrens wie folgt bestimmen:

1. Aus der Funktionsgleichung $z = f(x, y)$ und deren Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ wird zunächst die Hilfsfunktion $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$ gebildet. Der (noch unbekannte) Faktor λ heißt Langrangescher Multiplikationsfaktor.

2. Dann werden die partiellen Ableitungen 1. Ordnung dieser Hilfsfunktion gebildet und gleich Null gesetzt:

$$\begin{aligned} F_x = f_x(x, y - \lambda \cdot g_x(x, y) = 0 \\ F_y = f_y(x, y) - \lambda \cdot g_y(x, y) = 0 \\ F_\lambda = g(x, y) = 0 \end{aligned}$$

   Aus diesem Gleichungssystem lassen sich die Koordinaten der gesuchten Extremwerte sowie der Lagrangesche Multiplikationsfaktor λ berechnen.

3. Diese so ermittelten Punkte wieder in die Ursprungsgleichung $(f(x, y, z))$ einsetzen. Ist das Ergebnis != 0 so ist der Punkt ein Extremwert.

Bei diesem Verfahren muss man sehr aufpassen das man keinen Punkt übersieht es gibt immer mehrere Komponenten(x,y,z,λ,.. die man ermitteln kann. Diese ermittelten Komponenten muss man mit allen Kombinationen in die anderen Gleichungen einsetzten um so viele wie mögliche Punkte zu erhalten.

Beispiel
Bestimmen sie die stationären Punkte der Funktion $f(x,y,z) = x + y + z^2$ unter den Nebenbedingungen: $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ und $x - y = 1$

1) Bildung der Hilfsfunktion

$F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) - \lambda \cdot g(x,y,z) - \mu \cdot h(x,y,z)$

2) Bildung der partiellen Ableitungen erster Ordnung

$F(x,y,z,\lambda,\mu) = x + y + z^2 - \lambda \cdot (x^2 - y^2 + z^2 - 1) - \mu \cdot (x + y - 1)$
$(1) F_x(x,y,z,\lambda,\mu) = 1 - \lambda 2x - \mu = 0$
$(2) F_y(x,y,z,\lambda,\mu) = 1 + \lambda 2y - \mu = 0$
$(3) F_z(x,y,z,\lambda,\mu) = 2z - 2\lambda z = 0$
$(4) F_\lambda(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$
$(5) F_\mu(x,y,z,\lambda,\mu) = -x - y = 0$

aus (3):
$z - \lambda z = 0 \Rightarrow z(\lambda - 1) = 0$
$\Rightarrow \underline{\underline{z = 0}}, \quad \underline{\underline{\lambda = 1}}$

aus (5): $x = -y$

$$\left.\begin{matrix} z = 0 \\ x = -y \end{matrix}\right\} \text{ in (4): } x^2 + x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda = 1 \\ x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} \end{matrix}\right\} \text{ in (1): } 1 - 2 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \mu = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\mu = 1 - \sqrt{2}}}$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda = 1 \\ \mu = \pm(1 - \sqrt{2}) \end{matrix}\right\} \text{ in (2): } y = \tfrac{\mu - 1}{2} = \pm\tfrac{(1-\sqrt{2})-1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{y = \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}}}$$

$P_1(+\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$; $P_2(+\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$; $P_3(-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$; $P_4(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$;

$$\lambda = 1 \left\{\begin{matrix} in(1): x = \frac{1-\mu}{2} \\ in(2): y = \frac{1+\mu}{2} \end{matrix}\right\} \text{ in(5)} \Rightarrow \mu = -\tfrac{1}{2} \left\{\begin{matrix} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{matrix}\right\} \text{ in(4)} \Rightarrow z = -\sqrt{\tfrac{11}{4}}$$

$P_5(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, +\sqrt{\frac{11}{4}})$; $P_6(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\sqrt{\frac{11}{4}})$;

3) Diese Punkte in die Ursprungsgleichung einsetzen

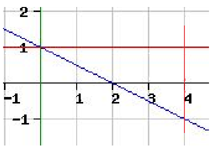
$P_1: \quad \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 0^2 = 0 \Rightarrow$ kein Extrema
$P_2: \quad \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 0^2 > 0 \Rightarrow$ Extrema
$P_3: \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 0^2 = 0 \Rightarrow$ kein Extrema
$P_4: \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 0^2 < 0 \Rightarrow$ Extrema
...

3.10 Bereichsintegrale

Das Blöde an Bereichsintegralen ist nicht das Integrieren selbst sondern das finden des Integrationsbereiches. Hier kann man Grundsätzlich 2 Fälle unterscheiden. Integration in Euklidischer Form und in Polarer Form. Die Polare Form bietet sich oftmals bei Winkelfunktionen und Kreisen an.
Es gibt verschiedene Wege die Integrationsgrenzen anzugeben:

1. als kartesisches Produkt $[a, b][c, d] \rightarrow \int_y^x \int_c^d ...dxdy$

2. als Funktionen z.b.: x=4, y=1 und x+2y=2



   hierbei sind die Integrationsgrenzen $\int_0^4 \int_{1-\frac{x}{2}}^1 \; dydx$. Wobei $\int_{1-\frac{x}{2}}^1 \; dy$ die Steigung der Blauen Linie ist.

3. In Punkten dies wäre für das obige Beispiel: (0,1), (4,-1),(4,1) hier muss man sich dann vorher eine kleine Skizze machen und die Funktion $y = 1 - \frac{x}{2}$ selbst herleiten.

