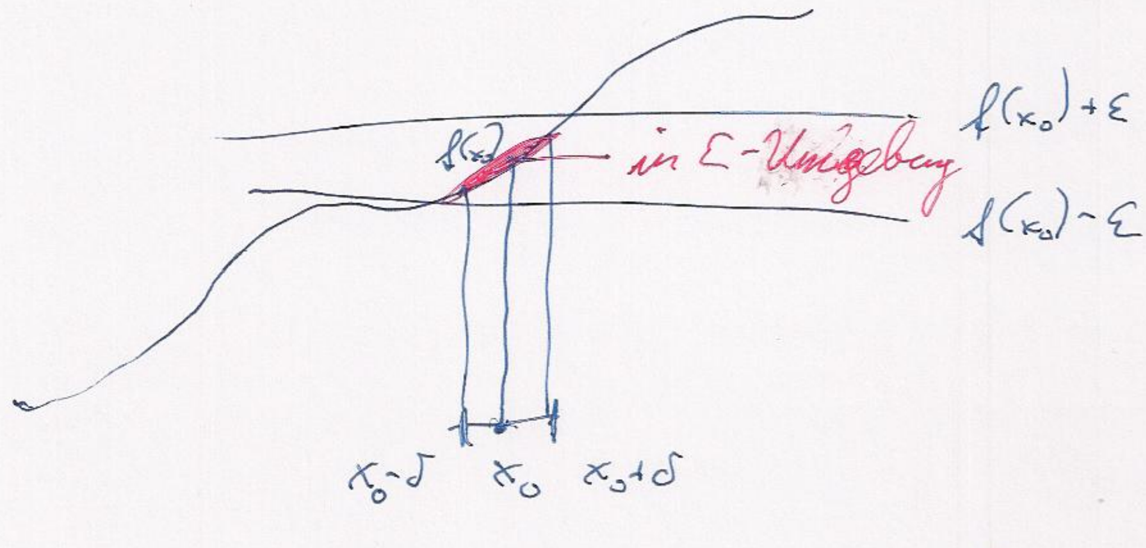
Stetige Fkt.:

Grenzwert = Funktionswert

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$



$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\varepsilon) : |x_0 - x| < \delta$$

$$\Downarrow$$

$$|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$$

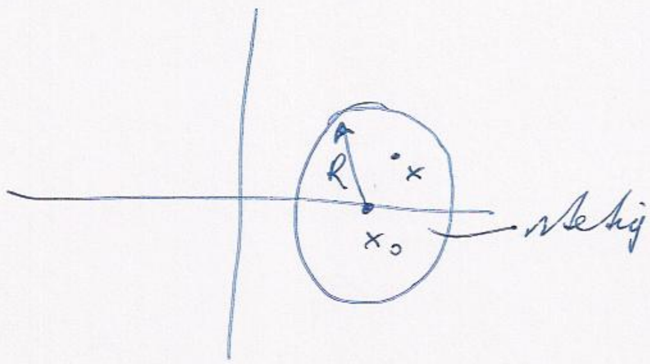
Satz: Stetigkeit von Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (x - x_0)^n$$

Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0.

Konvergenzradius der Reihe $= R$.

$\Rightarrow$ f im Konvergenzkreis $|x| < R$ <u>stetig</u>



Bsp.: $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

$\sin(x)$

$\cos(x$

$\Downarrow$

stetig auf $\mathbb{R}$

Eigenschaften stetiger Flt.

