Schwingungen

14A

- Harmonische Schwingungen
- Energie eines harmonischenOszillators
- Erzwungene Schwingungenund Resonanz

A: Aufgaben

Verständnisaufgaben

A14.1 • Sind die Beschleunigung und die Auslenkung (aus dem Gleichgewicht) eines harmonischen Oszillators immer gleichgerichtet? Sind es ebenso die Beschleunigung und die Geschwindigkeit sowie die Geschwindigkeit und die Verschiebung? Erläutern Sie Ihre Antworten.

A14.2 •• Ein Gegenstand an einer Feder führt eine harmonische Bewegung mit einer Amplitude von 4,0 cm aus. Wenn das Objekt von der Gleichgewichtslage 2,0 cm weit entfernt ist, welchen Bruchteil der Gesamtenergie macht dann die potenzielle Energie aus? a) Ein Viertel, b) ein Drittel, c) die Hälfte, d) zwei Drittel, e) drei Viertel.

A14.3 • Richtig oder falsch? a) Bei einem Gegenstand an einer Feder ist die Schwingungsperiode dieselbe, gleichgültig, ob die Feder horizontal oder vertikal angebracht ist. b) Bei einem Gegenstand, der mit einer Amplitude A an einer Feder schwingt, ist die maximale Geschwindigkeit bei einer horizontalen und bei einer vertikalen Feder dieselbe.

A14.4 •• Zwei identische Wagen können sich auf einem Luftkissen reibungsfrei bewegen und sind durch eine Feder miteinander verbunden. Einer der beiden Wagen wird angestoßen und dabei von dem anderen weg bewegt. Man sieht, dass die Bewegungen der Wagen dann sehr wechselhaft ablaufen: Zuerst bewegt sich ein Wagen, dann stoppt dieser, und der andere Wagen bewegt sich; so geht das hin und her. Erklären Sie die Bewegungen qualitativ.

A14.5 • Der Einfluss der Masse einer Feder auf die Bewegung eines an ihr befestigten Objekts wird gewöhnlich vernachlässigt. Beschreiben Sie qualitativ den Effekt, wenn die Federmasse nicht vernachlässigt wird.

A14.6 •• Zwei Masse-Feder-Systeme A und B schwingen so, dass ihre Energien gleich sind. Welche Formel verknüpft die Schwingungsamplituden miteinander, wenn $m_{\mathrm{A}} = 2m_{\mathrm{B}}$ ist? a) $A_{\mathrm{A}} = A_{\mathrm{B}}/4$, b) $A_{\mathrm{A}} = A_{\mathrm{B}}/\sqrt{2}$, c) $A_{\mathrm{A}} = A_{\mathrm{B}}$. d) Die Information reicht nicht aus, um das Verhältnis der Amplituden zu bestimmen.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

A14.7 •• a) Schätzen Sie die Schwingungsperiode beim Schwingen Ihrer Arme mit leeren Händen ab, wenn Sie gehen. b) Nun schätzen Sie diese, wenn Sie eine schwere Aktentasche tragen. Sehen Sie sich nach anderen Leuten um, wie sie gehen, und vergleichen Sie die Armbewegungen.

• Harmonische Schwingungen

A14.8 • Der Ort eines Teilchens ist gegeben durch $x = (7\ \mathrm{cm})\cos(6\pi\ \mathrm{s}^{-1}\,t)$, worin t in Sekunden gemessen wird. Wie groß sind a) die Frequenz, b) die Schwingungsdauer und c) die Amplitude der Teilchenbewegung? d) Wann befindet sich das Teilchen zum ersten Mal nach $t = 0$ in seiner Gleichgewichtslage? In welche Richtung bewegt es sich zu dieser Zeit?

A14.9 • Ermitteln Sie a) die maximale Geschwindigkeit und b) die maximale Beschleunigung des Teilchens in Aufgabe 8. c) Zu welcher Zeit bewegt sich das Teilchen zum ersten Mal durch $x = 0$ nach rechts?

A14.10 •• Militärische Einsatzvorschriften fordern, dass elektronische Geräte Beschleunigungen bis zu $10\,g = 98{,}1\ \mathrm{m/s^2}$

aushalten müssen. Um abzusichern, dass ihre Produkte dieser Anforderung entsprechen, testen die Hersteller sie auf einem Rütteltisch, der sie bei verschiedenen Frequenzen und Amplituden solchen Beschleunigungen aussetzt. Wie groß sollte die Frequenz sein, wenn ein Gerät mit einer Schwingungsamplitude von 1,5 cm gemäß der oben genannten Spezifizierung getestet wird?

A14.11 •• a) Zeigen Sie, dass $A_0 \cos(\omega t + \delta)$ auch als $A_s \sin \omega t + A_c \cos \omega t$ geschrieben werden kann, und bestimmen Sie A_s und A_c in Abhängigkeit von A_0 und δ. b) Bringen Sie A_s und A_c mit dem Anfangsort und der Anfangsgeschwindigkeit eines Teilchens in Zusammenhang, das eine harmonische Bewegung ausführt.

Harmonische Schwingungen und Kreisbewegungen

A14.12 • Ein Teilchen bewegt sich auf einem Kreis vom Radius 15 cm. Dort vollführt es alle 3 s eine Umdrehung. a) Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit des Teilchens? b) Wie groß ist seine Winkelgeschwindigkeit ω? c) Formulieren Sie eine Gleichung für die x-Komponente des Teilchenorts als Funktion der Zeit t unter der Annahme, dass sich das Teilchen zur Zeit $t = 0$ auf der positiven x-Achse befindet.

• Energie eines harmonischenOszillators

A14.13 • Ermitteln Sie die Gesamtenergie eines 3-kg-Objekts, das an einer horizontalen Feder mit einer Amplitude von 10 cm und einer Frequenz von 2,4 Hz schwingt.

A14.14 •• Ein 3-kg-Objekt schwingt an einer Feder mit einer Amplitude von 8 cm. Seine maximale Beschleunigung beträgt 3,50 m/s^2. Berechnen Sie die Gesamtenergie.

Federschwinger

A14.15 • Eine 85-kg-Person steigt in ein Auto der Masse 2400 kg ein, wobei es um 2,35 cm durchfedert. Mit welcher Frequenz werden Auto und Fahrgast auf der Federung schwingen, wenn man annimmt, dass keine Dämpfung vorliegt?

A14.16 •• Ein Körper mit der Masse m wird von einer vertikalen Feder mit der Kraftkonstanten 1800 N/m gehalten. Wenn er aus seiner Gleichgewichtslage 2,5 cm weit nach unten gezogen und aus der Ruhelage heraus losgelassen wird, schwingt er mit 5,5 Hz. a) Bestimmen Sie m. b) Bestimmen Sie die Auslenkung der Feder in der Gleichgewichtslage gegenüber ihrer natürlichen Länge. c) Drücken Sie die Verschiebung y, die Geschwindigkeit v_y und die Beschleunigung a_y als Funktionen der Zeit t aus.

A14.17 •• Ein Handkoffer mit einer Masse von 20 kg hängt an zwei elastischen Kordeln, wie es in der Abbildung gezeigt ist. Jede Kordel ist um 5 cm gedehnt, wenn der Handkoffer im Gleichgewicht ist. Wie groß ist seine Schwingungsfrequenz, wenn er ein wenig nach unten gezogen und dann losgelassen wurde?

A14.18 •• Ein Objekt mit einer Masse von 2,0 kg ist oben an einer vertikalen Feder befestigt, die am Boden verankert ist. Die Länge der nicht zusammengepressten Feder ist 8,0 cm. Ist das Objekt im Gleichgewicht, so beträgt die Länge der Feder 5 cm. Während sich das Objekt in seiner Gleichgewichtslage in Ruhe befindet, erhält es mit einem Hammer einen nach unten gerichteten Impuls, so dass seine Anfangsgeschwindigkeit 0,3 m/s beträgt. a) Welche maximale Höhe über dem Boden wird das Objekt schließlich erreichen? b) Wie viel Zeit benötigt das Objekt, um zum ersten Mal seine maximale Höhe zu erreichen? c) Wird die Feder wieder unkomprimiert werden? Welche minimale Anfangsgeschwindigkeit muss das Objekt erhalten, damit die Feder zu irgendeinem Zeitpunkt unkomprimiert ist?

Energie eines vertikalen Federschwingers

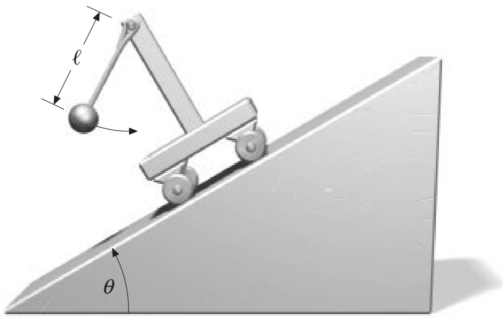
A14.19 •• Ein 1,5-kg-Gegenstand, der eine Feder aus ihrer Eigenlänge um 2,8 cm dehnt, wenn er in Ruhe an ihr hängt, schwingt mit einer Amplitude von 2,2 cm. a) Ermitteln Sie die Gesamtenergie des Systems. b) Berechnen Sie die potenzielle Gravitationsenergie im Maximum der Abwärtsverschiebung. c) Bestimmen Sie die potenzielle Energie der Feder im Maximum der Abwärtsverschiebung. d) Wie groß ist die maximale kinetische Energie des Gegenstands?

Mathematisches Pendel

A14.20 • Bestimmen Sie die Länge eines mathematischen Pendels, wenn die Schwingungsdauer an einem Ort 5 s beträgt, an dem $g = 9{,}81$ m/s^2 ist.

A14.21 •• Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie eines mathematischen Pendels, das Schwingungen mit kleiner Amplitude φ_0 ausführt, näherungsweise durch $E \approx \frac{1}{2} m g \ell \varphi_0^2$ gegeben ist. (*Hinweis:* Verwenden Sie die Näherung $\cos\varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$ für kleine φ.)

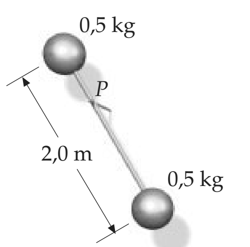
A14.22 •• Ein mathematisches Pendel der Länge ℓ ist, wie in der Abbildung zu ersehen, mit einem schweren Wagen verbunden, der eine geneigte Ebene mit dem Winkel θ gegenüber der Horizontalen ohne Reibung heruntergleitet. Ermitteln Sie die Schwingungsdauer des Pendels auf dem gleitenden Wagen.



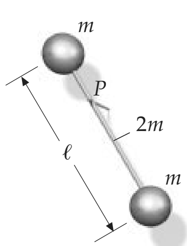
Physikalisches Pendel

A14.23 • Eine dünne Scheibe mit der Masse 5 kg und dem Radius 20 cm ist an einer horizontalen Achse aufgehängt, die am Rand der Scheibe senkrecht zu dieser verläuft. Die Scheibe wird aus dem Gleichgewicht leicht ausgelenkt und dann losgelassen. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer der darauf folgenden harmonischen Schwingung.

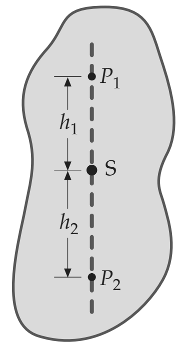
A14.24 •• Die Abbildung zeigt eine Hantel mit zwei gleichen Massen, die als Punktmassen an einer dünnen masselosen Stange der Länge ℓ angenommen werden. a) Zeigen Sie, dass die Schwingungsdauer dieses Pendels minimal ist, wenn der Drehpunkt P in einer der Massen liegt. b) Bestimmen Sie die Schwingungsperiode dieses physikalischen Pendels, wenn der Abstand zwischen P und der oberen Masse $\ell/4$ beträgt.



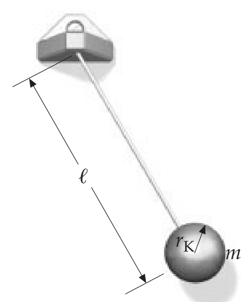
A14.25 •• Es wird angenommen, dass der Stab in Aufgabe 24 die Masse $2m$ hat. Bestimmen Sie den Abstand zwischen der oberen Masse und dem Drehpunkt P, wenn die Schwingungsperiode dieses physikalischen Pendels minimal ist.



A14.26 ••• Ein ebenes Objekt hat ein Trägheitsmoment I bezüglich seines Massenmittelpunkts. Wenn es um den Punkt P_1 gedreht wurde (siehe Abbildung), schwingt es um ihn mit der Schwingungsdauer T. Gegenüber dem Massenmittelpunkt gibt es einen zweiten Punkt P_2, um den sich das Objekt drehen kann, so dass die Schwingungsperiode ebenfalls T ist. Zeigen Sie, dass $h_1 + h_2 = g\,T^2/(4\pi^2)$ ist.