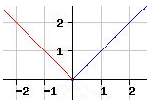
4. als Kreisformel $x^2 + y^2 \leq 1$ bei dieser Form ist es oft hilfreich die alles in Polarkoordinaten umzurechnen. siehe Bsp. unten

Beispiel:

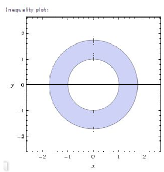
$\int\int_B xln(y)$ wobei $B = \{(x,y)|y \geq |x|$ und $1 \leq \underbrace{x^2+y^2}_{r} \leq 3\}$

Hierbei bietet sich polar sehr gut an da ansonsten ein ziemlicher Wurzelkrieg ausbrechen würde.

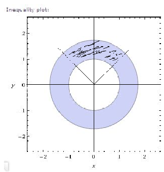
Aus $y \geq |x|$ folgt und diese beiden Linien entsprechen $\frac{\pi}{4}$ $\frac{3\pi}{4}$:



und $1 \leq x^2+y^2 \leq 3$ ist ein Kreisring mit $r_1 = \sqrt{1}; r_2 = \sqrt{3}$:



=>



Hieraus ergeben sich folgende Grenzen: $\begin{cases} r - Grenzen : von \frac{\pi}{4} \to \frac{3\pi}{4} \\ \varphi - Grenzen : von 1 \to \sqrt{3} \end{cases}$

Da wir das ganze in Polardarstellung rechnen wollen müssen wir erst alle Werte umrechnen:

$x = r \cdot cos\varphi \quad y = r \cdot sin\varphi$

Weiters müssen wir noch die Funktionaldeterminate hinzuziehen da wir von Euklid nach polar umgewandelt haben.

$$\frac{\delta(x,y)}{\delta(r,y)} = det \begin{pmatrix} \overbrace{x_r}^{\text{x nach r Abgeleitet}} & \overbrace{x_\varphi}^{\text{x nach } \varphi \text{ Abgeleitet}} \\ y_r & y_\varphi \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} cos\varphi & -r \cdot sin\varphi \\ sin\varphi & r \cdot cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$cos\varphi \cdot r \cdot cos\varphi + sin\varphi \cdot r \cdot sin\varphi = r \cdot \underbrace{(cos^2\varphi + sin^2\varphi)}_{=1} = r$ (Info: das ist immer r)

Daraus folgt jetzt unser Integral:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \underbrace{r \cdot cos\varphi}_{x} \cdot \underbrace{ln(r \cdot sin\varphi)}_{ln(y)} \underbrace{r}_{Determinante} \, d\varphi dr$$

Substituieren $u = rsin\varphi \quad u' = -rcos\varphi \to d\varphi = -\frac{du}{rcos\varphi}$

$$\int_1^{\sqrt{3}} r^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} cos\varphi \cdot ln(u) - \frac{du}{rcos\varphi} dr$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} -r \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} ln(u) du dr = \int_1^{\sqrt{3}} -r * u \cdot ln(u-1)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} dr$$

$$-r(r \cdot sin\varphi \cdot ln(r \cdot sin\varphi - 1))|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \int_1^{\sqrt{3}} -r * 0 = \underline{\underline{0}}$$

3.11 Bogenlänge

Die Bogenlänge ist nichts anderes als die Länge einer Kurve.

Bogenlänge:

allgemein: $: L = \int\limits_a^b ||\vec{c}'(t)||dt = \int\limits_a^b \sqrt{c_1'(t)^2 + ... + c_n'(t)^2}dt$

in der Ebene: $\int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}$

im Raum: $: L = \int\limits_a^b ||\vec{c}'(t)||dt = \int\limits_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt$

Wenn in der Angabe steht parametrisieren Sie folgende Kurve nach der Bogenlänge, dann Soll man t berechnen. Wir berechnen hierbei das Intervall [a,b]

Beispiel:

1)Man Bestimme die Bogenlänge der Kurve $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -sin(t) \\ cos(t) \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq \pi$

$$c_1' = 1 \overbrace{\rightarrow}^{c_i^2} 1$$
$$c_2' = -cos(t) \rightarrow cos^2(t)$$
$$c_3' = -sin(t) \rightarrow sin^2(t)$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^\pi ||c'(t)||dt = \int\limits_0^\pi \sqrt{1 + \underbrace{cos^2(t) + sin^2(t)}_{1}} = \int\limits_0^\pi \sqrt{2}dt = \sqrt{2}t = \underline{\underline{\sqrt{2}\pi}}$$

2) Parametrisieren Sie folgende Kurve nach der Bogenlänge

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}, t \geq 0$$

$$c_1' = \frac{dx}{dt} = 2\sqrt{t * 1} \rightarrow c_1'^2 = 4t + 4$$
$$c_2' = \frac{dy}{dt} = t \qquad \rightarrow c_1'^2 = t^2$$

$$\Rightarrow s = \int\limits_0^\infty \sqrt{t^2 + 4t + 4}dt = \int\limits_0^u t + 2dt = \frac{t^2}{2} + 2t|_0^\infty$$
$$\Rightarrow s = \frac{u^2}{2} + 2u \rightarrow 0 = u^2 + 4u - 4s \rightarrow u_{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+16s}}{2} = -2 \pm \sqrt{4 + 4s}$$

$-2 - \sqrt{4+4s}$ fällt flach da $t \geq 0$

$\underline{\underline{u = t = 2 + 2\sqrt{1+s}}}$ das jetzt noch in die Ursprungsgleichung einsetzen:

$$\underline{\underline{\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{(-1+2\sqrt{1+s})^3}}{3} \\ \frac{(-2+2\sqrt{1+s})^2}{2} \end{pmatrix}}}$$

3.12 Kurvenintegral

Das Kurvenintegral ist nichts anderes als die Länge einer Kurve entlang einer Funktion. (Die Schnittmenge aus Funktion und Kurve)
Man unterscheidet jedoch Kurvenintegrale über skalarwertige Funktionen und über Vektorfelder.

