Konvergenzuntersuchungen:

Satz: "Sandwichtheorem"

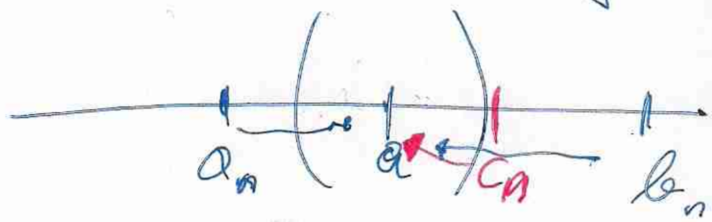
$(a_n)_n, (b_n)_n$ konvergente Folgen, Grenzwerte stimmen überein:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

$(c_n)_n$: Folge mit $a_n \leq c_n \leq b_n$, für (fast) alle n

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = a$, also c_n konvergiert ebenso gegen a

Beweis:



$\forall \varepsilon > 0$: $\exists N_1$: in $U_\varepsilon(a)$ liegen alle a_n mit $n \geq N_1$

$\exists N_2$: in $U_\varepsilon(a)$ liegen alle b_n mit $n \geq N_2$

$\Longrightarrow N := \max(N_1, N_2)$

in $U_\varepsilon(a)$ liegen alle c_n mit $n \geq N$

Bsp.: Konvergenzuntersuchung von

$$c_n = \sqrt[n]{n}$$

wollen

Folge: $a_n = 1$ $\qquad$ $b_n = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

$$\Updownarrow$$

alle Folgen positiv

$$a_n^n \leq c_n^n \leq b_n^n$$

$$1 \leq \underbrace{n \leq \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n}_{\text{zu zeigen}}$$

$$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n \overset{\text{B.L.}}{=} 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \binom{n}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^2 + \ldots\ldots$$

$$\geq 1 + \sqrt{n} \cdot \sqrt{2} + \frac{\cancel{n} \cdot (n-1)}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{n}} =$$

$$= \cancel{1} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{n} + n - \cancel{1} = n + \sqrt{2} \cdot \sqrt{n} \geq n$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \geq \sqrt[n]{n}$$

Sandwich Th $\Rightarrow$ $\quad a_n \leq c_n \leq b_n = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad 1 \qquad 1$$

Def.: Teilfolge:

Folge

$(a_n)_n = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots, a_{11}, \ldots)$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \ldots$

$(a_{n_m})_{m \in \mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots)$

Folgenglieder mit Indizes $n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$

"herausgegriffen"

Satz: "Zusammenhang HP $\leftrightarrow$ konvergente Teilfolge"

- $(a_n)_n$ Folge, die Häufungspunkt a besitzt.

  $\Rightarrow$ es gibt eine gegen a konvergente TF von a_n

- Umgekehrt: falls $(a_n)_n$ eine konvergente TF mit Grenzwert a besitzt $\Rightarrow$

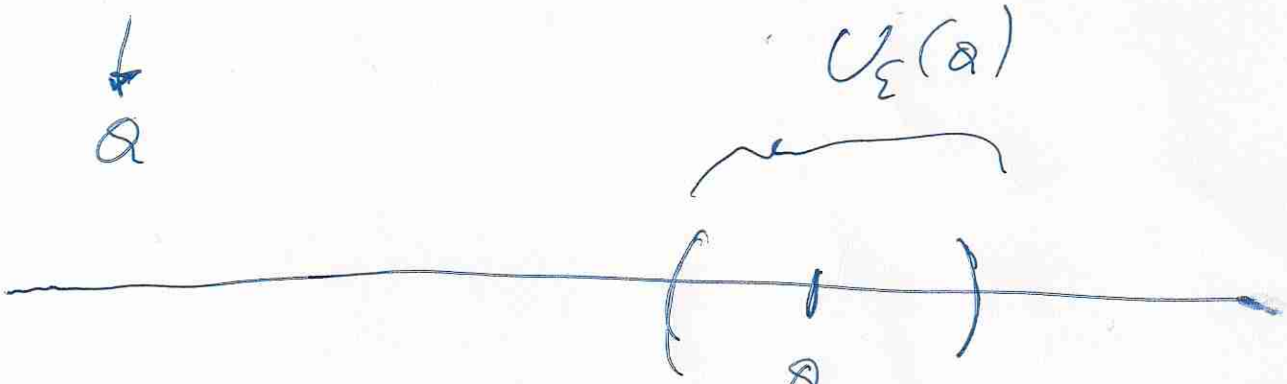
  $\Rightarrow$ a ist HP von $(a_n)_n$

Beweis:

$(a_{n_m})_m$ sei kon TF von $(a_n)_n$

$\downarrow$

a



$\downarrow$

fast alle FG von $(a_{n_m})_m$ liegen in $U_\varepsilon(a)$

$\Rightarrow$ ∞ viele Folgenglieder von (a_{n_m}) liegen in $U_\varepsilon(a)$

$\Rightarrow$ ∞ viele FG von $(a_n)_n$ liegen in $U_\varepsilon(a)$ $\Rightarrow$ a ist HP von a_n

Bsp.: $(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$

Idee
konv. TF: $(1, 1, 1, 1, \ldots)$

konv TF: $(-1, -1, -1, -1, \ldots)$

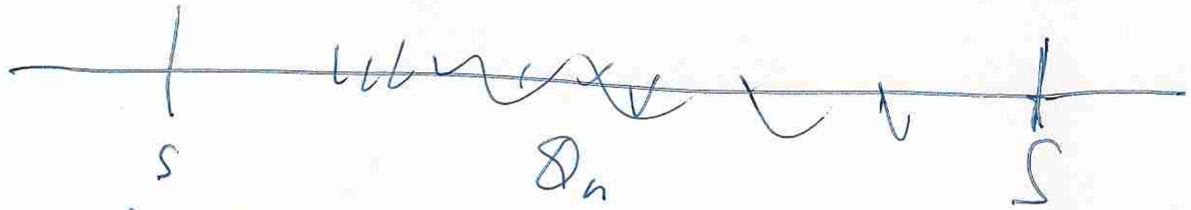
HP: -1 HP: 1

$1 = a_0 = a_2 = a_4 = \ldots$

$a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = \ldots$

Satz : "Satz von Bolzano-Weierstraß"

Jede beschränkte Folge $(a_n)_n$ besitzt einen Häufungspunkt.



untere Schr. obere Schr.