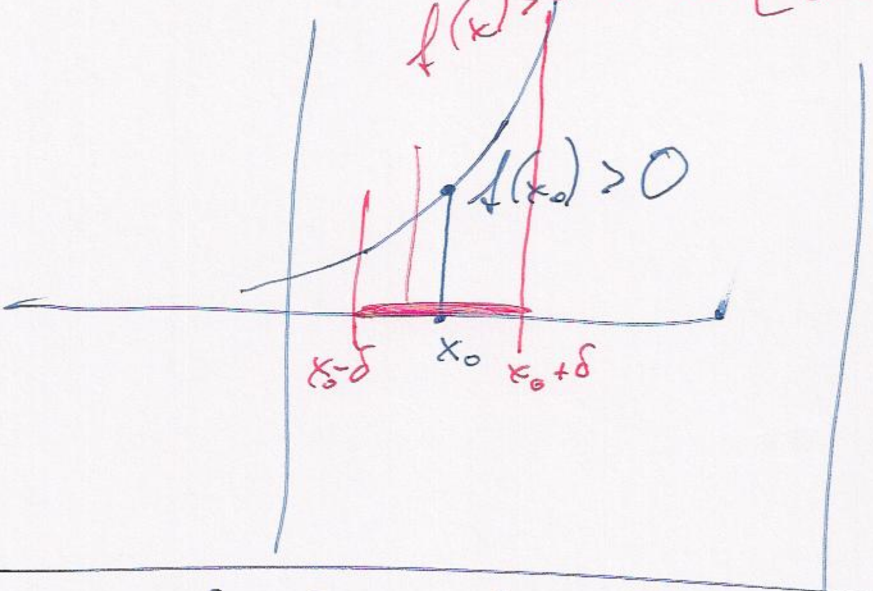
Satz: Vorzeichenbeständigkeit stet. Flt.

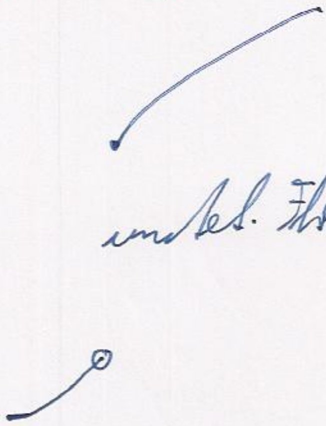
$f(x)$ stetige Flt. mit $f(x_0) > 0$.

$\Rightarrow$ es gibt δ-Umgebung $U_\delta(x_0)$ um x_0.

sodass $f(x) > 0$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$

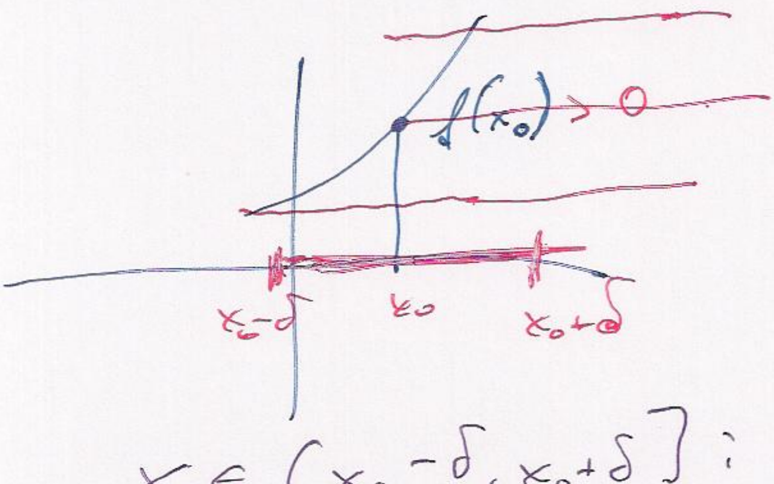
$f(x) > 0 \ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$