allgemein: $\int_k f ds = \int\limits_a^b f(k(t)) \cdot |k'| dt$

Angewendet auf unsere Beispiele: $\int\limits_a^b f(c(t)) \cdot |c'(t)| dt$

Der Betrag eines Vektors: $\vec{c} = (x, y, z) \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Beispiel:
Man Berechne das Kurvenintegral der Skalarwertigen Funktion f längs der Kurve $c(t)$
$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad \vec{c}(t) = (cos(t), sin(t)), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$

$\vec{c}(t) = (cos(t), sin(t)) = \vec{c}(t) = \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} c_1' &= -sin(t) \overbrace{\Rightarrow}^{c_i^2} sin^2(t) \\ c_2' &= \quad cos(t) \;\Rightarrow\; cos^2(t) \\ \Rightarrow ||c'(t)|| &= \sqrt{\underbrace{sin^2(t) + cos^2(t)}_{1}} = 1 \end{aligned}$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{cos(t) \cdot sin(t)}{cos^2(t) + sin^2(t)}}_{=1} \cdot \underbrace{1}_{||c'(t)||} dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} cos(t) \cdot sin(t) dt$$

Mit Substitution: $u = sin(t) \Rightarrow dt = \frac{du}{cos(t)}$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u du = \frac{u^2}{2} = \frac{sin^2(t)}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{0,5}}$$

3.13 Integratibilitätsbedingung

Ist die Integratibilitätsbedinung erfüllt so liegt ein Gradientenfeld vor und somit gibt es eine Stammfunktion. Weiters ist die Integratibilitätsbedinung ein Hinweis auf Wegunabhängigkeit. Hierbei müssen jedoch die Funktionen stetig sein, sprich keine Polstellen aufweisen.

$\frac{\delta f_i}{\delta x_j} = \frac{\delta f_j}{\delta x_i} \rightarrow \frac{\delta f_1}{\delta y} = \frac{\delta f_2}{\delta x} \quad / \quad \frac{\delta f_2}{\delta z} = \frac{\delta f_3}{\delta y} \quad / \quad \frac{\delta f_3}{\delta x} = \frac{\delta f_1}{\delta z}$
Wenn alle das gleiche ergeben folgt Wegunabhängigkeit.

Beispiel:
Teste $\int cos(x)dx + e^{-y}dy + z^2dz$ auf Wegunabhängigkeit.

$\frac{\delta f_1}{\delta y} = \frac{\delta f_2}{\delta x} \Rightarrow \frac{\delta cos(x)}{\delta y} = \frac{\delta e^{-y}}{\delta x} \Rightarrow \underline{\underline{0 = 0}}$

$\frac{\delta f_2}{\delta z} = \frac{\delta f_3}{\delta y} \Rightarrow \frac{\delta e^{-y}}{\delta z} = \frac{\delta z^2}{\delta y} \Rightarrow \underline{\underline{0 = 0}}$

$\frac{\delta f_3}{\delta x} = \frac{\delta f_1}{\delta z} \Rightarrow \frac{\delta z^2}{\delta x} = \frac{\delta cos(x)}{\delta z} \Rightarrow \underline{\underline{0 = 0}}$

3.14 Stammfunktion

Finden der Stammfunktionen:

1. Interatibilitätsbedingung prüfen, wenn diese korrekt ist existiert auch eine Stammfunktion F mit $F_x = f_1 \text{und} F_y = f_2$.
2. F_x nach dx Integrieren, hierbei erhält man eine Konstante c(y) diese ist jedoch von y Abhängig. $\odot$
3. Diese nach dx Integrierte Funktion nach y ableiten $F_y(x, y)$ somit erhält man die Konstante $c'(y)$
4. Die 2te $F_y(x, y)$ Funktion steht in der Angabe.
5. Jetzt beiden $F_y(x, y)$ - Funktionen gleichsetzen und $c'(y)$ ausrechnen.
6. Diesen $c'(y)$ nach dy integrieren somit bekommt man ein neue Konstante d welche von x und y unabhängig ist $\otimes$.
7. die Stammfunktion lautet somit $\odot + \otimes$

Beispiel:

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \overbrace{3x^2 + 4xy - 3y^2}^{F_x \Rightarrow f_1} \\ \underbrace{2x^2 - 6xy - 3y^2}_{F_y \Rightarrow f_2} \end{pmatrix}$$

1) Integratibilitätsbedingung:

$\frac{\delta f_1}{\delta y} = 4x - 6y = \frac{\delta f_2}{\delta x}$

$\Rightarrow$ Integratibilitätsbedingung erfüllt $\Rightarrow$ es existiert eine Stammfunktion F mit $F_x = f_1 \text{und} F_y = f_2$

2) F_x nach dx Integrieren

$F(x,y) = \int f_1(x,y)\underline{dx} = \int 3x^2 + 4xy - 3y^2 = \underbrace{\overbrace{x^3 + 2x^2y - 3xy}^{\odot} + \overbrace{c(y)}^{\otimes}}_{*}$

3) Integral nach y ableiten:
$(1) F_y(x,y) = \underbrace{2x^2 - 6xy + c'(y)}_{*'}$

4) zweites F_y :
$(2) F_y(x,y) = 2x^2 - 6xy - 3y^2$ dieses folgt aus der Angabe.

5)(1)&(2) gleichsetzen
$2x^2 - 6xy + c'(y) = 2x^2 - 6xy - 3y^2 \Rightarrow c'(y) = -3y^2$

6)$c'(y)$ nach y auf integrieren.