A14.27 ••• Ein physikalisches Pendel (siehe Abbildung) besteht aus einer Kugel mit dem Radius r_K und der Masse m, die an einem Faden befestigt ist. Der Abstand des Kugelzentrums vom Aufhängepunkt ist ℓ. Wenn r_K viel kleiner als ℓ ist, kann ein solches Pendel oft als mathematisches Pendel der Länge ℓ betrachtet werden.



a) Zeigen Sie, dass die Schwingungsdauer für kleine Amplituden durch

$$T = T_0\sqrt{1 + \frac{2\,r_K^2}{5\,\ell^2}}$$

gegeben ist, wobei $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ die Schwingungsperiode eines mathematischen Pendels der Länge ℓ ist. b) Zeigen Sie: Wenn r_K viel kleiner als ℓ ist, dann ist die Schwingungsdauer näherungsweise durch $T \approx T_0\,(1 + r_K^2/5\,\ell^2)$ gegeben. c) Berechnen Sie für $\ell = 1$ m und $r_K = 2$ cm den Fehler, wenn die Näherung $T \approx T_0$ für dieses Pendel angesetzt wird. Wie groß muss der Radius des Pendelkörpers bei einem Fehler von 1 % sein?

Gedämpfte Schwingungen

A14.28 • Ein 2 kg schwerer Gegenstand schwingt mit einer Anfangsamplitude von 3 cm an einer Feder mit der Kraftkonstante $k_F = 400$ N/m. Ermitteln Sie a) die Schwingungsdauer und b) die gesamte Anfangsenergie. c) Bestimmen Sie die Dämpfungskonstante b und den Q-Faktor, wenn die Energie um 1 % pro Periode abnimmt.

A14.29 •• Ein Oszillator hat einen Q-Faktor von 20. a) Um welchen Bruchteil nimmt die Energie während jeder Periode ab? b) Verwenden Sie die Gleichung

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2\,m\,\omega_0}\right)^2}\,,$$

um die prozentuale Differenz zwischen ω' und ω_0 zu ermitteln. (*Hinweis:* Setzen Sie die Näherung $(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ für kleine x an.)

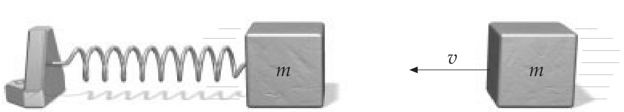
A14.30 •• Es wurde festgestellt, dass die schwingende Erde eine Resonanzperiode von 54 min und einen Q-Faktor von ungefähr 400 besitzt und dass sie nach einem großen Erdbeben für ca. zwei Monate „nachklingt". a) Ermitteln Sie den Prozentsatz der Schwingungsenergie, der durch Dämpfungskräfte während jeder Periode verloren geht. b) Zeigen Sie, dass nach n Perioden die Energie $E_n = (0{,}984)^n\,E_0$ beträgt, wobei E_0 die ursprüngliche Energie ist. c) Wie groß ist die Energie nach zwei Tagen, wenn die ursprüngliche Schwingungsenergie eines Erdbebens E_0 ist?

• Erzwungene Schwingungenund Resonanz

A14.31 •• Ein gedämpfter Oszillator verliert während einer Periode 3,5 % seiner Energie. a) Wie viele Zyklen laufen ab, bis die Hälfte der ursprünglichen Energie abgegeben ist? b) Wie groß ist der Q-Faktor? c) Wie groß ist die Resonanzbreite, wenn der Oszillator angetrieben wird und seine Eigenfrequenz 100 Hz beträgt?

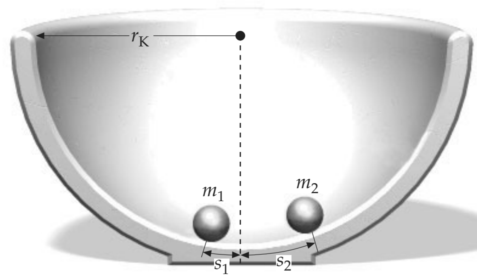
Stöße

A14.32 ••• Die Abbildung zeigt ein schwingendes Masse-Feder-System, angebracht auf einer reibungsfreien Oberfläche, und eine zweite gleiche Masse, die sich mit der Geschwindigkeit v zu der schwingenden Masse hin bewegt. Die Bewegung der schwingenden Masse ist durch $x(t) = (0{,}1\text{ m})\cos(40\text{ s}^{-1}\,t)$ gegeben, worin x die Verschiebung der Masse aus ihrer Gleichgewichtslage ist. Die zwei Massen stoßen in dem Moment elastisch zusammen, in dem sich die schwingende Masse durch ihre Gleichgewichtslage nach rechts bewegt. a) Wie groß muss die Geschwindigkeit v der zweiten Masse sein, damit der Federschwinger infolge des elastischen Zusammenstoßes zur Ruhe kommt? b) Wie groß ist die Geschwindigkeit der zweiten Masse nach dem elastischen Stoß?



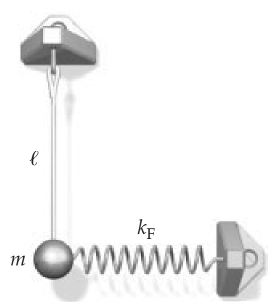
Allgemeine Aufgaben

A14.33 •• Ein kleines Teilchen der Masse m gleitet ohne Reibung in einer Kugelschale vom Radius r_K. a) Zeigen Sie, dass die Bewegung des Teilchens die gleiche ist, wie wenn es an einer Schnur der Länge r_K befestigt wäre. b) Die Abbildung zeigt ein Teilchen der Masse m_1, das um einen kleinen Abstand s_1 aus dem tiefsten Punkt der Schale heraus verschoben wurde. Der Abstand s_1 ist viel kleiner als r_K. Ein zweites Teilchen der Masse m_2 ist in die entgegengesetzte Richtung um den Abstand $s_2 = 3\,s_1$ verschoben worden, wobei s_2 ebenfalls viel kleiner als r_K ist. Wo treffen die Teilchen zusammen, wenn sie zur selben Zeit losgelassen wurden? Erläutern Sie Ihr Ergebnis.



A14.34 •• Es wird ein sehr kleiner homogener Ball mit der Masse m und dem Radius r_B betrachtet, der ohne Gleiten in der Nähe des Fußpunkts der Schale rollt (siehe die Abbildung zu Aufgabe 33). a) Formulieren Sie einen Ausdruck für die Gesamtenergie des Balls in Abhängigkeit von seiner Geschwindigkeit und von dem (als klein angenommenen) Abstand vom Fußpunkt der Schale. b) Vergleichen Sie diesen Ausdruck mit demjenigen für die Gesamtenergie eines Balls der Masse m, der an der Schale reibungsfrei heruntergleitet, und bestimmen Sie dadurch seine Schwingungsfrequenz um den Fußpunkt der Schale.

A14.35 •• Die Abbildung zeigt ein Pendel der Länge ℓ mit einem Pendelkörper der Masse m. Der Pendelkörper ist an einer horizontalen Feder mit der Federkonstanten k_F befestigt. Wenn sich der Pendelkörper direkt unter der Pendelaufhängung befindet, hat die Feder ihre Gleichgewichtslänge. a) Leiten Sie einen Ausdruck für die Schwingungsdauer dieses Systems bei kleinen Amplituden her. b) Es wird angenommen, dass $m = 1$ kg ist und ℓ so gewählt wird, dass in Abwesenheit der Feder die Schwingungsdauer 2,0 s beträgt. Wie groß ist die Federkonstante k_F, wenn die Schwingungsdauer des Systems 1,0 s beträgt?



A14.36 •• Die Gravitationsbeschleunigung g verändert sich mit der geografischen Breite wegen der Erdrotation und weil die Erde nicht exakt kugelförmig ist. Dies wurde im 17. Jahrhundert entdeckt, als man beobachtete, dass eine Pendeluhr – sorgfältig justiert, um die exakte Zeit in Paris anzuzeigen – in der Nähe des Äquators um ungefähr 90 s/d nachging. a) Zeigen Sie, dass eine kleine Abweichung Δg der Gravitationsbeschleunigung eine kleine Änderung ΔT der Schwingungsdauer des Pendels hervorruft, wobei ihr Zusammenhang durch $\Delta T/T = -\frac{1}{2}\,\Delta g/g$ gegeben ist. (Verwenden Sie Differenziale, um diesen Zusammenhang zu zeigen.) b) Wie groß ist die Änderung von g, wenn man bei der Schwingungsdauer eine Änderung um 90 s/d registriert?

A14.37 ●● Eine ebene Plattform schwingt horizontal in harmonischer Bewegung, deren Schwingungsdauer 0,8 s beträgt. a) Ein Kasten auf der Plattform beginnt zu gleiten, wenn die Schwingungsamplitude 40 cm erreicht. Wie groß ist der Haftreibungskoeffizient zwischen Kasten und Plattform? b) Wie groß ist die maximale Schwingungsamplitude, bevor der Kasten gleitet, wenn der Haftreibungskoeffizient zwischen Kasten und Plattform 0,40 beträgt?

A14.38 ●●● Die potenzielle Energie eines Teilchens der Masse m ist als Funktion des Orts durch

$$E_{\mathrm{pot}}(x) = E_{\mathrm{pot},0}\,(\xi + 1/\xi)$$

gegeben, wobei $\xi = x/a$ gilt und a eine Konstante ist. a) Zeichnen Sie $E_{\mathrm{pot}}(x)$ als Funktion von x für $0{,}1\,a < x < 3\,a$. b) Geben Sie den Wert von x_0 im stabilen Gleichgewicht an. c) Geben Sie die potenzielle Energie $E_{\mathrm{pot}}(x)$ für $x = x_0 + \varepsilon$ an, wobei ε eine kleine Verschiebung aus der Gleichgewichtslage x_0 bedeutet. d) Nähern Sie den $(1/x)$-Term mit Hilfe der binomischen Reihe

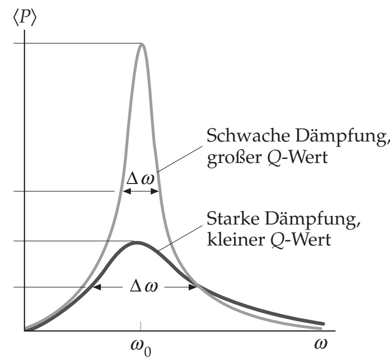
$$\begin{aligned}(1+r)^n &= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{n}{i} r^i \\ &= 1 + n\,r + \frac{n\,(n-1)}{2!}\,r^2 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}\,r^3 + \cdots\,, \\ &\quad \text{mit} \quad r = \varepsilon/x_0 \ll 1\,,\end{aligned}$$

an und vernachlässigen Sie alle Terme mit Potenzen größer als 2. e) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Potenzial eines harmonischen Oszillators. Zeigen Sie, dass die Masse bei kleinen Verschiebungen aus dem Gleichgewicht eine harmonische Bewegung ausführt, und bestimmen Sie deren Frequenz.

A14.39 ●●● Die Abbildung zeigt einen homogenen Halbzylinder mit dem Radius r_Z und der Masse m, der auf einer horizontalen Oberfläche ruht. Wenn eine Seite dieses Zylinders leicht niedergedrückt und wieder losgelassen wird, dann beginnt er, um seine Gleichgewichtslage zu schwingen. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer.

A14.40 ●●● Ein gedämpfter Oszillator hat eine Kreisfrequenz ω', die um 10 % kleiner ist als seine Kreisfrequenz ohne Dämpfung. a) Um welchen Faktor nimmt die Amplitude des Oszillators während jeder Schwingung ab? b) Um welchen Faktor wird seine Energie während jeder Schwingung verringert?

A14.41 ●●● In dieser Aufgabe ist ein Ausdruck für die mittlere Leistung (die Input-Leistung) herzuleiten, die durch eine treibende Kraft auf den erzwungenen Oszillator übertragen wird (siehe Abbildung).



a) Zeigen Sie, dass die von der treibenden Kraft dem System momentan zugeführte Leistung durch

$$P = F_x\,v_x = -A\;\omega\,F_{x,0}\,\cos\omega t\,\sin(\omega t - \delta)$$

gegeben ist. b) Verwenden Sie das Additionstheorem

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin\theta_1\,\cos\theta_2 - \cos\theta_1\,\sin\theta_2\,,$$

um zu zeigen, dass die in Teilaufgabe a gegebene Gleichung als

$$P = A\,\omega\,F_{x,0}\,\sin\delta\,\cos^2\omega t = A\,\omega\,F_{x,0}\,\cos\delta\,\cos\omega t\,\sin\omega t$$

geschrieben werden kann. c) Zeigen Sie, dass das Zeitmittel des zweiten Terms in Ihrem Ergebnis der Teilaufgabe b über eine oder mehrere Perioden gleich null ist und dass deshalb gilt:

$$\langle P\rangle = \tfrac{1}{2}\,A\,\omega\,F_{x,0}\,\sin\delta\,.$$

d) Verwenden Sie die Gleichung

$$\tan\delta = \frac{b\,\omega}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

und konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck, in dem der dem Winkel δ gegenüberliegenden Seite der Wert $b\,\omega$ und der ihm anliegenden Seite der Wert $m\,(\omega_0^2 - \omega^2)$ zugeordnet wird. Zeigen Sie an diesem Dreieck, dass gilt:

$$\sin\delta = \frac{b\,\omega}{\sqrt{m^2\,(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\,\omega^2}} = \frac{b\,\omega\,A}{F_{x,0}}\,.$$

e) Nutzen Sie Ihr Ergebnis von Teilaufgabe d, um ωA aus Ihrem Ergebnis von Teilaufgabe c zu eliminieren, und zeigen Sie so, dass die mittlere Input-Leistung als

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}\,\frac{F_{x,0}^2}{b}\,\sin^2\delta = \frac{1}{2}\,\frac{b\,\omega^2\,F_{x,0}^2}{m^2\,(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\,\omega^2}$$

geschrieben werden kann.