unstet. Flt

Beweis: δ-ε-Kriterium der Stetigkeit

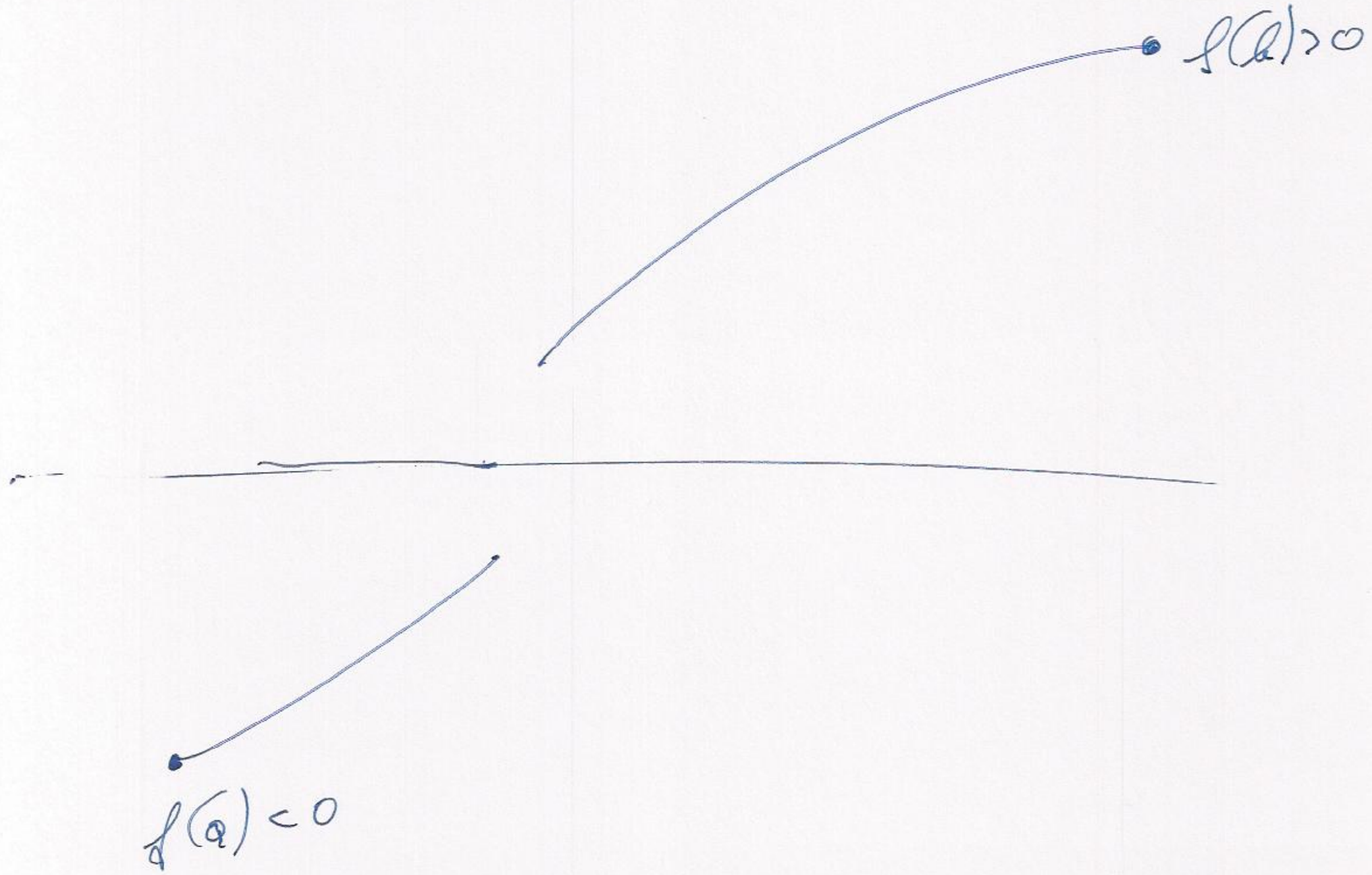


wähle $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$

$x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot f(x_0)$ > 0 ✓



$f(b)>0$
$f(a)<0$

Satz: Nullstellensatz von Bolzano

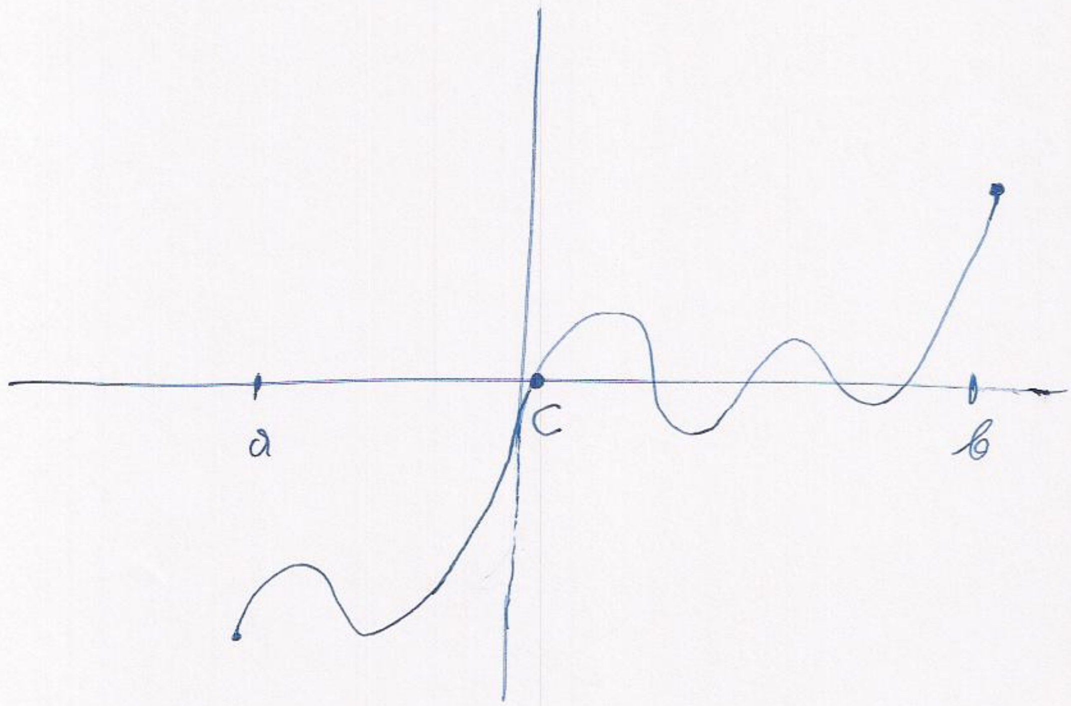
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