$c(y) = \int c'(y)dy = -3\int y^2 dy = \overbrace{-y^3 + d}^{\otimes_1}$

7)
Stammfunktion $= \underbrace{x^3 + 2x^2y - 3xy^2}_{\odot} \underbrace{-y^3 + d}_{\otimes_1}$

Das Potential ist die Negative Stammfunktion $\underline{\underline{-F = x^3 - 2x^2y + 3xy^2 + y^3}}$.

4 Differenzengleichung

4.1 Differenzengleichung 1.Ordnung

1. für Lineare Differenzengleichungen 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten der Gestalt $x_{n+1} = ax_n + \underbrace{b}_{\otimes}, n = 0, 1, 2, ...$ gilt:

$$x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b\frac{a^n-1}{a-1}, & \text{wenn } a \neq 1 \\ x_0 + b \cdot n, & \text{wenn } a = 1 \end{cases}$$

   a und b sind konstante Koeffizienten(1,3,5,7.9,...).
   x_0 ist der gegebene Anfangswert.
   $\otimes$: wenn b nicht von n abhängig ist, sprich konstant ist(z.B.: $x_{n+1} = 5x_n + 7$).

2. Lineare Differenzengleichungen k-ter Ordnung allgemeine Formel:

$$x_{n+1} = a_n x_n + \underbrace{b_n}_{\otimes}.$$

   a_n und b_n sind beliebig reelle Funktionen in n, also reelle Funktionen.
   Wenn $b_n = 0$ für alle $n \in N$ folgt homogen ($x_{n+1} = a_n x_n, \quad n = 0, 1, 2...$) sonst inhomogen ($x_{n+1} = a_n x_n + b_n$).
   $\otimes$ diese Formel verwendet man wenn b von n abhängig ist, sprich nicht Konstant ist(z.B.: $x_{n+1} = 5x_n + 7^n$).

2.1 Die einer inhomogenen Differenzengleichung 1.Ordnung ($x_{n+1} = a_n x_n + b_n$) zugehörige allgemeine Lösung ist $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$.
$x_n^{(h)} = C \prod_{i=0}^{n-1} a_i$:homogene Lösung.
$x_n^{(p)}$: inhomogene Lösung berechnung durch

- Variation der Konstanten $x_n^{(p)} = C_n \prod_{i=0}^{n-1} a_i$ (Homogenes C auf C_n erweitern und C_n durch einsetzen berechnen).
- Methode des unbestimmten Ansatz

Beispiel zu 1: Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differenzengleichung
$x_{n+1} = \underbrace{\frac{2}{3}}_{a} x_n + \underbrace{1}_{b}, \quad n \geq 0$ zum Anfangswert $x_0 = 0$

Allgemein: $x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b\frac{a^n-1}{a-1}, & \text{wenn } a \neq 1 \\ x_0 + b \cdot n, & \text{wenn } a = 1 \end{cases}$

---

allgemeine Lösung:
$x_n = (\frac{2}{3})^n x_0 + \frac{(\frac{2}{3})^n - 1}{\frac{2}{3} - 1} =$

$x_n = (\frac{2}{3})^n x_0 + \frac{(\frac{2}{3})^n - 1}{-\frac{1}{3}} =$

$x_n = (\frac{2}{3})^n x_0 - 3 * (\frac{2}{3})^n + 3$

$x_n = (\frac{2}{3})^n \cdot \underbrace{(x_0 - 3)}_{c} + 3$

Lösung zu Startwert $x_0 = 6$
$x_0 = 6\ ,\ n = 0$

$x_0 = (\frac{2}{3})^0 \cdot c + 3$
$6 = 1c + 3 \Rightarrow \underline{\underline{c = 3}}$

$\underline{\underline{x_n^{(p)}}} = (\frac{2}{3}) * 3 + 3 = \underline{\underline{\frac{2^n}{3^{n-1}} + 3}}$

Beispiel zu 2: Differenzengleichung allgemeine Form:

Gesucht ist die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung
$x_{n+1} = \underbrace{3^{2n}}_{a_n} \cdot x_n + \underbrace{3^{n^2}}_{b_n}, \quad n = 0, 1, 2, ...$

Allgemein:
$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$
homogene Lösung:$x_n^{(h)} = C \prod\limits_{i=0}^{n-1} a_i$
partikuläre Lösung mit Variation der Konstanten:$x_n^{(p)} = C_n \prod\limits_{i=0}^{n-1} a_i$

---

homogene Lösung:
$x_n^{(h)} = C \prod\limits_{i=0}^{n-1} a_i = C \prod\limits_{i=0}^{n-1} 3^{2i} = C \cdot 3^{2 \cdot \frac{n*(n-1)}{2}} = \underline{\underline{C \cdot 3^{n \cdot (n-1)}}}$

partikuläre Lösung:
Ansatz: $x_n^{(p)} = C_n \cdot 3^n(n-1)$ diesen muss man in die Ursprungsgleichung einsetzen.