A14.42 ●●● Nutzen Sie das Ergebnis von Aufgabe 41, um die Gleichung $\Delta\omega/\omega_0 = 1/Q$ herzuleiten, die die Breite der Resonanzkurve mit dem Q-Wert verknüpft, wenn die Resonanz scharf ist. Im Resonanzfall ist der Nenner des zweiten Bruchs in der Gleichung von Aufgabe 41 e gleich $b^2\,\omega_0^2$, und $\langle P\rangle$ hat den Maximalwert. Bei einer scharfen Resonanz kann die Änderung von ω im Zähler dieser Gleichung vernachlässigt werden. Dann

wird die Input-Leistung die Hälfte ihres Maximalwerts bei den Werten von ω ausmachen, für die der Nenner $2b^2\omega_0^2$ beträgt.
a) Zeigen Sie, dass ω dann die Beziehung

$m^2(\omega-\omega_0)^2(\omega+\omega_0)^2 \approx b^2\omega_0^2$

erfüllt.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Näherung $\omega+\omega_0 \approx 2\omega_0$, dass gilt:

$$\omega-\omega_0 \approx \pm\frac{b}{2m}\,.$$

c) Drücken Sie b in Abhängigkeit von Q aus.

d) Kombinieren Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben b und c, um zu zeigen, dass es zwei Werte von ω gibt, für die die Input-Leistung die Hälfte des Werts bei Resonanz ausmacht, und dass sich diese Werte zu

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q}$$

ergeben, so dass gilt: $\omega_2-\omega_1 = \Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$.

A14.43 ••• Das Morse-Potenzial, das oft zur Modellbeschreibung zwischenatomarer Kräfte verwendet wird, kann in der Form $\phi(r) = D\left(1-\mathrm{e}^{-\beta(r-r_0)}\right)^2$ geschrieben werden, worin r der Abstand zwischen zwei Atomkernen ist. a) Verwenden Sie ein Tabellenkalkulationsprogramm oder einen grafikfähigen Taschenrechner, um eine grafische Darstellung des Morse-Potenzials für $D = 5$ eV, $\beta = 0{,}2\ \mathrm{nm}^{-1}$ und $r_0 = 0{,}75$ nm zu erzeugen. b) Bestimmen Sie den Gleichgewichtsabstand und die „Federkonstante“ beim Morse-Potenzial, wenn kleine Verschiebungen aus dem Gleichgewicht vorausgesetzt werden. c) Ermitteln Sie eine Formel für die Schwingungsfrequenz eines Moleküls aus zwei gleichen Atomen der Masse m.

Schwingungen

14L

L: Lösungen

L14.1 Bedingung für eine einfache harmonische Bewegung ist eine Rückstellkraft, die proportional zur Auslenkung und dieser entgegengesetzt gerichtet ist: $F = -k_F x$. Daher sind Beschleunigung und Auslenkung (sofern sie nicht gerade null sind) stets einander entgegengerichtet. Dagegen können Geschwindigkeit und Beschleunigung dieselbe Richtung haben, wie auch Geschwindigkeit und Auslenkung.

L14.2 Die Gesamtenergie eines Gegenstands, der eine harmonische Bewegung ausführt, ist $E = \frac{1}{2} k_F A^2$. Darin ist k_F die Kraftkonstante oder Federkonstante, und A ist die Amplitude der Bewegung. Die potenzielle Energie ist $E_{pot}(x) = \frac{1}{2} k_F x^2$. Für den Quotienten gilt also

$$\frac{E_{pot}(x)}{E} = \frac{\frac{1}{2} k_F x^2}{\frac{1}{2} k_F A^2} = \frac{x^2}{A^2}\,.$$

Mit den gegebenen Werten $x = 2$ cm und $A = 4$ cm ergibt sich für diesen Quotienten $(2\text{ cm})^2/(4\text{ cm})^2 = \frac{1}{4}$. Also ist Lösung a richtig.

L14.3 a) Richtig. Die Schwingungsdauer bzw. Schwingungsperiode eines Gegenstands hängt von seiner Masse und von der Federkonstanten ab, nicht aber von der Orientierung des Oszillators.

b) Richtig. Die maximale Geschwindigkeit eines schwingenden Gegenstands hängt von seiner Amplitude und von seiner Kreisfrequenz ab, nicht aber von der Orientierung des Oszillators.

L14.4 Wir nehmen an, der eine Wagen erhält durch das Anstoßen die Anfangsgeschwindigkeit v. Danach wirken keine äußeren Kräfte mehr auf die Wagen ein. Ihr gemeinsamer Massenmittelpunkt bewegt sich also nun mit der konstanten Geschwindigkeit $v/2$. Die beiden Wagen führen dabei eine harmonische Schwingung um ihren gemeinsamen Massenmittelpunkt aus, wobei die Amplitude ihrer jeweiligen Geschwindigkeit $v/2$ ist. Wenn also ein Wagen gerade relativ zum gemeinsamen Massenmittelpunkt die Geschwindigkeit $v/2$ hat, bewegt sich der andere mit der Geschwindigkeit $-v/2$. Die Geschwindigkeiten relativ zum Laborsystem sind dabei $+v$ bzw. 0. Eine halbe Schwingungsdauer später ist die Situation genau umgekehrt: Nun ruht der eine Wagen relativ zum Laborsystem, während sich der andere bewegt.

L14.5 Die Frequenz eines Feder-Masse-Systems mit der Masse m und der Federkonstanten k_F ist

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_F}{m}}\,.$$

Sie ist also umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Masse. Wird die Masse der Feder berücksichtigt, dann ist die in die Formel einzusetzende Masse größer, und die Kreisfrequenz wird geringer.

L14.6 Die Energie eines schwingenden Feder-Masse-Systems mit der Masse m, der Kraftkonstanten k_F und der Amplitude A ist gegeben durch $E = \frac{1}{2} k_F A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$.

Wir bilden nun den Quotienten der Energien zweier solcher Systeme, die die Masse m_A bzw. m_B haben:

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{\frac{1}{2} m_A \omega_A^2 A_A^2}{\frac{1}{2} m_B \omega_B^2 A_B^2}\,.$$

Die Energien sollen gleich sein; also setzen wir diesen Quotienten gleich 1. Mit $m_A = 2\,m_B$ ergibt dies

$$\frac{2\,m_B \omega_A^2 A_A^2}{m_B \omega_B^2 A_B^2} = \frac{2\,\omega_A^2 A_A^2}{\omega_B^2 A_B^2} = 1\,.$$

Daraus folgt $A_A = \dfrac{\omega_B}{\sqrt{2}\,\omega_A}\,A_B\,.$

Ohne Kenntnis der Kreisfrequenzen oder der Kraftkonstanten sind keine näheren Angaben möglich. Also ist Lösung d richtig.

L14.7 Wir setzen als durchschnittliche Länge eines Arms $\ell = 0{,}8$ m an und betrachten ihn als gleichförmigen Stab, der sich um eines seiner Enden drehen kann. a) Das Trägheitsmoment eines Stabs der Masse m bei der Drehung um eine Achse durch eines seiner Enden ist $I = \frac{1}{3} m \ell^2$. Damit und mit dem Abstand $d = \frac{1}{2}\ell$ des Massenmittelpunkts vom Drehpunkt erhalten wir für die

Schwingungsperiode

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{I}{m\,g\,d}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\,m\,\ell^2}{m\,g\,(\frac{1}{2}\,\ell)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\,\ell}{3\,g}}$$
$$\approx 2\pi\sqrt{\frac{2\,(0{,}8\text{ m})}{3\,(9{,}81\text{ m}\cdot\text{s}^{-2})}} = 1{,}5\text{ s}\,.$$

b) Wenn man eine Tasche trägt, ist nach unseren vereinfachenden Annahmen sozusagen der Arm etwas länger. Wir nehmen zudem an, dass die Tasche deutlich schwerer als der Arm ist, und setzen daher die Formel für ein einfaches Pendel mit der Länge $\ell' = 1$ m an:

$$T' \approx 2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1\text{ m}}{9{,}81\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}} = 2\text{ s}\,.$$

Die hier berechneten Werte erscheinen realistisch.

L14.8 Wir vergleichen jeden Term im gegebenen Ausdruck $x = (7\text{ cm})\cos(6\pi\text{ s}^{-1}\,t)$ mit dem entsprechenden Term in der Gleichung $x = A\cos(\omega t + \delta)$. Darin ist A die Amplitude der Bewegung, ω die Kreisfrequenz und δ eine Phasenkonstante (die hier null ist).

a) Wegen $\omega t = 6\pi\text{ s}^{-1}\,t$ ist die Frequenz der Teilchenbewegung

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{6\pi\text{ s}^{-1}}{2\pi} = 3{,}00\text{ Hz}\,.$$

b) Die Schwingungsdauer entspricht dem Reziprokwert der Frequenz:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{3{,}00\text{ Hz}} = 0{,}333\text{ s}\,.$$

c) Die Amplitude ist, wie aus dem eingangs erläuterten Vergleich hervorgeht, $A = 7$ cm.

d) Beim Erreichen der Gleichgewichtslage $x = 0$ ist $\cos\omega t = 0$. Daraus folgt $\omega t = \text{acos}\,0 = \pi/2$ und

$$t_{x=0} = \frac{\pi}{2\,\omega} = \frac{\pi}{2\,(6\pi)\text{ s}^{-1}} = 0{,}0833\text{ s}\,.$$

Die Ableitung nach der Zeit ergibt die Geschwindigkeit:

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(7\text{ cm})\cos(6\pi\text{ s}^{-1}\,t)\right]$$
$$= -(42\pi\text{ cm}\cdot\text{s}^{-1})\sin(6\pi\text{ s}^{-1}\,t)\,.$$

Beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt $t = 0{,}0833$ s ist die Geschwindigkeit
$\upsilon_{x=0} = -(42\pi\text{ cm}\cdot\text{s}^{-1})\sin[6\pi\text{ s}^{-1}\,(0{,}0833\text{ s})] < 0$.
Das Teilchen bewegt sich also zu diesem Zeitpunkt in negativer Richtung.

L14.9 Die Position des Teilchens ist $x = A\cos(\omega t + \delta)$, wobei $A = 7$ cm und $\omega = 6\pi\text{ s}^{-1}$ sowie $\delta = 0$ ist. Die Geschwindigkeit des Teilchens ist gegeben durch
$\upsilon = -A\,\omega\sin(\omega t + \delta)$.

a) Die maximale Geschwindigkeit ist
$\upsilon_{\text{max}} = A\,\omega = (7\,\text{cm})(6\pi\,\text{s}^{-1}) = 42\pi\text{ cm}\cdot\text{s}^{-1} = 1{,}32\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

b) Für die maximale Beschleunigung ergibt sich

$$a_{\text{max}} = A\,\omega^2 = (7\text{ cm})\,(6\pi\text{ s}^{-1})^2 = 252\,\pi^2\text{ cm}\cdot\text{s}^{-2}$$
$$= 24{,}9\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

c) Beim Durchgang durch $x = 0$ ist $\cos\omega t = 0$ und daher
$\omega t = \text{acos}\,0 = \pi/2$ oder $3\pi/2$.
Für $\omega t = \pi/2$ ergibt sich für die Geschwindigkeit
$\upsilon_{\pi/2} = -A\,\omega\sin(\pi/2) = -A\,\omega$.
Das Teilchen bewegt sich also nach links.
Für $\omega t = 3\pi/2$ erhalten wir $\upsilon_{3\pi/2} = A\,\omega$. Das Teilchen bewegt sich also nach rechts. Auflösen nach t ergibt hierfür

$$t_{3\pi/2} = \frac{3\pi}{2\,\omega} = \frac{3\pi}{2\,(6\pi\text{ s}^{-1})} = 0{,}250\text{ s}\,.$$

L14.10 Mit $\omega = 2\pi\nu$ gilt für die maximale Beschleunigung eines Oszillators $a_{\text{max}} = A\,\omega^2 = 4\pi^2 A\,\nu^2$. Darin ist A die Amplitude und ν die Frequenz. Für diese ergibt sich

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a_{\text{max}}}{A}} = \sqrt{\frac{98{,}1\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}{1{,}5\cdot 10^{-2}\text{ m}}} = 12{,}9\text{ Hz}\,.$$

L14.11 a) Mit der trigonometrischen Umformung
$\cos(\omega t + \delta) = \cos\omega t\cos\delta - \sin\omega t\sin\delta$
ergibt sich aus der gegebenen Gleichung

$$A_0\cos(\omega t + \delta) = A_0\,[\cos\omega t\cos\delta - \sin\omega t\sin\delta]$$
$$= -A_0\sin\delta\sin\omega t + A_0\cos\delta\cos\omega t$$
$$= A_\text{s}\sin\omega t + A_\text{c}\cos\omega t\,.$$

Darin ist $A_\text{s} = -A_0\sin\delta$ und $A_\text{c} = A_0\cos\delta$.

b) Bei $t = 0$ ist $x(0) = A_0\cos\delta = A_\text{c}$. Die Ableitung der Funktion $x(t)$ nach der Zeit ergibt die Geschwindigkeit:

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_\text{s}\sin\omega t + A_\text{c}\cos\omega t)$$
$$= A_\text{s}\,\omega\cos\omega t - A_\text{c}\,\omega\sin\omega t\,.$$

Damit erhalten wir für die Geschwindigkeit bei $t = 0$:
$\upsilon(0) = \omega A_\text{s} = -\omega A_0\sin\delta$.