eine ~~auf~~ auf gesamtem abgeschlossenem Intervall stetige Fkt. mit

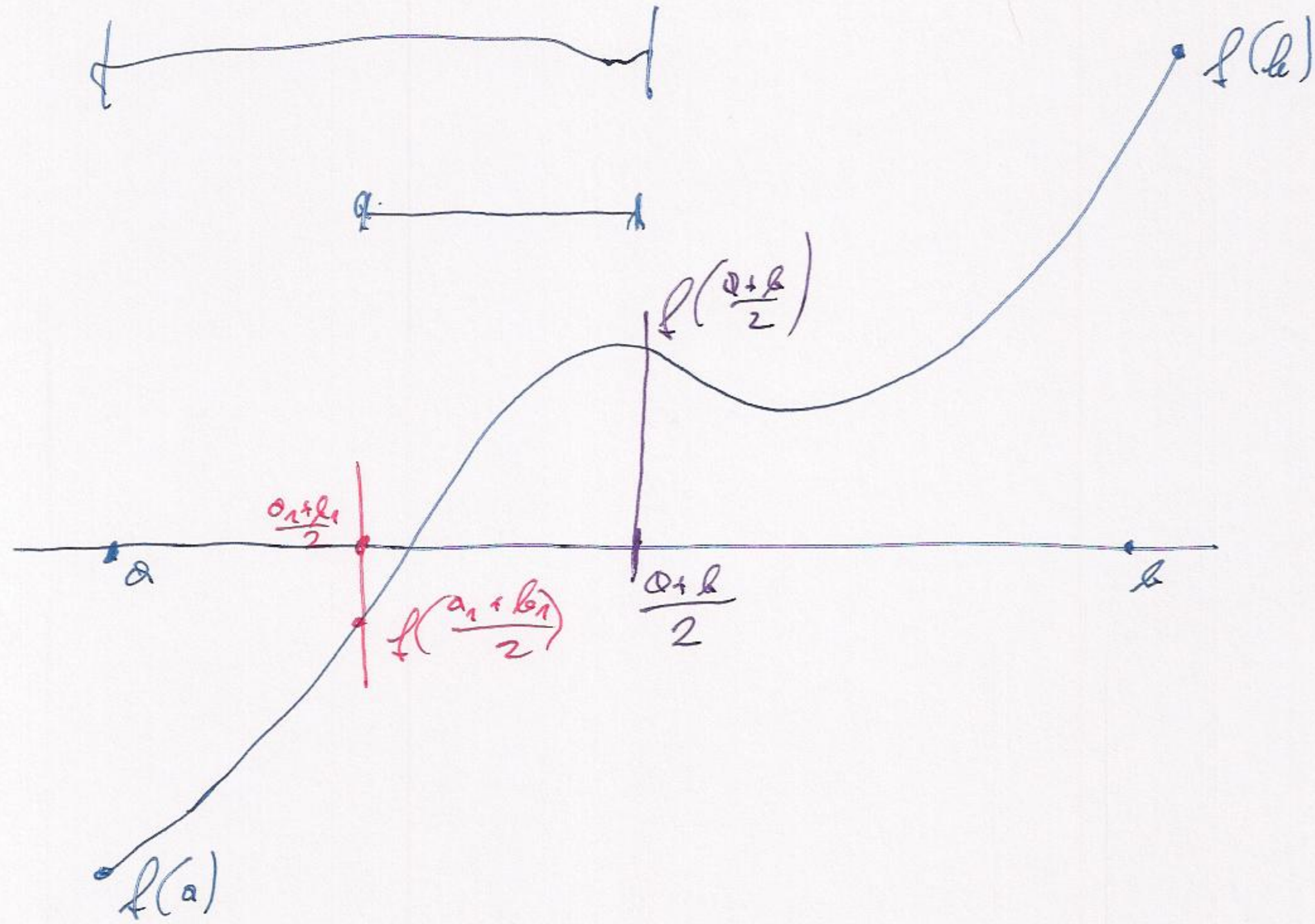
$$f(a) < 0 \quad \text{und} \quad f(b) > 0.$$