$\underbrace{C_{n+1} \cdot 3^{(n+1)((n+1)-1)}}_{x_{n+1}} = 3^{2n} \cdot \underbrace{C_n 3^{n(n-1)}}_{x_n} + 3^{n^2}$
$C_{n+1} \cdot 3^{n^2+n} = 3^{2n+n(n-1)} C_n + 3^{n^2}$
$C_{n+1} \cdot 3^n = 3^{2n-n} C_n + 1$

$\underline{\underline{C_{n+1} = C_n + \frac{1}{3^n}}}$

$C_{n+1} = C_n + \frac{1}{3^n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... \Rightarrow$ geometrische Reihe $s_n = a_n \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$
$\Rightarrow \frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}} = (1 - \frac{1}{3^n}) \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow x_n^{(p)} = (1 - 1\frac{1}{3^n}) \cdot \frac{3}{2} \cdot 3^{n(n-1)}$

$\Rightarrow$ Lösungsgesamtheit: $\underline{\underline{x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = C \cdot 3^{n(n-1)} + (1 - \frac{1}{3^n}) \cdot \frac{3}{2} \cdot 3^{n(n-1)}}}$

4.2 Differenzengleichung 2.Ordnung

- allg. Form: $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = s_n$
  a, b Konstanten $\in R$, $s_n =$ Störfunktion, wenn $s_n = 0$ für alle $n \in N \Rightarrow$ homogen sonst inhomogen.
- Lösungsgesamtheit: $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$
- Entwicklungsschritte:
  1. Bestimmung der allgemeinen Lösung $x_n^{(h)}$
  2. Bestimmung der partikulären Lösung $x_n^{(p)}$
  3. Bestimmung der Lösungsgesamtheit $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$
  4. Mittels Anfangswerten Konstanten berechnen.
  5. Lösungsgesamtheit mit ausgerechneten Werten neu anschreiben.

4.2.1 Differenzengleichung 2.Ordnung homogenen Typ

Bestimmung der homogenen Lösung $x_n^{(h)}$ mittels Charakteristischer Gleichung:
$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \Rightarrow$:

$$x_n^{(h)} = \begin{cases} 1) C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n & \text{falls } \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in R \\ 2) r^n (C_1 cos(n\varphi) + C_2 \sin(n\varphi) & \text{falls } \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in C \\ 3) (C_1 + C_2 n) \cdot \lambda^n & \text{falls } \lambda_1 = \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in R \end{cases}$$

falls 2: muss man das λ-Ergebnis in Polardarstellung umwandeln

1. λ-Ergebnis $= \underbrace{a}_{a} \pm \underbrace{\sqrt{...}\, i}_{b}$
2. $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = E_1$
3. $\varphi = arctan \frac{GK}{AK} = arctan \frac{Im}{Re} = arctan \frac{b}{a} = E_2$

$$\varphi = \begin{cases} arctan(\frac{b}{a}), & \text{wenn } a > 0 \\ arctan(\frac{b}{a}) + \pi, & \text{wenn } a < 0, b \geq 0 \\ arctan(\frac{b}{a}) - \pi, & \text{wenn } a < 0, b < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

4. Einsetzen $E_1^n \cdot (C_1 cos(n \cdot E_2) \pm C_2 sin(n \cdot E_2))$

Beispiel:

Gesucht sind die allgemeinen Lösungen der homogenen Differenzengleichung.

$$\text{(a) } x_{n+2} - 7x_{n+1} + 12x_n = 0$$
$$\text{(b) } x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$$
$$\text{(c) } x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = 0$$

---

a) $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 12x_n = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 12}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \in R$

$\underline{\underline{x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = C_1 4^n + C_2 3^n}}$

---

b) $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \overbrace{-\frac{1}{2}}^{a} + \overbrace{\sqrt{\frac{3}{4}}}^{b}\, i \\ \lambda_2 = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{a} - \underbrace{\sqrt{\frac{3}{4}}}_{b}\, i \end{cases} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \in C$$

$\Rightarrow x_n = r^n(C_1 cos(n\varphi) + C_2 sin(n\varphi))$

$z = r(cos(\phi) + sin(\phi)), \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

Da a<1 ist: $\varphi_1 = arctan(\frac{b}{a}) + \pi = \frac{2\pi}{3}; \varphi_2 = arctan(\frac{b}{a}) - \pi = -\frac{2\pi}{3}$

$\lambda_{1,2} = 1(cos(\frac{2\pi}{3}) + isin(\frac{2\pi}{3}))$

sin und cos sind Vorzeichenneutral: $\underline{\underline{C_1 cos(\frac{2n\pi}{3}) + C_2 sin(\frac{2n\pi}{3})}}$

(c) $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = 4, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 \in R$

$\Rightarrow \underline{\underline{x_n = (C_1 + C_2 n)\lambda^n = (C_1 + C_2 n)4^n}}$

4.2.2 Differenzengleichung 2.Ordnung inhomogenen Typ

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = s_n \Longleftrightarrow a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = s_n$$

Lösungsweg:

1. Lösung der homogenen Gleichung (siehe oben)

2. Lösung der partikulären Gleichung über Versuchslösung abhängig von der Störfunktion.

s_n	Versuchslösung $a_n^{(p)}$
1	A
r^n	Ar^n
$sin(rn)/cos(rn)$	$Asin(rn) + Bcos(rn)$
$n^k oder Polynom Gradk$	$A_0 + A_1n + A_2n^2 + ...A_kn^k$
$n^k * r^n$	$(A_0 + A_1n + A_2n^2 + ...A_kn^k) \cdot r^n$

(Hinweis: Falls die Störfunktion eine zusammengesetzte Form wie $2^{n-1} - 6n5^n$ hat kann man diese einfach in zwei Teile aufteilen$x_{n1}^{(p)} = 2^{n-1}$ und $x_{n2}^{(p)} = 6n5^n$, berechnen und danach wieder zusammenführen $\Rightarrow$ folgt aus Superpositionsprinzip).

2.1 Berechnung der Konstanten durch einsetzen der Versuchslösung in die Ursprungsgleichung

3. Zusammenführen $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ (Bei geteilten partikulären Anteil $a_n = a_n^{(h)} + a_{n1}^{(p)} + a_{n2}^{(p)}$)

3.1 Mittels Anfangswerte die Konstanten berechnen. Es müssen mindestens n Anfangswerte für n Konstanten vorhanden sein. (Hinweis: wenn steht $(n \geq 2,\ x_0 = 1)$ muss als $x_n = 1$ und als n=0 genommen werden auch wenn $n \geq 2$ steht).