L14.12 a) Die Bahngeschwindigkeit ist der Quotient aus dem Umfang und der Umdrehungsdauer:

$$\upsilon = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\,(15\text{ cm})}{3\text{ s}} = 31{,}4\text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}.$$

b) Die Kreisfrequenz ergibt sich zu

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

c) Für die x-Komponente des Teilchenorts gilt
$x = A\cos(\omega t + \delta)$.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll sich das Teilchen auf der positiven x-Achse befinden. Dafür gilt $x = A$ und daher
$A = A\cos\delta$, also $\delta = \text{acos}\,1 = 0$.

Einsetzen liefert

$$x = (15\ \text{cm})\cos\left(\frac{2\pi}{3}\ \text{s}^{-1}\right)t\,.$$

L14.13 Für die Gesamtenergie gilt $E = \frac{1}{2}\,m\,v_{\max}^2$ und für die maximale Geschwindigkeit $v_{\max} = A\,\omega = 2\,\pi A\,\nu$. Dies setzen wir ein und erhalten

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}\,m\,(2\,\pi A\,\nu)^2 = 2\,mA^2\,\pi^2\,\nu^2 \\ &= 2\,(3\ \text{kg})\,(0{,}1\ \text{m})^2\,\pi^2\,(2{,}4\ \text{s}^{-1})^2 = 3{,}41\ \text{J}\,. \end{aligned}$$

L14.14 Für die Gesamtenergie gilt $E = \frac{1}{2}\,m\,v_{\max}^2$ und für die maximale Geschwindigkeit $v_{\max} = A\,\omega$. Damit ergibt sich $E = \frac{1}{2}\,m\,(A\,\omega)^2 = \frac{1}{2}\,mA^2\,\omega^2$.
Die maximale Beschleunigung ist gegeben durch $a_{\max} = A\,\omega^2$. Daraus folgt $\omega^2 = a_{\max}/A$. Dies setzen wir ein und erhalten

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}\,m\,A^2\,\frac{a_{\max}}{A} = \tfrac{1}{2}\,m\,A\,a_{\max} \\ &= \tfrac{1}{2}\,(3\ \text{kg})\,(0{,}08\ \text{m})\,(3{,}50\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}) = 0{,}420\ \text{J}\,. \end{aligned}$$

L14.15 Die Frequenz der Schwingung ist bei einer Gesamtmasse m_{ges} gegeben durch

$$\nu = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{k_{\text{F}}}{m_{\text{ges}}}}\,.$$

Mit der Masse m der Person, der Rückstellkraft F und der Auslenkung Δy gilt für die Federkonstante $k_{\text{F}} = F/\Delta y = m\,g/\Delta y$. Dies setzen wir in den Ausdruck für die Frequenz ein und erhalten

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{m\,g}{m_{\text{ges}}\,\Delta y}} \\ &= \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{(85\ \text{kg})\,(9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2})}{(2485\ \text{kg})\,(2{,}35\cdot 10^{-2}\ \text{m})}} = 0{,}60\ \text{Hz}\,. \end{aligned}$$

L14.16 a) Das Quadrat der Kreisfrequenz ist der Quotient aus der Federkonstanten und der Masse: $\omega^2 = k_{\text{F}}/m$. Außerdem gilt $\omega = 2\,\pi\,\nu$. Dies setzen wir in die vorige Gleichung ein, die wir zuvor nach der Masse auflösen:

$$m = \frac{k_{\text{F}}}{\omega^2} = \frac{k_{\text{F}}}{4\,\pi^2\,\nu^2} = \frac{1800\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}}{4\,\pi^2\,(5{,}5\ \text{s}^{-1})^2} = 1{,}51\ \text{kg}\,.$$

b) Wenn sich der Körper an der Feder im Gleichgewicht befindet, gilt $k_{\text{F}}\,\Delta y - m\,g = 0$. Daraus ergibt sich für die Auslenkung der Feder aus ihrer natürlichen Länge

$$\Delta y = \frac{m\,g}{k_{\text{F}}} = \frac{(1{,}51\ \text{kg})\,(9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2})}{1800\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}} = 8{,}23\ \text{mm}\,.$$

c) Die zeitliche Abhängigkeit der Position des Körpers ist gegeben durch $y(t) = A\cos(\omega t + \delta)$. Die Anfangsbedingungen lauten $y_0 = -2{,}5$ cm und $v_0 = 0$. Damit ergibt sich für die Phasenkonstante

$$\delta = \operatorname{atan}\left(-\frac{v_0}{\omega\,y_0}\right) = \operatorname{atan} 0 = \pi$$

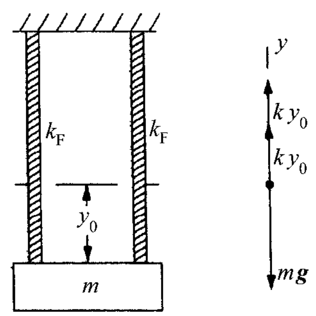
und für die Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{F}}}{m}} = \sqrt{\frac{1800\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}}{1{,}51\ \text{kg}}} = 34{,}5\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned} y(t) &= (2{,}5\ \text{cm})\cos(34{,}5\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\,t + \pi) \\ &= -(2{,}5\ \text{cm})\cos(34{,}5\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\,t)\,, \\ v(t) &= (86{,}4\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1})\sin(34{,}5\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\,t)\,, \\ a(t) &= (29{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2})\cos(34{,}5\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\,t)\,. \end{aligned}$$

L14.17 Die Abbildung zeigt die Gegebenheiten, wenn sich der Handkoffer mit der Masse m an den Kordeln im Gleichgewicht befindet.



Seine Gewichtskraft wird durch die Kräfte beider Kordeln ausgeglichen: $2\,k_{\text{F}}\,y_0 - m\,g = 0$. Darin ist k_{F} die Kraftkonstante einer Kordel. Für diese gilt also

$$k_{\text{F}} = \frac{m\,g}{2\,y_0}\,.$$

Die Schwingungsfrequenz des gesamten Systems ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{2\,k_{\text{F}}}{m}} = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{m\,g}{y_0\,m}} = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{g}{y_0}} \\ &= \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{0{,}05\ \text{m}}} = 2{,}23\ \text{Hz}\,. \end{aligned}$$

L14.18 a) Die maximale Höhe, die das Objekt erreicht, entspricht der Summe aus der Gleichgewichtslänge der Feder und der Schwingungsamplitude: $h = A + 5{,}0$ cm. Mit der Kreisfrequenz ω gilt für die maximale Geschwindigkeit des Objekts $v_{\max} = A\,\omega$. Daraus folgt für die Amplitude

$$A = v_{\max}\sqrt{\frac{m}{k_{\text{F}}}}\,.$$

Die Federkonstante können wir aus der Auslenkung im Gleichgewicht und der Gewichtskraft berechnen:

$$k_{\text{F}} = \frac{m\,g}{\Delta y} = \frac{(2{,}0\ \text{kg})\,(9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2})}{0{,}03\ \text{m}} = 654\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}.$$

Einsetzen in die vorige Gleichung liefert

$$A=(0{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})\sqrt{\frac{2{,}0\ \mathrm{kg}}{654\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}}}=1{,}66\ \mathrm{cm}\,.$$

Damit ergibt sich die maximale Höhe zu

$h=1{,}66\ \mathrm{cm}+5{,}0\ \mathrm{cm}=6{,}66\ \mathrm{cm}\,.$

b) Das Objekt wird zu Beginn aus der Gleichgewichtslage nach unten beschleunigt; daher erreicht es die maximale Höhe nach drei Vierteln der Schwingungsdauer: $t_{3/4}=\frac{3}{4}T$. Die Schwingungsdauer ist also

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_\mathrm{F}}}=2\pi\sqrt{\frac{2{,}0\ \mathrm{kg}}{654\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}}}=0{,}347\ \mathrm{s}\,,$$

und wir erhalten $t_{3/4}=\frac{3}{4}(0{,}347\ \mathrm{s})=0{,}261\ \mathrm{s}\,.$

c) Die in Teilaufgabe a berechnete maximale Höhe ist kleiner als 8 cm; also ist die Feder zu keinem Zeitpunkt unkomprimiert.

Die kinetische Energie, die das Objekt haben muss, damit die Feder wieder unkomprimiert wird, ist betragsmäßig ebenso groß wie die potenzielle Energie, die das Objekt am oberen Umkehrpunkt erreicht. Mit der dazu nötigen Anfangsgeschwindigkeit v_A gilt also $\frac{1}{2}m v_\mathrm{A}^2=m g\Delta y$. Damit ergibt sich

$v_\mathrm{A}=\sqrt{2g\Delta y}=\sqrt{2\,(9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\,(3\ \mathrm{cm})}=0{,}767\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$

L14.19 a) Die Gesamtenergie des Systems ist $E=\frac{1}{2}k_\mathrm{F}A^2$. Im Gleichgewicht gleicht die Federkraft die Gewichtskraft aus, und es gilt $k_\mathrm{F}\Delta y-mg=0$ und daher $k_\mathrm{F}=mg/\Delta y$.

Daraus folgt für die Gesamtenergie

$$\begin{aligned}E&=\tfrac{1}{2}k_\mathrm{F}A^2=\frac{mgA^2}{2\,\Delta y}\\&=\frac{(1{,}5\ \mathrm{kg})\,(9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\,(0{,}022\ \mathrm{m})^2}{2\,(0{,}028\ \mathrm{m})}=0{,}127\ \mathrm{J}\,.\end{aligned}$$

b) Wir setzen die potenzielle Energie des Gegenstands in der Gleichgewichtslage der Feder gleich null. Dann ist seine potenzielle Energie am untersten Punkt

$$\begin{aligned}E_\mathrm{pot,G,u}&=-mgA=-(1{,}5\ \mathrm{kg})\,(9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\,(0{,}022\ \mathrm{m})\\&=-0{,}324\ \mathrm{J}\,.\end{aligned}$$

c) Die potenzielle Energie der Feder ist am untersten Punkt

$$\begin{aligned}E_\mathrm{pot,F,u}&=-\tfrac{1}{2}k_\mathrm{F}A^2=-\tfrac{1}{2}\,(526\ \mathrm{N\cdot s^{-1}})\,(0{,}022\ \mathrm{m})^2\\&=-0{,}451\ \mathrm{J}\,.\end{aligned}$$

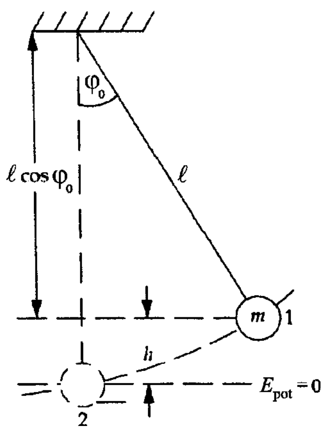
d) Die maximale kinetische Energie hat der Gegenstand, wenn er die Gleichgewichtslage passiert:

$E_\mathrm{kin,max}=\frac{1}{2}k_\mathrm{F}A^2=\frac{1}{2}\,(526\ \mathrm{N\cdot s^{-1}})\,(0{,}022\ \mathrm{m})^2=0{,}127\ \mathrm{J}\,.$

L14.20 Für die Schwingungsdauer gilt $T=2\pi\sqrt{\ell/g}$. Damit erhalten wir

$$\ell=\frac{T^2 g}{4\pi^2}=\frac{(5\ \mathrm{s})^2\,(9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})}{4\pi^2}=6{,}21\ \mathrm{m}\,.$$

L14.21 Die maximale Winkelauslenkung ist θ_0, und wir setzen die potenzielle Energie am tiefsten Punkt gleich null.