$\Rightarrow$ f besitzt auf $[a,b]$ mindestens eine Nullstelle,

d. h.: $\exists c \in [a,b] : f(c) = 0.$



Beweisidee: "Intervallhalbierung"



Konstr. Folge a_n

Folge b_n

$a_0 := a$

$b_0 := b$

---

bel $\frac{a+b}{2}$: • $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \Rightarrow$ fertig

• $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$

$\Rightarrow a_1 := \frac{a_0+b_0}{2}$

$b_1 := b_0$

• $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$

$\Rightarrow a_1 := a_0$

$b_1 := \frac{a_0+b_0}{2}$

Verfahren iterieren:

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0 \text{ ist fertig}$$

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > 0 \Rightarrow a_2 := a_1, \quad b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$$

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < 0 \Rightarrow a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}, \quad b_2 := b_1$$

$\Downarrow$

entweder • nach endl. vielen Schritten ist NST. gefunden ✓

• Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ monot. wachsend
Folge $(b_n)_{n\geq 0}$ monot. fallend
beschränkt.

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$ existiert.

$\lim_{n\to\infty} b_n = b$ existiert.

weiter (wegen Intervallhalbierung)
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$

Stetigkeit

$$f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(a) = f\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \underbrace{f(a_n)}_{\leq 0}}_{\leq 0} = f(a) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \underbrace{f(b_n)}_{\geq 0}}_{\geq 0}$$