4. Formel für a_n vollständig anschreiben.

Beispiel:
Man bestimme die Lösung nachstehender Differenzengleichung zu vorgegebener Anfangsbedingung.

$$4x_{n+2} + 12x_{n+1} - 7x_n = \underbrace{36}_{s_n}, \qquad x_0 = 6,\ x_1 = 3$$

homogene Lösung:

$4x_{n+2} + 12x_{n+1} - 7x_n = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144+4*4*7}}{8} \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{7}{2} \end{cases} \quad , \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \in R$

$\Rightarrow \underline{\underline{x_n^{(h)} = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = C_1(\frac{1}{2})^n + C_2(-\frac{7}{2})^n}}$

partikuläre Lösung:

Störfunktion $s_n = 36 \Rightarrow$ Ansatz: $x_n^{(p)} = A$ Das in die Ursprungsgleichung einsetzen ergibt:

$4A + 12A - 7A = 36 \Rightarrow A = 4 \Rightarrow \underline{\underline{x_n^{(p)} = 4}}$
(Hinweis: wenn in der Versuchslösung ein
n vorkommt muss dieses bei x_{n+1} auf (n+1) bei x_{n+2} auf (n+2) ersetzt werden.)

Allgemeine Lösungsgesamtheit:

$\underline{\underline{x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = C_1(\frac{1}{2})^n + C_2(-\frac{7}{2})^n + 4}}$

spezielle Lösung mit gegebenen Anfangsbedingungen

$x_0 = 6, \quad x_1 = 3$

I: $\underbrace{x_0 = 6}_{n=0;x_n=6}$ $: 6 = C_1(\frac{1}{2})^0 + C_2(-\frac{7}{2})^0 + 4 \Rightarrow 2 = C_1 + C_2 \Rightarrow \underline{C_2 = 2 - C_1}$

II: $\underbrace{x_1 = 3}_{n=1;x_n=3}$ $: 3 = C_1(\frac{1}{2})^1 + C_2(-\frac{7}{2})^1 + 4 \Rightarrow -2 = C_1 - 7C_2 \Rightarrow \underline{C_1 = 7C_2 - 2}$

I in II:
$C_1 = 7(2 - C_1) - 2$

$\underline{\underline{C1 = \frac{3}{2}}} \Rightarrow \underline{\underline{C_2 \frac{1}{2}}}$

$\underline{\underline{x_n = \frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n + \frac{1}{2}(-\frac{7}{2})^n + 4}}$

5 Differenzialgleichung

5.1 Allgemeine Begriffe

Allgemein heißt eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(k)}) = 0$$

für eine Funktion y(x) und deren Ableitungen $y'(x), y''(x), ...y^{(k)}$ eine gewöhnliche Differentialgleichung.
Unter einer Lösung (einem Integral) der Differentialgleichung verstehen wir eine Funktion y(x), welche mit ihren Ableitungen die gegebene Gleichung erfüllt.
Man Unterscheidet:

- Die **allgemeine Lösung** enthält beliebig wählbare Parameter $C_1, C_2..$ und entspricht einer Schar von Lösungskurven.
- Eine **partikuläre Lösung** erhält man durch spezielle Whal der Parameter zu vorgegebenen Anfangsbedingungen, also durch Auswahl einer bestimmten Lösungskurve.
- Die **singuläre Lösung** gehört keiner Lösungsschar an. Sie kann nicht durch geeignete Wahl von C gewonnen werden.

Beispiel:

Man zeige das $C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{ln(x)}{x}$ die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ ist. Wie lautet die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(1) = 3, \quad y'(1) = -2$?

Erster Schritt erste und 2te Ableitung der Lösung bilden.

$y = C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{ln(x)}{x}$

$\underline{y' = -C_1\frac{1}{x^2} + C_2\frac{1-ln(x)}{x^2}}$ $\qquad$ $\underline{y'' = C_1\frac{2}{x^3} + C_2\frac{-3+2ln(x)}{x^3}}$

Diese Ergebnisse in die Ursprungsgleichung einsetzen:

$x^2(C_1\frac{2}{x^3} + C_2\frac{-3+2ln(x)}{x^3}) \;+\; 3x(-C_1\frac{1}{x^2} + C_2\frac{1-ln(x)}{x^2}) + y = 0$ ausrechnen und umformen ergibt: $\underline{\underline{y_h = C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{ln(x)}{x}}}$ Q.E.D.

zu: Wie lautet die partikuläre Lösung:
$y(1) = 3 : C_1\frac{1}{1} + C_2\frac{ln(1)}{1} \Rightarrow \underline{\underline{C_1 = 3}}$

$y'(1) = -2 : -\underbrace{C_1}_{3}\frac{1}{1^2} + C_2\frac{1-ln(1)}{1^2} \Rightarrow \underline{\underline{C_2 = 1}}$

Das ganze noch einsetzten:
$\underline{\underline{y_p(x) = \frac{3}{x} + \frac{ln(x)}{x}}}$= partikuläre Lösung

5.2 lineare Differenzialgleichung 1.Ordnung

allgemeine Form:

$$\underbrace{y'}_{\frac{dy}{dx}} + \underbrace{a(x)}_{Funktion}\ y = \begin{cases} 0 & homogen \\ \underbrace{s(x)}_{\text{Störfunktion}} & inhomogen \end{cases}$$

<u>Lösungsschritte:</u>

1. Lösung der homogenen Gleichung $y' + a(x)y = 0$ durch Trennung der Variablen (dx , dy jeweils auf eine Seite bringen) (Hinweis $y' \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}$):

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = a(x)dx$$

2. Integration links nach dy rechts nach dx. Die dabei entstehenden Konstanten gleich mit Logarithmus (ln(c)) anschreiben.