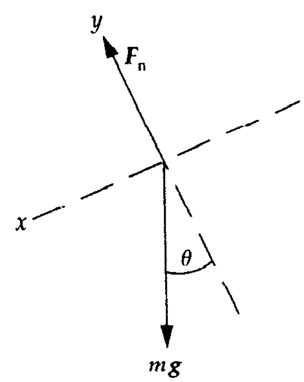
Bei maximaler Auslenkung (also am Umkehrpunkt) liegt die maximale potenzielle Energie vor. Für diese gilt

$E=E_\mathrm{pot,max}=mgh=mg\ell\,(1-\cos\varphi_0)\,.$

Für $\varphi\ll 1$ gilt $\cos\varphi\approx 1-\frac{1}{2}\varphi^2$, und wir erhalten

$E\approx mg\ell\left[1-(1-\frac{1}{2}\varphi_0^2)\right]=\frac{1}{2}mg\ell\varphi_0^2.$

L14.22 In der Abbildung sind die Normalkraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ und die Gewichtskraft $m\boldsymbol{g}$ eingezeichnet.



Weil der Wagen beschleunigt abwärts fährt, ist die Schwingungsdauer durch $T=2\pi\sqrt{\ell/g_\mathrm{eff}}$ gegeben, wobei g_eff um die Beschleunigung a des Wagens kleiner ist als die Erdbeschleunigung g. Es gilt also $g_\mathrm{eff}=g-a$. Auf den Wagen wirken keine resultierenden Kräfte, so dass gilt $mg\sin\theta=ma$ und daher $a=g\sin\theta$.

Damit erhalten wir

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g-a}}=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g-g\sin\theta}}=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g\,(1-\sin\theta)}}\,.$$

L14.23 Mit der Masse m des Pendelkörpers und seinem Trägheitsmoment I bezüglich der Rotationsachse ist die Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels gegeben durch

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\,.$$

Darin ist d der Abstand vom Drehpunkt. Das Trägheitsmoment einer Scheibe mit dem Radius r bezüglich ihrer Achse durch den Massenmittelpunkt ist $I_S = \frac{1}{2}\, m r^2$. Dann gilt gemäß dem Steiner'schen Satz für ihr Trägheitsmoment bezüglich einer dazu parallelen Achse an ihrem Rand

$I = I_S + m r^2 = \frac{1}{2}\, m r^2 + m r^2 = \frac{3}{2}\, m r^2$.

Das setzen wir ein und erhalten

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\, m r^2}{m g r}} = 2\pi \sqrt{\frac{3r}{2g}} = 2\pi \sqrt{\frac{3\,(0{,}2\ \mathrm{m})}{2\,(9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}})}} = 1{,}10\ \mathrm{s}.$$

L14.24 a) Mit der Masse m des Pendelkörpers und seinem Trägheitsmoment I bezüglich der Rotationsachse ist die Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels gegeben durch

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m g d}}\,.$$

Darin ist d der Abstand vom Drehpunkt. Das Trägheitsmoment einer symmetrischen Hantel bezüglich einer Achse, die durch ihren Massenmittelpunkt verläuft und senkrecht auf der Verbindungslinie (mit der Länge ℓ) der beiden Massen m steht, ist

$$I_S = m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\, m \ell^2.$$

Gemäß dem Steiner'schen Satz ist das Trägheitsmoment der Hantel bezüglich einer Achse im Abstand x vom Massenmittelpunkt $I = I_S + 2 m x^2 = \frac{1}{2}\, m \ell^2 + 2 m x^2$. Das setzen wir in die erste Gleichung ein und erhalten für die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\, m \ell^2 + 2 m x^2}{2 m g x}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\frac{1}{4}\, \ell^2 + x^2}{x}}\,.$$

Wir leiten nun nach x ab:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\frac{1}{4}\, \ell^2 + x^2}{x}} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\, \frac{2x^2 - (\frac{1}{4}\, \ell^2 + x^2)}{x^2 \sqrt{(\frac{1}{4}\, \ell^2 + x^2)/x}}\,.$$

Bei einem Extremwert muss dies null sein. Wir vergewissern uns, dass der Nenner des Bruchs nicht null sein kann, und setzen dann seinen Zähler gleich null: $2x^2 - (\frac{1}{4}\, \ell^2 + x^2) = 0$. Daraus ergibt sich $x = \frac{1}{2}\, \ell$. Weil x der Abstand vom Massenmittelpunkt ist, bedeutet dies, dass der Drehpunkt in einer der Massen liegt.

Anmerkung: Wir haben allerdings nur gezeigt, dass hier ein Extremwert vorliegt. Dass er wirklich einem Minimum entspricht, kann man mit Hilfe der zweiten Ableitung $\mathrm{d}^2 T/\mathrm{d}x^2$ zeigen, die bei $x = \ell/2$ positiv sein muss; alternativ kann auch der Graph der Funktion an dieser Stelle beurteilt werden.

b) Wir setzen $x = \ell/4$ in die obige Gleichung für die Schwingungsdauer ein:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{4}\, \ell^2 + x^2}{g x}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{4}\, \ell^2 + (\frac{1}{4}\, \ell)^2}{g\, (\frac{1}{4}\, \ell)}} = \pi \sqrt{\frac{5\ell}{g}} = \pi \sqrt{\frac{5\,(2\ \mathrm{m})}{9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}}} = 3{,}17\ \mathrm{s}.$$

L14.25 Mit der Masse m des Pendelkörpers und seinem Trägheitsmoment I bezüglich der Rotationsachse ist die Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels gegeben durch

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m g d}}\,.$$

Darin ist d der Abstand vom Drehpunkt. Das Trägheitsmoment der symmetrischen Hantel bezüglich einer Achse, die durch ihren Massenmittelpunkt verläuft und senkrecht auf dem Verbindungsstab (mit der Länge ℓ und der Masse $2m$) steht, ist

$$I_S = m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\,(2m)\, \ell^2 = \frac{2}{3}\, m \ell^2.$$

Gemäß dem Steiner'schen Satz ist das Trägheitsmoment dieser Hantel bezüglich einer Achse im Abstand x vom Massenmittelpunkt $I = I_S + 4 m x^2 = \frac{2}{3}\, m \ell^2 + 4 m x^2$. Das setzen wir ein und erhalten für die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{3}\, m \ell^2 + 4 m x^2}{4 m g x}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\frac{2}{3}\, \ell^2 + 4 x^2}{x}}\,.$$

Wir leiten nun nach x ab:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\frac{2}{3}\, \ell^2 + 4 x^2}{x}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\, \frac{8x^2 - (\frac{2}{3}\, \ell^2 + 4x^2)}{2x^2 \sqrt{(\frac{2}{3}\, \ell^2 + 4x^2)/x}}\,.$$

Bei einem Extremwert muss dies null sein. Wir vergewissern uns, dass der Nenner des Bruchs nicht null sein kann, und setzen dann seinen Zähler gleich null: $8x^2 - (\frac{2}{3}\, \ell^2 + 4x^2) = 0$. Daraus ergibt sich $x = \ell/\sqrt{6}$. Der Abstand x ist der vom Massenmittelpunkt. Daher ist der Abstand von einer der Massen

$d = \ell/2 - \ell/\sqrt{6} = 0{,}0918\, \ell$.

Anmerkung: Wir haben allerdings nur gezeigt, dass hier ein Extremwert vorliegt. Dass er wirklich einem Minimum entspricht, kann man mit Hilfe der zweiten Ableitung $\mathrm{d}^2 T/\mathrm{d}x^2$ zeigen, die bei $x = \ell/\sqrt{6}$ positiv sein muss; alternativ kann auch der Graph der Funktion an dieser Stelle beurteilt werden.

L14.26 Mit der Masse m des Pendelkörpers und seinem Trägheitsmoment I bezüglich der Rotationsachse ist die Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels gegeben durch

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m g d}}\,.$$

Darin ist d der Abstand vom Drehpunkt. Nach dem Steiner'schen Satz ist das Trägheitsmoment des vorliegenden Objekts bezüglich dem Punkt P_1 (mit dem Abstand h_1 vom Massenmittelpunkt) $I = I_S + m h_1^2$. (Hierin ist I_S das Trägheitsmoment bezüglich des Massenmittelpunkts.) Das setzen wir ein und erhalten für die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_S + m h_1^2}{m g h_1}}\,.$$

Quadrieren und Umstellen ergibt

$$\frac{m g T^2}{4\pi^2} = \frac{I_S}{h_1} + m h_1\,. \qquad (1)$$

Die Schwingungsdauer soll bezüglich beider Punkte die gleiche sein. Dann muss gelten

$$\frac{I_S}{h_1}+m h_1=\frac{I_S}{h_2}+m h_2\,.$$

Daraus folgt $I_S = m h_1 h_2$. Das setzen wir in Gleichung 1 ein und erhalten

$$\frac{m g T^2}{4\pi^2}=\frac{m h_1 h_2}{h_1}+m h_1 \qquad \text{sowie} \qquad h_1+h_2=\frac{g T^2}{4\pi^2}\,.$$

L14.27 a) Mit der Masse m des Pendelkörpers und seinem Trägheitsmoment I bezüglich der Rotationsachse ist die Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels gegeben durch

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{m g \ell}}\,.$$

Darin ist ℓ der Abstand vom Drehpunkt. Nach dem Steiner'schen Satz ist das Trägheitsmoment des vorliegenden Pendels bezüglich seinem Aufhängungspunkt
$I = I_S + m\ell^2 = \frac{2}{5} m r_K^2 + m\ell^2$.
(Hierin ist I_S das Trägheitsmoment bezüglich des Massenmittelpunkts.) Das setzen wir ein und erhalten für die Schwingungsdauer

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5} m r_K^2 + m\ell^2}{m g \ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5} r_K^2+\ell^2}{g\ell}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}\left(1+\frac{2 r_K^2}{5\ell^2}\right)} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\sqrt{1+\frac{2 r_K^2}{5\ell^2}} \\ &= T_0\sqrt{1+\frac{2 r_K^2}{5\ell^2}}\,. \end{aligned}$$

Dabei ist $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.
b) Wir entwickeln die Wurzel in eine binomische Reihe und berücksichtigen wegen $r_K \ll \ell$ nur den ersten Summanden:

$$\left(1+\frac{2 r_K^2}{5\ell^2}\right)^{1/2}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{2 r_K^2}{5\ell^2}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{2 r_K^2}{5\ell^2}\right)^2+\cdots\approx 1+\frac{r_K^2}{5\ell^2}\,.$$

Dies setzen wir in unser Ergebnis der Teilaufgabe a ein:

$$T\approx T_0\left(1+\frac{r_K^2}{5\ell^2}\right).$$

c) Wird $T \approx T_0$ gesetzt, dann ist der relative Fehler

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{T} &\approx \frac{T-T_0}{T_0}=\frac{T}{T_0}-1=1+\frac{r_K^2}{5\ell^2}-1=\frac{r_K^2}{5\ell^2} \\ &\approx \frac{(2\text{ cm})^2}{5\,(100\text{ cm})^2}=0{,}00008\,. \end{aligned}$$

Dies sind 0,008 %. Soll der Fehler 1 % betragen, muss gelten

$$0{,}01=\frac{\Delta T}{T}\approx\frac{r_K^2}{5\ell^2}\,,$$

und der Radius ergibt sich damit zu

$$r\approx\ell\sqrt{0{,}05}=(100\text{ cm})\sqrt{0{,}05}=22{,}4\text{ cm}\,.$$

L14.28 a) Die Schwingungsdauer ist

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_F}}=2\pi\sqrt{\frac{2\text{ kg}}{400\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}}}=0{,}444\text{ s}\,.$$

b) Die gesamte Anfangsenergie ist proportional zum Quadrat der Amplitude, und wir erhalten
$E_0=\frac{1}{2}k_F A^2=\frac{1}{2}(400\text{ N}\cdot\text{m}^{-1})(0{,}03\text{ m})^2=0{,}180\text{ J}$.
c) Bei einer relativen Abnahme der Energie um 0,01 % pro Periode muss gelten

$$\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{Per.}}=0{,}01\,,$$

und der Q-Faktor ist

$$Q=\frac{2\pi}{(|\Delta E|/E)_{\text{Per.}}}=\frac{2\pi}{0{,}01}=628\,.$$

Aus $Q=\omega_0 m/b$ erhalten wir für die Dämpfungskonstante

$$b=\frac{\omega_0 m}{Q}=\frac{2\pi m}{T Q}=\frac{2\pi\,(2\text{ kg})}{(0{,}444\text{ s})\,(628)}=0{,}0451\text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}.$$

L14.29 a) Die relative Energieabnahme in einer Periode ist

$$\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{Per.}}=\frac{2\pi}{Q}=\frac{2\pi}{20}=0{,}314\,.$$

b) Mit $Q=\omega_0 m/b$ ergibt sich aus der gegebenen Gleichung für die Abhängigkeit der Kreisfrequenz vom Q-Faktor:

$$\omega'=\omega_0\sqrt{1-\frac{b^2}{4m^2\omega_0^2}}=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\,.$$

Mit der für kleine x gültigen Näherung $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$ ergibt sich mit $x=-1/(4Q^2)$ daraus

$$\omega'\approx\omega_0\left(1-\frac{1}{8Q^2}\right).$$

Damit erhalten wir für die relative Differenz der Kreisfrequenzen

$$\begin{aligned} \frac{\omega'-\omega_0}{\omega_0} &\approx \frac{\omega_0\left(1-\frac{1}{8Q^2}\right)-\omega_0}{\omega_0}=-\frac{1}{8Q^2} \\ &= -\frac{1}{8\,(20)^2}=-3{,}1\cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Das entspricht $-3{,}1\cdot 10^{-2}$ Prozent.