$$\Longrightarrow \boxed{f(a) = 0}$$

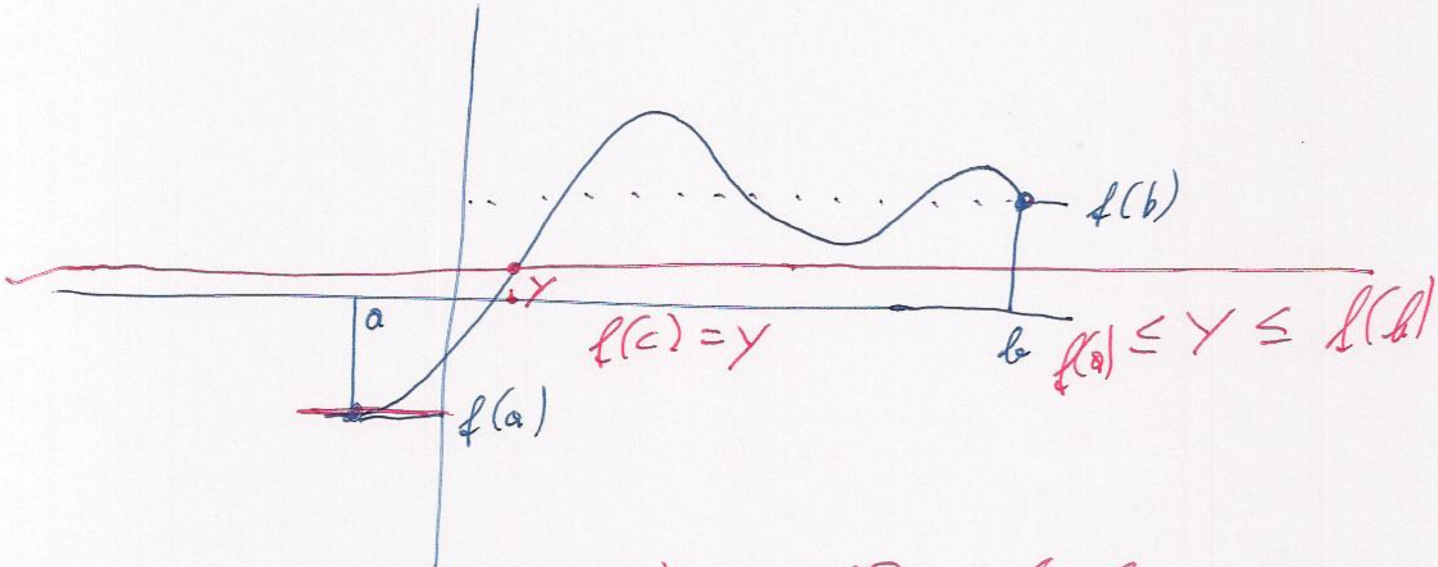
$\Downarrow$

NST!

Satz: Zwischenwertsatz

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf abgeschl. Intervall $I = [a, b]$

$\Rightarrow$ f nimmt auf $[a, b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal an



Beweis: $y \in [f(a), f(b)]$ bel. gew.

$y = f(a)$
or $y = f(b)$ $\Rightarrow$ fertig

betr. Fkt. $g(x) := f(x) - y$

NST. von Bolzano anwenden:

o.B.d.A: $f(a) < f(b)$

$g(a) = f(a) - y < 0$

$g(b) = f(b) - y > 0$

$g(x)$ stetig

$\Rightarrow \exists\, c : g(c) = 0$

$$g(c) = f(c) - Y$$

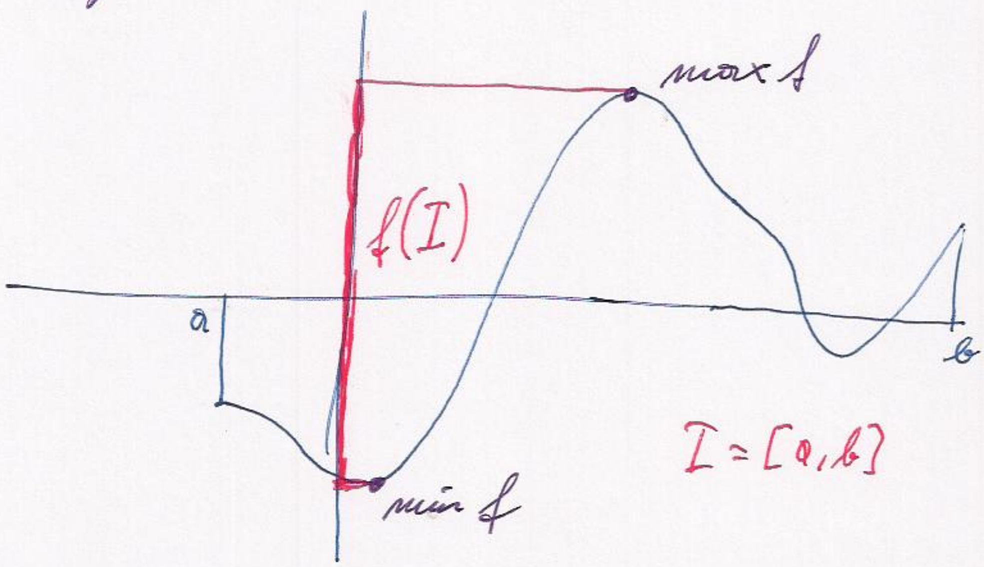
$$\Rightarrow \boxed{f(c) = Y}$$

Satz $I \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossenes Intervall

$f : I \to \mathbb{R}$ stetige Fkt. auf I

$\Rightarrow$ $f(I)$ ist auch abgeschlossenes Intervall

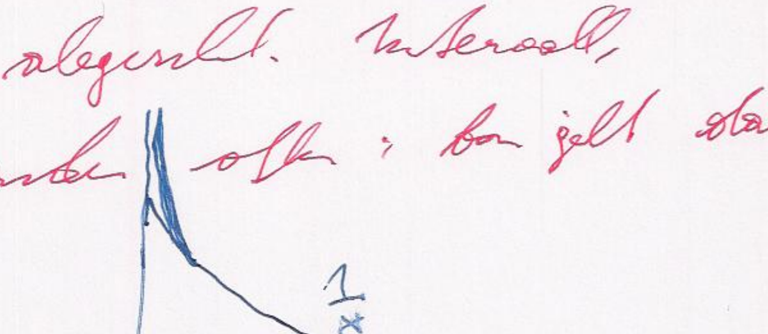
$$\{y : \exists x \in I : y = f(x)\}$$



Folgerung: Maximum und Minimum werden angenommen

---

falls kein abgeschl. Intervall, sondern offen: dann gilt das NICHT

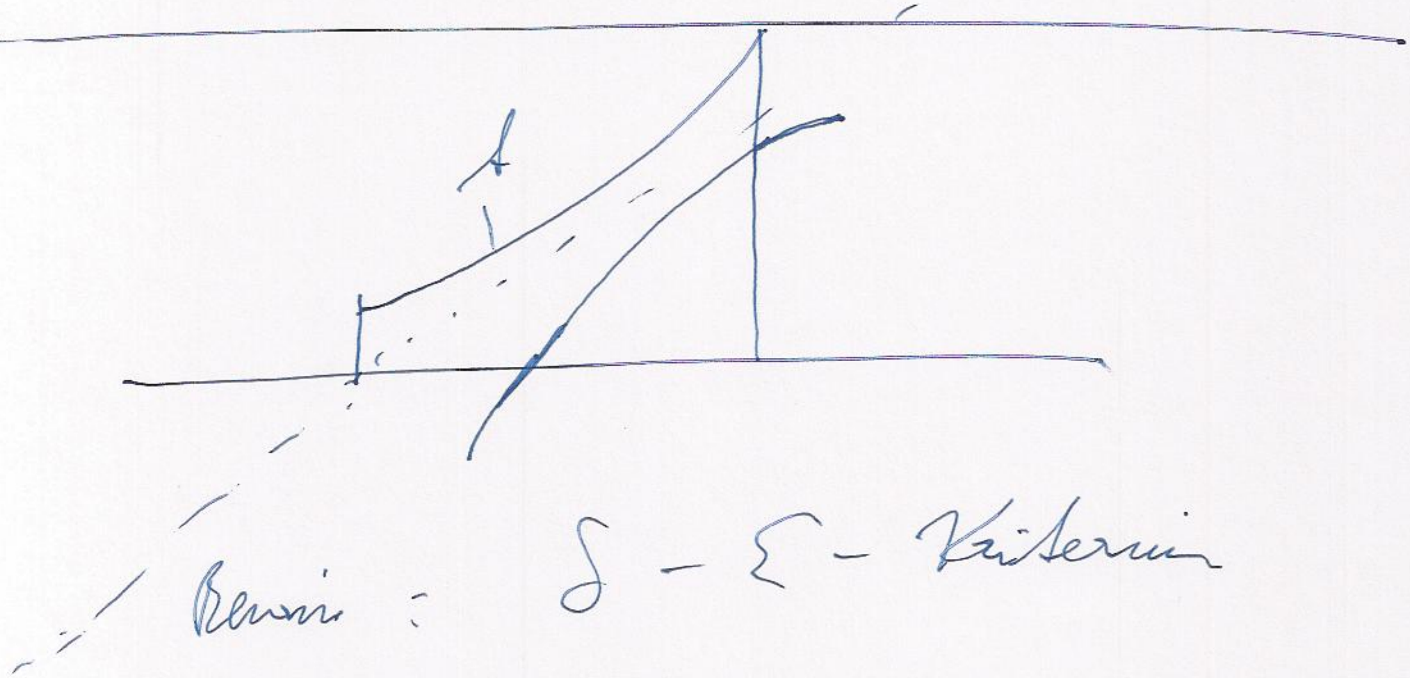


Satz (Stetigkeit der Umkehrfkt.):

$I = [a, b]$ abgeschlossenes Intervall.

$f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig

$\Rightarrow$ Umkehrfkt $f^{-1} : f(I) \to I$ ist stetig



Beweis: $\delta - \varepsilon$ - Kriterium

Satz: $f(x)$, $g(x)$ stetig

$\Rightarrow$
$$\left.\begin{array}{l} f(x) \pm g(x) \\ f(x) \cdot g(x) \\ \dfrac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{falls } g(x) \neq 0) \\ f(g(x)) \end{array}\right\} \text{stetig}$$

Polynome, Winkelfkt., Arcusfkt., Exponentialfkt., Logarithmus stetig (im Definitionsbereich)

$\Downarrow$

elementare Fkt. im Definitionsbereich stetig