3. Auflösung nach y wenn möglich (am Schluss sollte z.B.: $y_h(x) = \frac{c}{x}$ stehen). Folgende Rechenregeln kommen einen dabei zu gute:
   - $ln(a) + ln(b) = ln(a \cdot b)$
   - $ln(a) - ln(b) = ln(\frac{a}{b})$
   - $n \cdot ln(a) = ln(a^n)$
   - $ln(e^n) = n$
   - $e^{ln(a)} = a$
   - Entlogarithmieren: $ln(a) = b \Rightarrow a = e^b$
   - Entlogarithmieren $ln(a) = ln(b) \Rightarrow a = b$

4. Findung einer partikulären Lösung durch Variation der Konstanten. Konstante C der homogenen Lösung wird zur Funktion C(x)(z.b.: $y_h(x) = \frac{c}{x}$ wir zu $y_p(x) = \frac{c(x)}{x}$).

5. Die partikuläre Lösung Ableiten nach x ableiten um y'_p zu gewinnen.

6. Einsetzen der partikulären Lösung (y_p & y'_p) in die Ursprungsgleichung und Funktion C(x) ermitteln. (Falls man "nur"$C'(x)$ ermitteln kann muss man diese $C'(x)$ nach dx integrieren um $C(x)$ zu erhalten)

7. Die so ermittelte Funktion $C(x)$ in die partikulären Lösung einsetzten.

8. homogene und partikuläre zur Lösungsgesamtheit zusammenführen. $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

9. Anfangswerte einsetzen $y\overbrace{(5)}^{x-Wert} = \overbrace{2}^{y-Wert}$ und C berechnen

10. Ergebnis Anschreiben (homogene & partikuläre mit expliziten C)

Beispiel:
Man bestimme die partikuläre Lösung der Differenzengleichung:
$y' + \underbrace{cos(x)}_{a_x} y = \underbrace{sin(x)cos(x)}_{s_n}$ Anfangsbedingung: $y(0) = 1$

---

homogene Gleichung $y' + cos(x)y = 0$ mittels Trennung der Variablen lösen

$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} = -ycos(x) \Rightarrow \frac{dy}{y} = -cos(x)$

$\int \frac{1}{y} dy = -\int cos(x)dx$

$ln|y| + C_1 = -sin(x) + C_2 \Rightarrow ln|y| = ln(e^{-sin(x)}) + ln|c|$

$\underline{\underline{y_h(x) = e^{-sin(x)} \cdot C}}$

Daraus folgt der Partikuläre Ansatz: $y_p(x) = C(x) \cdot e^{-sin(x)}$

$y_p'(x) = C'(x) \cdot e^{-sin(x)} - C(x) \cdot e^{-sin(x)} \cdot cos(x)$

Einsetzen in inhomogene Gleichung (sprich Ursprungsgleichung):

$\underbrace{C'(x) \cdot e^{-sin(x)} - C(x) \cdot e^{-sin(x)} \cdot cos(x)}_{y'} + \underbrace{C(x) \cdot e^{-sin(x)}}_{y} = \underbrace{sin(x)cos(x)}_{s_n}$

$C'(x) = sin(x)cos(x)e^{sin(x)}$

$C(x) = \int sin(x)cos(x)e^{-sin(x)}$ Substituieren: $u = sin(x),\ dx = \frac{du}{u'} = \frac{du}{cos(x)}$

$C(x) = \int \underbrace{u}_{u} \underbrace{e^u du}_{dv}$ mittels partieller Integration ($\int udv = uv - \int v\ du$):

$u = u \Rightarrow du = 1; dv =^u \Rightarrow v = \int e^u = e^u$

$ue^u - \int e^u \cdot 1du = ue^u - e^u$ rücksubstituieren:

$\underline{\underline{C(x) = cos(x)e^{cos(x)} - e^{cos(x)}}} \Rightarrow y_p(x) = \underbrace{(cos(x)e^{cos(x)} - e^{cos(x)})}_{C(x)} \cdot e^{-sin(x)}$

$\underline{\underline{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-sin(x)}C + e^{cos(x)-sin(x)}(cos(x) - 1)}}$

Anfangswert einsetzten und C berechnen:

$y(0) = 1: \quad 1 = e^{-sin(0)}C + e^{cos(0)-sin(0)}(cos(0) - 1) \Rightarrow \underline{\underline{C = 1}}$

$\underline{\underline{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-sin(x)} + e^{cos(x)-sin(x)}(cos(x) - 1)}}$

Beispiel:
man löse die Differenzialgleichung durch Trennung der Veränderlichen

$$4x\ dy - y\ dx = y\ dx$$

$4x\ dy - x^2 dy = y\ dx$

$dy \cdot (4x - x^2) = ydx$ |:dx

$\frac{dy}{dx} \cdot (4x - x^2) = y$

$\frac{4x-x^2}{dx} = y\ dy$ Kehrwert

$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{4x-x^2} dx$ Partialbruchzerlegung:

$\frac{1}{4x-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} \Rightarrow A = -\frac{1}{4},\quad B = \frac{1}{4}$

$\int \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-4} dx$

$ln|y| + C = -\frac{1}{4} ln|x| + \frac{1}{4} ln|x-4| + C$

$ln|y| = ln|x^{-\frac{1}{4}} \cdot (x-4)^{\frac{1}{4}} \cdot c|$

$\underline{\underline{y_h(x) =}} x^{-\frac{1}{4}} \cdot (x-4)^{\frac{1}{4}} \cdot c = \frac{\sqrt[4]{x-4}}{\sqrt[4]{x}} C = \underline{\underline{\sqrt[4]{\frac{x-4}{c}} C}}$