L14.30 a) Die relative Energieabnahme in einer Periode ist

$$\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{Per.}}=\frac{2\pi}{Q}=\frac{2\pi}{400}=0{,}0157=1{,}57\,\%\,.$$

b) Nach einer Periode ist die Energie abgesunken auf

$$E_1=E_0\left[1-\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{Per.}}\right],$$

nach zwei Perioden auf

$$E_2=E_1\left[1-\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{Per.}}\right]=E_0\left[1-\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{Per.}}\right]^2$$

und allgemein nach n Perioden auf

$$E_n = E_0 \left[1 - \left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{Per.}}\right]^n$$
$$= E_0\,(1 - 0{,}0157)^n = E_0\,(0{,}9843)^n.$$

c) Wir berechnen zunächst, wie viele Schwingungsperioden mit jeweils 54 min in zwei Tagen (2 d) ablaufen. Zwei Tage haben $2 \cdot 24 \cdot 60$ min = 2880 min. Damit ergibt sich die Anzahl der Schwingungsperioden zu

$$n = \frac{2880 \text{ min}}{54 \text{ min}} = 53{,}3\,.$$

Also ist die Schwingungsenergie nach zwei Tagen abgesunken auf $E_{2\,\text{d}} = E_{53,3} = E_0\,(0{,}9843)^{53,3} = 0{,}430\,E_0$.

L14.31 a) Nach einer Periode ist die Energie abgesunken auf

$$E_1 = E_0 \left[1 - \left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{Per.}}\right],$$

nach zwei Perioden auf

$$E_2 = E_1 \left[1 - \left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{Per.}}\right] = E_0 \left[1 - \left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{Per.}}\right]^2$$

und allgemein nach n Perioden auf

$$E_n = E_0 \left[1 - \left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{Per.}}\right]^n.$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt

$0{,}5\,E_0 = E_0\,(1 - 0{,}035)^n$ bzw. $0{,}5 = (0{,}965)^n$.

Damit erhalten wir für die Anzahl der Perioden

$$n = \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}965} = 19{,}5\,.$$

Es laufen also knapp 20 Schwingungsperioden ab.

b) Der Q-Faktor ist

$$Q = \frac{2\,\pi}{|\Delta E|/E} = \frac{2\,\pi}{0{,}035} = 180\,.$$

c) Die Resonanzbreite errechnet sich zu

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2\,\pi\,\nu_0}{Q} = \frac{2\,\pi\,(100 \text{ Hz})}{180} = 3{,}49 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

L14.32 Das gesamte System besteht aus dem schwingenden Feder-Masse-System sowie der zweiten, separaten Masse m. Es wirken keine äußeren Kräfte ein, so dass beim elastischen Stoß der Impuls der beiden Massen und auch ihre kinetische Energie erhalten bleiben. Wir verwenden den Index 1 für die an der Feder schwingende Masse und den Index 2 für die separate Masse.

a) Die Masse 1 soll am Ende ruhen. Dann muss wegen der Impulserhaltung für die Anfangs- und die Endgeschwindigkeiten (mit den Indices A bzw. E) gelten:

$m\,v_{1,\text{A}} + m\,v_{2,\text{A}} = m\,v_{1,\text{E}} + m\,v_{2,\text{E}}\,,$

also

$$v_{1,\text{A}} + v_{2,\text{A}} = 0 + v_{2,\text{E}}\,. \qquad (1)$$

Wegen der Energieerhaltung gilt entsprechend

$\frac{1}{2}\,m\,v_{1,\text{A}}^2 + \frac{1}{2}\,m\,v_{2,\text{A}}^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_{1,\text{E}}^2 + \frac{1}{2}\,m\,v_{2,\text{E}}^2\,,$

also $v_{1,\text{A}}^2 + v_{2,\text{A}}^2 = 0 + v_{2,\text{E}}^2\,.$

Dies formen wir um:

$v_{2,\text{A}}^2 = v_{2,\text{E}}^2 - v_{1,\text{A}}^2 = (v_{2,\text{E}} + v_{1,\text{A}})\,(v_{2,\text{E}} - v_{1,\text{A}})\,.$

Einsetzen des Ausdrucks für $v_{2,\text{E}}$ gemäß Gleichung 1 liefert

$$v_{2,\text{A}}^2 = (v_{1,\text{A}} + v_{2,\text{A}} + v_{1,\text{A}})\,(v_{1,\text{A}} + v_{2,\text{A}} - v_{1,\text{A}})$$
$$= (2\,v_{1,\text{A}} + v_{2,\text{A}})\,v_{2,\text{A}} = 2\,v_{1,\text{A}}\,v_{2,\text{A}} + v_{2,\text{A}}^2.$$

Daraus ergibt sich $2\,v_{1,\text{A}}\,v_{2,\text{A}} = 0$.

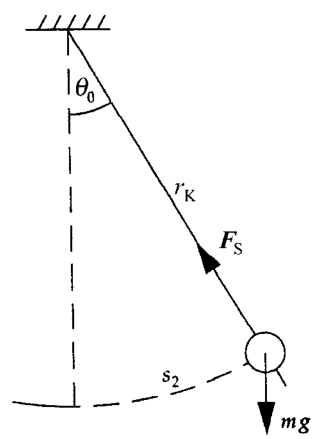
Weil $v_{1,\text{A}} \neq 0$ ist, folgt hieraus $v_{2,\text{A}} = 0$. Das bedeutet, dass die zweite, separate Masse zu Beginn ruhen muss.

b) Wegen $v_{2,\text{A}} = 0$ folgt aus Gleichung 1 gemäß der Impulserhaltung $v_{2,\text{E}} = v_{1,\text{A}}$.

Die an der Feder befestigte Masse 1 bewegte sich anfangs durch die Gleichgewichtslage; also war ihre Geschwindigkeit maximal, und wir erhalten

$v_{1,\text{A}} = v_{\text{max}} = A\,\omega = (0{,}1 \text{ m})\,(40 \text{ s}^{-1}) = 4{,}00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$

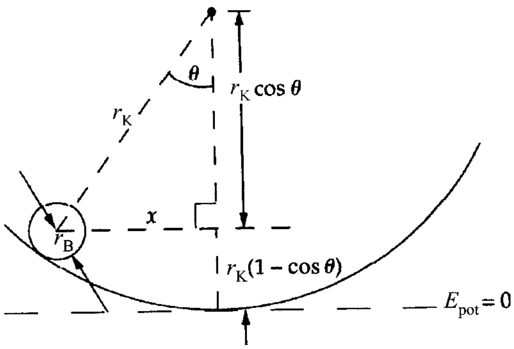
L14.33 Die Abbildung zeigt die Gegebenheiten bei einem Pendel, dessen Schnur die Länge r_K hat. Weil keine Reibung vorliegt, wirken auf das Teilchen mit der Masse m nur die Gewichtskraft $m\boldsymbol{g}$ und die Zugkraft $\boldsymbol{F}_\text{S}$.



a) Die Normalkraft, die auf das Teilchen in der Kugelschale einwirkt, entspricht – weil keine Reibung vorliegt – in Richtung und Betrag der Zugkraft der Schnur beim Pendel (siehe Abbildung). Die bei kleinen Auslenkungen (θ_0 beim Pendel bzw. s_2 in der Kugelschale) betragsmäßig zur Auslenkung proportionale Rückstellkraft rührt von der entsprechenden Komponente der Gewichtskraft her.

b) Weil s_1 und auch s_2 viel kleiner als r_K sind, können wir die beiden Massen als Pendelkörper ansehen, die an gleich langen Schnüren hängen. Sie treffen sich am tiefsten Punkt, denn sie haben dieselbe Schwingungsdauer.

L14.34 Die Abbildung zeigt die Gegebenheiten, während der Ball aus der Ruhelage um die horizontale Strecke x ausgelenkt ist.



a) Die Gesamtenergie des Balls setzt sich aus seiner potenziellen Energie sowie seinen kinetischen Energien der Translation und der Rotation zusammen:

$E = E_{pot} + E_{kin} = E_{pot} + E_{Trans} + E_{Rot}$.

Die potenzielle Energie E_{pot} der Gravitation setzen wir am tiefsten Punkt gleich null. Für $r_B \ll r_K$ gilt dann für die potenzielle Energie in Abhängigkeit von x:

$E_{pot}(x) = m\,g\,r_K\,(1-\cos\theta)$.

Wir entwickeln die Kosinusfunktion in eine Reihe und brechen wegen $\theta \ll 1$ nach dem zweiten Glied ab:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + - \cdots \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!}.$$

Damit ergibt sich

$$E_{pot}(x) \approx m\,g\,r_K \left[1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2!}\right)\right] = \tfrac{1}{2}\,m\,g\,r_K\,\theta^2.$$

Wegen $r_B \ll r_K$ ist $\theta \approx x/r_K$, und wir erhalten

$$E_{pot}(x) \approx \frac{m\,g\,x^2}{2\,r_K}.$$

Das Trägheitsmoment des massiven Balls ist $I = \frac{2}{5}\,m\,r_B^2$. Weil er rollt, ohne zu gleiten, ist seine Geschwindigkeit gegeben durch $v = r_B\,\omega$. Dies setzen wir in die erste Gleichung ein und erhalten, wobei wir uns der eben angesetzten Näherungen bewusst sind, für die gesamte Energie

$$\begin{aligned} E &= E_{pot} + E_{Trans} + E_{Rot} = \frac{m\,g\,x^2}{2\,r_K} + \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,I\,\omega^2 \\ &= \frac{m\,g\,x^2}{2\,r_K} + \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\,m\,r_B^2\right)\left(\frac{v}{r_B}\right)^2 \\ &= \frac{m\,g\,x^2}{2\,r_K} + \frac{7}{10}\,m\,v^2. \end{aligned}$$

b) Weil keine Reibung vorliegt, bleibt die Energie erhalten:

$$E = \frac{m\,g\,x^2}{2\,r_K} + \frac{7}{10}\,m\,v^2 = \text{konstant}.$$

Wir dürfen wegen der geringen Auslenkung eine harmonische Bewegung annehmen:

$x = x_0\,\cos(\omega t + \delta)$.

Ableiten nach der Zeit liefert die Geschwindigkeit:

$v = -\omega\,x_0\,\sin(\omega t + \delta)$.

Diese beiden Ausdrücke für x und für v setzen wir in die Gleichung für die Energie ein:

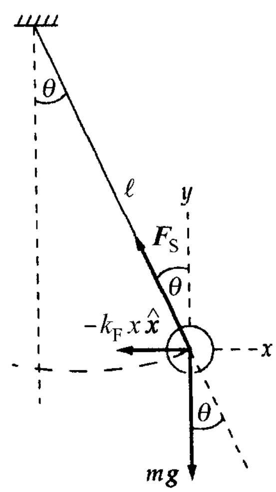
$$\begin{aligned} E &= \frac{m\,g}{2\,r_K}\,[x_0\,\cos(\omega t + \delta)]^2 + \frac{7}{10}\,m\,[-\omega\,x_0\,\sin(\omega t + \delta)]^2 \\ &= \frac{m\,g\,x_0^2}{2\,r_K}\,\cos^2(\omega t + \delta) + \frac{7\,m\,\omega^2\,x_0^2}{10}\,\sin^2(\omega t + \delta). \end{aligned}$$

Weil die Gesamtenergie konstant ist, muss gelten

$$\frac{m\,g\,x_0^2}{2\,r_K} = \frac{7\,m\,\omega^2\,x_0^2}{10}, \quad \text{also} \quad \frac{g}{r_K} = \frac{7\,\omega^2}{5}.$$

Daraus ergibt sich für die Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\dfrac{5\,g}{7\,r_K}}$.

L14.35 Die Abbildung zeigt die Gegebenheiten bei einer Auslenkung um den Winkel θ.



a) Die Schwingungsdauer ist $T = 2\,\pi/\omega$. Auf den Pendelkörper wirkt in x-Richtung die resultierende Kraft

$$\sum F_x = -k_F\,x - F_S\,\sin\theta = m\,a_x$$

und in y-Richtung die resultierende Kraft

$$\sum F_y = F_S\,\cos\theta - m\,g = 0.$$

Wir eliminieren F_S aus beiden Gleichungen:

$-k_F\,x - m\,g\,\tan\theta = m\,a_x$.

Nun ersetzen wir die Variable x durch θ, wobei wir berücksichtigen, dass bei kleinen Winkeln $x \approx \ell\,\theta$ und mit der Winkelbeschleunigung α außerdem $a_x = \ell\,\alpha = \ell\,\mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t^2$ ist. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} m\,\ell\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= -k_F\,\ell\,\theta - m\,g\,\tan\theta \approx -k_F\,\ell\,\theta - m\,g\,\theta \\ &\approx -(k_F\,\ell + m\,g)\,\theta. \end{aligned}$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \approx -\left(\frac{k_F}{m} + \frac{g}{\ell}\right)\theta = -\omega^2\,\theta.$$

Darin ist $\omega = \sqrt{\dfrac{k_F}{m} + \dfrac{g}{\ell}}$.