Beweis : es reicht zu zeigen, daß a_n eine konv. TF besitzt

werden versuchen, eine monotone TF zu bilden

betrachten zu diesem Zwecke alle Folgengl., die größer als alle weiteren Folgengl. sind

Indexmenge : $M = \{ k : a_k \geq \sup(a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots) \}$

2. ~~Fall~~ : 1., Fall : M bes. unendl viele Element

$\Rightarrow (a_k)$ mit $k \in M$ TF

monoton fallende TF

$\Rightarrow$ monoton fallende, beschränkte TF

$\Rightarrow$ konv. TF

$\Rightarrow$ TF bes. Grenzwert

$\Rightarrow$ Folge $(a_n)_n$ bes. HP

---

2. Fall: M bes. nur endl. viele Elemente

$\Rightarrow$ es gibt in M einen größten Index K

$\Rightarrow \forall n > K$: es gibt ein Element a_m, mit $m > n$, das zumindest gleich groß wie a_n ist

a_n ($n > K$) $\ldots\ldots a_m$ ($\geq a_n$) $\ldots\ldots a_{m'}$ ($\geq a_m$) $\ldots\ldots a_{m''}$ ($\geq a_{m'}$) $\ldots$

$\Rightarrow$ TF $a_n, a_m, a_{m'}, a_{m''}, \ldots$ monoton wachsende, beschr. TF

$\Rightarrow$ konv. TF $\Rightarrow$ Folge (a_n) bes. HP

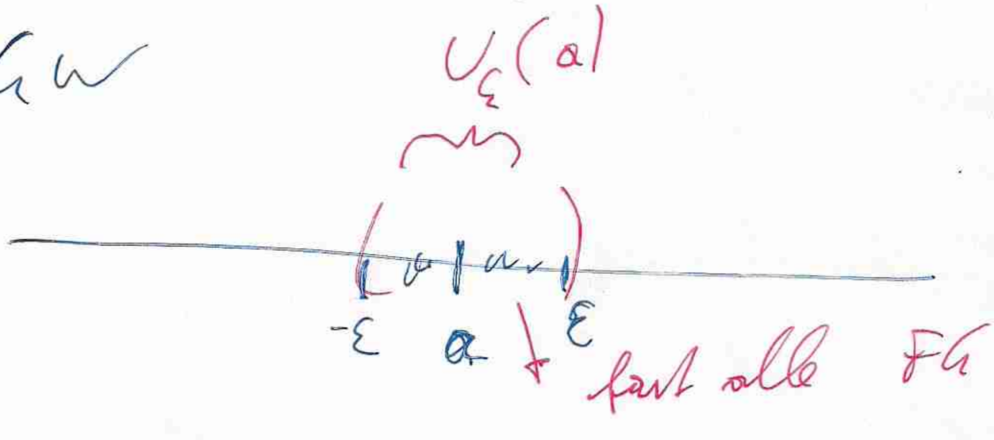
Def.: "Cauchy-Folge"

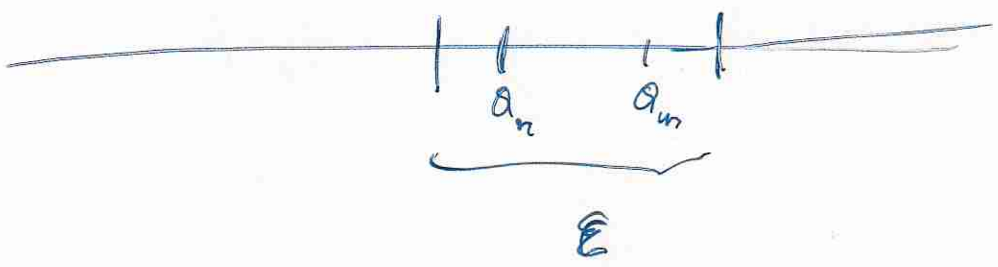
reelle Folge $(a_n)_n$ heißt Cauchy-Folge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert, sodaß

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \ \forall n, m > N(\varepsilon)$$

(Glieder mit großem Index liegen nahe beeinander)

GW





Satz:

<u>Cauchy-Folge</u> $\Longleftrightarrow$ konvergente Folge

Beweis: siehe Buch

Bsp.:

rekursiv definierte Folge: $a_n = a_{n-1} + \frac{\sin n}{2^n}$, $a_0 = 0$

($\Rightarrow$ a_n ist endliche Reihe: $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{2^k}$)

Beh.: a_n ist CF

$$a_n - a_m = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin k}{2^k}, \quad m<n$$

$$|a_n - a_m| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|\sin k|}{2^k} \leq$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$|\sin x| \leq 1$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m+1}} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{1}{2^k}}_{\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2} \leq \frac{1}{2^m}$$

$\Rightarrow \quad m, n > N$

$\Rightarrow |a_m - a_n| \leq \frac{1}{2^N}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow N = N(\varepsilon):$

$|a_m - a_n| \leq \varepsilon$

$\frac{1}{2^N} = \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} = 2^N$

$N = \log_2 \frac{1}{\varepsilon} = \lceil - \log_2 \varepsilon \rceil$