5.3 lineare Differenzialgleichung 2.Ordnung

$$\text{allgemeine Form: } y'' + ay' + by = s(x) \begin{cases} s(x) = 0 & homogen \\ s(x) \neq 0 & inhomogen \end{cases}$$

<u>Lösungsschritte:</u>

1. Bestimmung homogene Gleichung mittels charakteristischer Gleichung $\lambda^2 + a\lambda + b\lambda = 0$

$$y_h(x) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} & \text{falls } \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in R \\ e^{\alpha x} \cdot (C_1 cos(\beta x) + C_2 sin(\beta x)) & \text{falls } \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in C \\ (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x} & \text{falls } \lambda_1 = \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in R \end{cases}$$

2. Ermittlung der partikulären Lösung mittels Versuchslösung durch s(x)

$s(x)$	Versuchslösung $y_p(x)$
1	A
e^{rx}	Ae^{rx}
$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... a_k x^k$	$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + ... + A_k x^k$
$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... a_k x^k) e^{rx}$	$(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + ... + A_k x^k) \cdot e^{rx}$
$sin(rx)/cos(rx)$	$A_0 sin(rx) + A_1 cos(rx)$
$sin(rx) \cdot e^{rx}$	$(A_0 sin(rx) + A_1 cos(rx)) e^{rx}$

2.1 Bestimmung der Ableitungen aus der Versuchslösung $y_p'(x) \& y_p''(x)$....

2.2 Einsetzen der Ableitungen in Ursprungsgleichung zur Bestimmung der Konstanten (A)

3. zusammensetzen der homogenen und partikulären Lösung

Beispiel zum homogenen Fall:
Man löse die folgenden linearen homogenen Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned}&(a) y'' - 8y' - 20y = 0\\&(b) y'' + 8y' + 16y = 0\\&(c) y'' - 8y' + 25y = 0\end{aligned}$$

(a)
$y'' - 8y' - 20y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda - 20 = 0$

$\lambda_{12} = \frac{8 \pm \sqrt{64+80}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 10 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in R \Rightarrow$ Ansatz: $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

$\underline{\underline{y_n(x) = C_1 e^{10x} + C_2 e^{-2x}}}$

(b)
$y'' + 8y' + 16y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$
$\lambda_{12} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = \lambda_{12} = -4$

$\lambda_1 = \lambda_2 \in R \Rightarrow$ Ansatz: $y_n(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$

$\underline{\underline{y_n(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-4x}}}$

(c)
$y'' - 8y' + 25y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 25 = 0$

$\lambda_{12} = \frac{8 \pm \sqrt{64-100}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \overbrace{4}^{\alpha} + \overbrace{3}^{\beta} i \\ \lambda_2 = 4 - 3 i \end{cases}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in C \Rightarrow$ Ansatz: $y_n(x) = e^{\alpha x}(C_1 cos(\beta x) + C_2 sin(\beta x))$

$\underline{\underline{y_n(x) = e^{4x}(C_1 cos(3x) + C_2 sin(3x))}}$

Beispiel zum inhomogenen Fall:

Löse die Differenzialgleichung $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

---

homogenen Lösung:

$y'' + 4y' + 4y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4*4}}{2} = \lambda = -2$

$\lambda_1 = \lambda_2 \in R \Rightarrow \underline{\underline{y_h(x) = (C_1 + C_2)e^{\lambda x} = (C_1 + C_2)e^{-2x}}}$

---

partikuläre Lösung:
Störfunktion $s_n = e^{-2x} \Rightarrow$ Ansatz: $y_p(x) = Ae^{-2x}$

$y_p(x) = Ae^{-2x} \Rightarrow y_p'(x) = -2Ae^{-2x} \Rightarrow y_p''(x) = 4Ae^{-2x}$

Einsetzen in Ursprungsgleichung:

$\underbrace{4Ae^{-2x}}_{y''} + 4\underbrace{(-2Ae^{-2x})}_{y'} + 4\underbrace{Ae^{-2x}}_{y} = e^{-2x}$

$\underline{\underline{0 = 0}} \Rightarrow$ Resonanzfall Versuchslösung mit x Multiplizieren

---

neuer Ansatz: $y_p(x) = xAe^{-2x}$
$y_p'(x) = Ae^{-2x} - 2xAe^{-2x} \Rightarrow y_p''(x) = -2Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} + 4xAe^{-2x}$

Einsetzen in Ursprungsgleichung:

$-2Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} + 4(Ae^{-2x} - 2xAe^{-2x}) + 4xAe^{-2x} = e^{-2x}$
$\underline{\underline{0 = 0}} \Rightarrow$ Resonanzfall Versuchslösung mit x Multiplizieren

---

neuer Ansatz: $y_p(x) = x^2Ae^{-2x}$
$y_p'(x) = 2xAe^{-2x} - 2x^2Ae^{-2x}$
$y_p''(x) = 2Ae^{-2x} - 4xAe^{-2x} - 4xAe^{-2x} + 4x^2Ae^{-2x}$

Einsetzen in Ursprungsgleichung:

$2Ae^{-2x} - 8xAe^{-2x} + 4x^2Ae^{-2x} + 8xAe^{-2x} - 8x^2Ae^{-2x} + 4x^2Ae^{-2x} = e^{-2x}$

$\underline{\underline{A = \frac{1}{2}}} \Rightarrow y_p(x) = \frac{x^2 * e^{-2x}}{2}$

Lösungsgesamtheit:
$\underline{\underline{y_(x) = y_h(x) + y_p(x) = (C_1 + C_2)e^{-2x} + \frac{x^2 * e^{-2x}}{2}}}$