Diese Näherung setzen wir in die Gleichung für die Schwingungsdauer ein und erhalten

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k_F}{m} + \frac{g}{\ell}}}.$$

b) Für $m = 1$ kg und $T = 2$ s gilt für die Schwingungsdauer ohne Feder

$$2\text{ s} \approx \frac{2\pi}{\sqrt{g/\ell}},$$

und für $T = 1$ s soll mit der Feder gelten:

$$1\text{ s} \approx \frac{2\pi}{\sqrt{k_F + g/\ell}}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich die Federkonstante zu $k_F \approx 29{,}6\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$.

L14.36 a) Die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels der Länge ℓ ist $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$. Diese leiten wir nach der Gravitationsbeschleunigung ab:

$$\frac{dT}{dg} = \frac{d}{dg}\left(2\pi\sqrt{\ell}\,g^{-1/2}\right) = -\pi\sqrt{\ell}\,g^{-3/2} = -\frac{T}{2g}.$$

Wir separieren die Variablen: $\frac{dT}{T} = -\frac{1}{2}\frac{dg}{g}$.

Bei kleinen Änderungen $\Delta g \ll g$ der Gravitationskonstanten können wir dies mit den Differenzen annähern:

$$\frac{\Delta T}{T} \approx -\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}.$$

b) Aus der in Teilaufgabe a erhaltenen Gleichung ergibt sich für die Änderung der Gravitationskonstanten: $\Delta g \approx -2g\,\Delta T/T$. Zunächst berechnen wir die relative Änderung der Zeitspanne:

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{-90\text{ s}}{1\text{ d}}\,\frac{1\text{ d}}{24\text{ h}}\,\frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}} = -1{,}04\cdot 10^{-3}.$$

Einsetzen in die vorige Beziehung ergibt

$$\begin{aligned}\Delta g &\approx -2g\frac{\Delta T}{T} = -2\,(9{,}81\text{ m}\cdot\text{s}^{-2})\,(-1{,}04\cdot 10^{-3})\\ &\approx 0{,}02\text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = 2\text{ cm}\cdot\text{s}^{-2}.\end{aligned}$$

L14.37 a) Kurz bevor der Kasten zu gleiten beginnt, gilt mit der maximalen Haftreibungskraft $F_{R,h,max}$ für die auf den Kasten einwirkenden Kräfte in x-Richtung

$$F_{R,h,max} = m\,a_{max}$$

und für die Kräfte in y-Richtung

$$F_n - m\,g = 0.$$

Wir nutzen die Beziehung $F_{R,h,max} = \mu_{R,h}\,F_n$, um aus diesen beiden Gleichungen $F_{R,h,max}$ und F_n zu eliminieren. Dies ergibt

$$\mu_{R,h}\,m\,g = m\,a_{max}, \quad \text{also} \quad \mu_{R,h} = \frac{a_{max}}{g}.$$

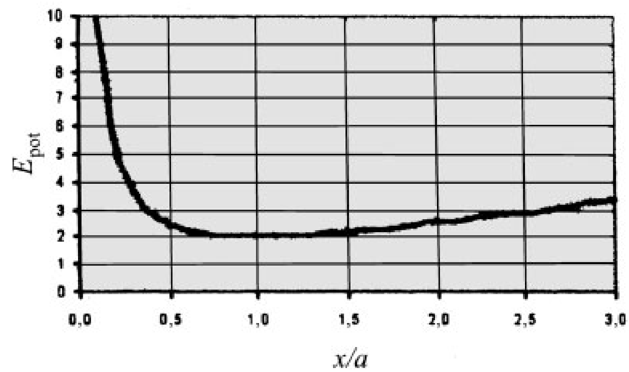
Die maximale Beschleunigung bei einer Schwingung ist gegeben durch $a_{max} = A\,\omega^2$. Dies sowie $\omega = 2\pi/T$ setzen wir ein und erhalten für den Haftreibungskoeffizienten

$$\mu_{R,h} = \frac{A\,\omega^2}{g} = \frac{4\pi^2 A^2}{g\,T^2} = \frac{4\pi^2\,(0{,}4\text{ m})}{(9{,}81\text{ m}\cdot\text{s}^{-2})\,(0{,}8\text{ s})^2} = 2{,}52.$$

b) Die maximale Schwingungsamplitude bei einem Haftreibungskoeffizienten von 0,4 erhalten wir durch Umformen der vorigen Gleichung und Einsetzen der Zahlenwerte:

$$\begin{aligned}A_{max} &= \frac{\mu_{R,h}\,g}{\omega^2} = \frac{\mu_{R,h}\,g\,T^2}{4\pi^2}\\ &= \frac{(0{,}4)\,(9{,}81\text{ m}\cdot\text{s}^{-2})\,(0{,}8\text{ s})^2}{4\pi^2} = 6{,}36\text{ cm}.\end{aligned}$$

L14.38 a) Die Abbildung zeigt (in willkürlichen Einheiten), wie die potenzielle Energie von $\xi = x/a$ abhängt.



b) Im Gleichgewicht muss gelten $F = dE_{pot}/dx = 0$. Wir leiten also den gegebenen Ausdruck

$$E_{pot} = E_{pot,0}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) = E_{pot,0}\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right)$$

nach x ab:

$$\begin{aligned}\frac{dE_{pot}}{dx} &= E_{pot,0}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) = E_{pot,0}\left(\frac{1}{a} - \frac{a}{x^2}\right)\\ &= \frac{E_{pot,0}}{a}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right).\end{aligned}$$

Diese Ableitung setzen wir an der Stelle x_0 gleich null:

$$\frac{E_{pot,0}}{a}\left(1 - \frac{a^2}{x_0^2}\right) = 0.$$

Dies ergibt $x_0 = a$ bzw. $\xi_0 = 1$.

c) Für die potenzielle Energie bei $x = x_0 + \varepsilon$ erhalten wir

$$\begin{aligned}E_{pot}(x_0 + \varepsilon) &= E_{pot,0}\left(\frac{x_0 + \varepsilon}{a} + \frac{a}{x_0 + \varepsilon}\right)\\ &= E_{pot,0}\left(\frac{x_0}{a} + \frac{\varepsilon}{a} + \frac{1}{x_0/a + \varepsilon/a}\right).\end{aligned}$$

Nun setzen wir $\beta = \varepsilon/a$ und berücksichtigen, dass $x_0 = a$ ist. Damit erhalten wir

$$E_{\text{pot}}(x_0+\varepsilon) = E_{\text{pot},0}\left(1+\frac{\varepsilon}{a}+\frac{1}{1+\varepsilon/a}\right) = E_{\text{pot},0}\left(1+\beta+(1+\beta)^{-1}\right).$$

d) Wir wenden die gegebene Reihenentwicklung auf $(1+\beta)^{-1}$ an und brechen nach dem dritten Glied ab:

$$(1+\beta)^{-1} = 1+(-1)\beta+\frac{(-1)(-2)}{2\cdot 1}\beta^2+\dots \approx 1-\beta+\beta^2.$$

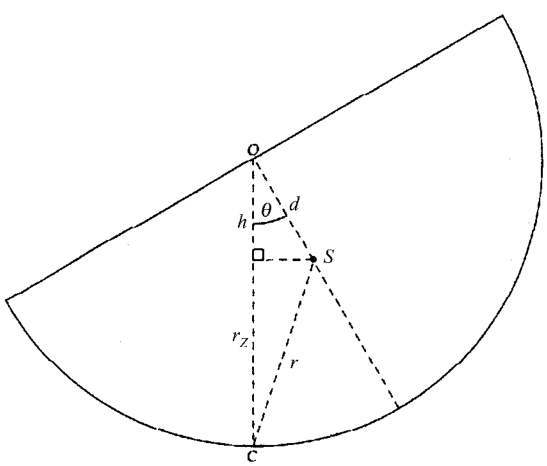
Das setzen wir in die vorige Gleichung ein:

$$E_{\text{pot}}(x_0+\varepsilon) \approx E_{\text{pot},0}\left(1+\beta+1-\beta+\beta^2\right) = E_{\text{pot},0}(2+\beta^2) = 2E_{\text{pot},0}+E_{\text{pot},0}\frac{\varepsilon^2}{a^2} = \text{const.}+E_{\text{pot},0}\frac{\varepsilon^2}{a^2}.$$

e) Die potenzielle Energie eines harmonischen Oszillators ist
$E_{\text{pot}} = \text{const.}+\frac{1}{2}k_{\text{F}}\varepsilon^2$.
Das vergleichen wir mit dem Ergebnis von der Teilaufgabe d und erhalten $k_{\text{F}} = 2E_{\text{pot},0}/a^2$.
Damit ergibt sich für die Frequenz des harmonischen Oszillators

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{\text{F}}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2E_{\text{pot},0}}{a^2 m}} = \frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{2E_{\text{pot},0}}{m}}.$$

L14.39 Die Abbildung zeigt den Halbzylinder, der um den Winkel θ aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt ist. Den Abstand des Massenmittelpunkts S von der Achse des (halbierten) Zylinders bezeichnen wir mit d und die jeweilige Höhe der Achse über dem Massenmittelpunkt mit h.



Mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ gilt für die Gesamtenergie des schwingenden Halbzylinders:

$$E = E_{\text{pot}}+E_{\text{kin}} = mg(h-d)+\frac{1}{2}I_{\text{C}}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

Darin ist I_{C} das Trägheitsmoment des Halbzylinders bezüglich des Kontaktpunkts (bzw. der Kontaktlinie) C mit der Unterlage. Dieses Trägheitsmoment müssen wir zunächst ermitteln. Ein vollständiger Zylinder mit der Masse $2m$ und dem Radius r hat bezüglich seiner Achse (die hier durch den Punkt O verläuft) das Trägheitsmoment
$I_{\text{VZ,O}} = \frac{1}{2}(2m)r_{\text{Z}}^2 = m r_{\text{Z}}^2$.
Damit ergibt sich das Trägheitsmoment des Halbzylinders mit der Masse m bezüglich derselben Achse zu $I_{\text{HZ,O}} = \frac{1}{2}m r_{\text{Z}}^2$.
Wir bezeichnen das Trägheitsmoment des Halbzylinders bezüglich seines Massenmittelpunkts mit $I_{\text{HZ,S}}$. Gemäß dem Steiner'schen Satz ist dann sein Trägheitsmoment bezüglich der Achse, die ja den Abstand d vom Massenmittelpunkt hat:
$I_{\text{HZ,O}} = I_{\text{HZ,S}}+md^2$.
Damit ergibt sich für das Trägheitsmoment des Halbzylinders bezüglich seines Massenmittelpunkts
$I_{\text{HZ,S}} = I_{\text{HZ,O}}-md^2 = \frac{1}{2}m r_{\text{Z}}^2-md^2$.
Wir wenden nun noch einmal den Steiner'schen Satz an, um das Trägheitsmoment des Halbzylinders bezüglich der Kontaktlinie C zu ermitteln, die vom Massenmittelpunkt den Abstand r hat:
$I_{\text{C}} = \frac{1}{2}m r_{\text{Z}}^2-md^2+mr^2 = m\left(\frac{1}{2}r_{\text{Z}}^2-d^2+r^2\right)$.
Aufgrund des Kosinussatzes gilt $r^2 = r_{\text{Z}}^2+d^2-2r_{\text{Z}}d\cos\theta$.
Somit erhalten wir für das gesuchte Trägheitsmoment

$$I_{\text{C}} = m\left(\frac{1}{2}r_{\text{Z}}^2-d^2+r_{\text{Z}}^2+d^2-2r_{\text{Z}}d\cos\theta\right) = m r_{\text{Z}}^2\left(\frac{3}{2}-2\frac{d}{r_{\text{Z}}}\cos\theta\right).$$

Dies und $h-d = d(1-\cos\theta)$ setzen wir nun in die obige Gleichung für die Energie ein:

$$E = mgd(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}m r_{\text{Z}}^2\left(\frac{3}{2}-2\frac{d}{r_{\text{Z}}}\cos\theta\right)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

Für kleine Winkel θ setzen wir $\cos\theta \approx 1-\frac{1}{2}\theta^2$ und erhalten damit näherungsweise

$$E = \frac{1}{2}mgd\,\theta^2+\frac{1}{2}m r_{\text{Z}}^2\left[\frac{3}{2}-\frac{d}{r_{\text{Z}}}(2-\theta^2)\right]\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

Wegen $\theta^2 \ll 2$ können wir $2-\theta^2 \approx 2$ setzen. Damit ergibt sich, wiederum näherungsweise:

$$E = \frac{1}{2}mgd\,\theta^2+\frac{1}{2}m r_{\text{Z}}^2\left(\frac{3}{2}-2\frac{d}{r_{\text{Z}}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

Weil die Gesamtenergie konstant ist, liefert die Ableitung beider Seiten nach der Zeit

$$0 = mgd\,\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+m r_{\text{Z}}^2\left(\frac{3}{2}-2\frac{d}{r_{\text{Z}}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

und damit

$$r_{\text{Z}}^2\left(\frac{3}{2}-2\frac{d}{r_{\text{Z}}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right)+gd\,\theta = 0$$

sowie

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g\,d}{r_Z^2\left(\frac{3}{2} - 2\,\frac{d}{r_Z}\right)}\,\theta = 0\,.$$

Dies entspricht der Differenzialgleichung für harmonische Bewegungen, wenn

$$\omega^2 = \frac{g\,d}{r_Z^2\left(\frac{3}{2} - 2\,\frac{d}{r_Z}\right)}$$

ist. In Aufgabe 8.17 wurde gezeigt, dass $d = 4\,r_Z/(3\,\pi)$ ist. Dies setzen wir ein und erinnern uns daran, dass wir zuvor Näherungen für kleine Winkel angesetzt hatten. Damit erhalten wir

$$\omega^2 \approx \frac{\frac{4}{3\,\pi}}{\frac{3}{2} - \frac{8}{3\,\pi}}\,\frac{g}{r_Z} = \left(\frac{8}{9\,\pi - 16}\right)\frac{g}{r_Z}\,.$$

Daraus folgt für die Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} \approx 2\,\pi\sqrt{\left(\frac{9\,\pi - 16}{8}\right)\frac{r_Z}{g}} = 7{,}78\,\sqrt{\frac{r_Z}{g}}\,.$$

L14.40 a) Für die Abhängigkeit der Amplitude des Oszillators von der Zeit gilt

$$A = A_0\,\mathrm{e}^{-bt/(2m)}\,, \tag{1}$$

und die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung ist gegeben durch

$$\omega' = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2\,m\,\omega_0}\right)^2}\,.$$

Damit ergibt sich für den Faktor von t im Exponenten von Gleichung 1

$$\frac{b}{2\,m} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{(\omega')^2}{\omega_0^2}} = \omega_0\,\sqrt{1 - (0{,}9)^2} = 0{,}436\,\omega_0$$

und für die Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega'} = \frac{2\,\pi}{0{,}9\,\omega_0}\,.$$

Für $t = T$ erhalten wir also aus Gleichung 1

$$\frac{A}{A_0} = \mathrm{e}^{-(0{,}436\,\omega_0)\,2\pi/(0{,}9\omega_0)} = \mathrm{e}^{-3{,}04} = 0{,}0478\,.$$

b) Zur Zeit $t = 0$ ist die Energie des Oszillators $E_0 = \frac{1}{2}\,k_F\,A_0^2$, und zur Zeit $t = T$ ist sie $E_T = \frac{1}{2}\,k_F A^2$. Wir dividieren die zweite dieser Gleichungen durch die erste und setzen den zuvor ermittelten Quotienten A/A_0 ein:

$$\frac{E_T}{E_0} = \frac{A^2}{A_0^2} = \left(\frac{A}{A_0}\right)^2 = (0{,}0478)^2 = 0{,}00228\,.$$

L14.41 a) Die mit Hilfe einer Kraft $\boldsymbol{F}$ dem Oszillator zugeführte Leistung ist $P = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = F\,v\,\cos\theta$. Mit $\theta = 0$ ergibt sich daraus $P = F\,v$. Die Zeitabhängigkeit der Kraft ist $F = F_0\,\cos\omega t$, und für die Position des angetriebenen Oszillators gilt $x = A\,\cos(\omega t - \delta)$. Die Ableitung nach der Zeit ergibt die Geschwindigkeit: $v = -A\,\omega\,\sin(\omega t - \delta)$. Dies setzen wir ein und erhalten

$$\begin{aligned} P &= (F_0\,\cos\omega t)\,[-A\,\omega\,\sin(\omega t - \delta)] \\ &= -A\,\omega\,F_0\,\cos\omega t\,\sin(\omega t - \delta)\,. \end{aligned}$$

b) Wir formen den Sinusausdruck um, wie in der Aufgabenstellung angegeben:

$$\sin(\omega t - \delta) = \sin\omega t\,\cos\delta - \cos\omega t\,\sin\delta\,.$$

Das setzen wir in die vorige Gleichung ein:

$$\begin{aligned} P &= -A\,\omega\,F_0\,\cos\omega t\,(\sin\omega t\,\cos\delta - \cos\omega t\,\sin\delta) \\ &= A\,\omega\,F_0\,\sin\delta\,\cos^2\omega t - A\,\omega\,F_0\,\cos\delta\,\cos\omega t\,\sin\omega t\,. \end{aligned}$$

c) Wir integrieren über eine Periode, um $\langle\sin\theta\,\cos\theta\rangle$ zu erhalten:

$$\langle\sin\theta\,\cos\theta\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{2\pi} = 0\,.$$

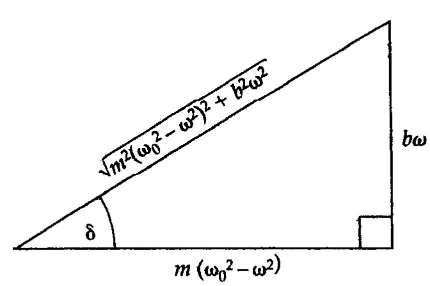
Nun integrieren wir über eine Periode, um $\langle\cos^2\theta\rangle$ zu erhalten:

$$\begin{aligned} \langle\cos^2\theta\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + \cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta\right] = \frac{1}{2\pi}\,(\pi + 0) = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die mittlere Leistung

$$\begin{aligned} \langle P\rangle &= A\,\omega\,F_0\,\sin\delta\langle\cos^2\omega t\rangle - A\,\omega\,F_0\,\cos\delta\langle\cos\omega t\,\sin\omega t\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}A\,\omega\,F_0\,\sin\delta - (A\,\omega\,F_0\,\cos\delta)\cdot(0) \\ &= \tfrac{1}{2}A\,\omega\,F_0\,\sin\delta\,. \end{aligned}$$

d) Wir konstruieren das rechtwinklige Dreieck, wie in der Aufgabenstellung gefordert:



Darin ist $\tan\delta = \dfrac{b\,\omega}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)}\,.$

Außerdem gilt aufgrund der geometrischen Zusammenhänge

$$\sin\delta = \frac{b\,\omega}{\sqrt{m^2\,(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\,\omega^2}}\,.$$

Wegen $A = \dfrac{F_0}{\sqrt{m^2\,(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\,\omega^2}}$

lässt sich dies vereinfachen zu $\sin\delta = \dfrac{b\,\omega A}{F_0}$.

e) Wir lösen die vorige Gleichung nach der Kreisfrequenz auf:

$$\omega = \frac{F_0}{bA}\,\sin\delta\,.$$

Mit dem Ergebnis von Teilaufgabe c ergibt dies für die mittlere zugeführte Leistung

$$\langle P\rangle = \frac{F_0^2}{2b}\,\sin^2\delta = \frac{1}{2}\,\frac{b\,\omega^2 F_0^2}{m^2\,(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\,\omega^2}\,.$$

L14.42 a) Mit der letzten Gleichung der Lösung 41 gilt bei der Hälfte der maximalen Input-Leistung
$m^2\,(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\,\omega^2 = 2\,b^2\,\omega_0^2\,.$
Bei scharfer Resonanz gilt $m^2\,(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \approx b^2\,\omega_0^2\,.$
Umformen liefert
$m^2\,[(\omega_0 - \omega)\,(\omega_0 + \omega)]^2 \approx b^2\,\omega_0^2$
bzw.
$m^2\,(\omega_0 - \omega)^2\,(\omega_0 + \omega)^2 \approx b^2\,\omega_0^2\,.$
b) Mit der Näherung $\omega + \omega_0 \approx 2\,\omega_0$ ergibt sich aus der vorigen Gleichung $m^2\,(\omega_0 - \omega)^2\,(2\,\omega_0)^2 \approx b^2\,\omega_0^2$. Dies formen wir um und erhalten

$$\omega_0 - \omega = \pm\frac{b}{2m}\,. \qquad (1)$$

c) Definitionsgemäß ist $Q = \omega_0\,\tau = \omega_0\,m/b$, also $b = \omega_0\,m/Q$.
d) Den eben ermittelten Ausdruck für b setzen wir in Gleichung 1 ein. Das ergibt

$$\omega_0 - \omega = \pm\frac{\omega_0}{2Q} \qquad \text{und} \qquad \omega = \omega_0 \pm \frac{\omega_0}{2Q}\,.$$

Damit gilt für die beiden Kreisfrequenzen

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q} \qquad \text{und} \qquad \omega_2 = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q}\,.$$

Die Halbwertsbreite ist also $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0/Q$.

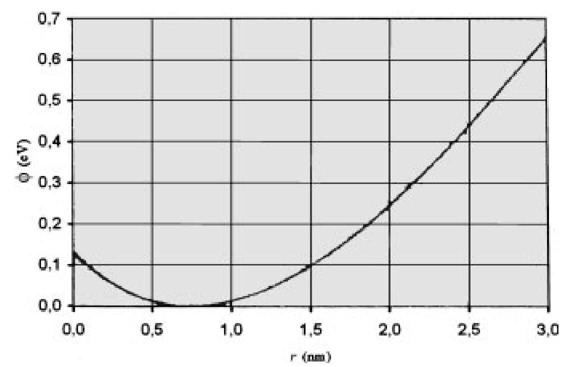
L14.43 a) In einem Tabellenkalkulationsprogramm sind zur Berechnung des Morse-Potenzials ϕ in Abhängigkeit von r folgende Anweisungen einzugeben:

Zelle	Inhalt / Formel	Algebr. Ausdruck
B1	5	D
B2	0,2	β
C9	C8 + 0,1	$r + \Delta r$
D8	B*(1−EXP(−B2*(C8−B3)))^2	$D\,[1 - \mathrm{e}^{-\beta(r-r_0)}]^2$

Die zweite Tabelle enthält auszugsweise die einzugebenden Werte und die Ergebnisse.

	A	B	C	D
1	D=	5	eV	
2	Beta=	0,2	nm^{-1}	
3	r0=	0,75	nm	
4				
5				
6			r	$\phi(r)$
7			(nm)	(eV)
8			0,0	0,13095
9			0,1	0,09637
10			0,2	0,06760
11			0,3	0,04434
12			0,4	0,02629
…				
235			22,7	4,87676
236			22,8	4,87919
237			22,9	4,88156
238			23,0	4,88390
239			23,1	4,88618

Die Abbildung zeigt die vom Programm erzeugte Kurve.



b) Wir leiten den gegebenen Ausdruck für das Morse-Potenzial nach r ab:

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[D\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta(r-r_0)}\right)^2\right] = -2\,\beta\,D\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta(r-r_0)}\right).$$

Bei einem Extremwert muss die Ableitung gleich null sein:
$-2\,\beta\,D\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta(r-r_0)}\right) = 0\,.$
Dies ergibt $r = r_0$, weil der Klammerausdruck gleich 0 und daher der Exponentialausdruck gleich 1, also der Exponent gleich 0 sein muss. Die zweite Ableitung von ϕ nach r lautet

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}r^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[-2\,\beta\,D\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta(r-r_0)}\right)\right] = 2\,\beta^2\,D\,\mathrm{e}^{-\beta(r-r_0)}.$$

Einsetzen von $r = r_0$ ergibt

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=r_0} = 2\,\beta^2\,D\,.$$

Das Potenzial eines harmonischen Oszillators ist gegeben durch $\phi = \frac{1}{2}\,k_\mathrm{F}\,x^2$, und die zweite Ableitung nach r ist

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}r^2} = k_\mathrm{F}\,.$$

Der Vergleich mit der vorigen Beziehung ergibt $k_\mathrm{F} = 2\,\beta^2\,D$.

c) Die Schwingungsfrequenz eines Moleküls mit der reduzierten Masse m_{red} ist $\omega = \sqrt{k_{\text{F}}/m_{\text{red}}}$. Ein Molekül aus zwei gleichen Atomen, also mit $m = m_1 = m_2$, hat die reduzierte Masse

$$m_{\text{red}} = \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}\,.$$

Damit ergibt sich $\omega = \sqrt{\dfrac{2\beta^2 D}{m/2}} = 2\beta\sqrt{\dfrac{D}{m}}\,.$

Ein anderer Lösungsweg wäre folgender: Wir entwickeln den Ausdruck für das Morse-Potenzial in eine Taylor-Reihe:

$$\phi(r) = \phi(r_0) + (r - r_0)\,\phi'(r_0) + \frac{1}{2!}\,(r - r_0)^2\,\phi''(r_0) + \cdots$$

Das ergibt $\phi(r) \approx \beta^2 D\,(r - r_0)^2$.

Diesen Ausdruck vergleichen wir mit dem für das Potenzial eines Feder-Masse-Systems und erhalten $k_{\text{F}} = 2\beta^2 D$.

http://www.springer.com/978-3-8274-1165-5

Arbeitsbuch zu Tipler/Mosca Physik für Wissenschaftler und Ingenieure
Mills, D.
2005, Softcover
ISBN: 978-3-8274-1165-5