(1) [8 Punkte] Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Gültigkeit der folgenden Summenformel für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$:

$$4 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)\,(k+2)} = 1 - \frac{2}{(n+1)\,(n+2)}.$$

Lösung:

$n=1$: $4 \cdot \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = 4 \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$,

$1 - \frac{2}{(1+1)(1+2)} = 1 - \frac{2}{2 \cdot 3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

$n \longrightarrow n+1$:

$$4 \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{4}{(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

$$= 1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} + \frac{4}{(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

$$= 1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \cdot \left(1 - \frac{2}{n+3}\right) =$$

$$= 1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n+3-2}{n+3} =$$

$$= 1 - \frac{2}{(n+2)(n+3)}.$$

(2) [8 Punkte]

(a) Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus bestimme man den ggT(93, 36).

(b) Unter Benützung von Punkt (a) ermittle man ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ (diese müssen explizit angegeben werden!), sodass:

$$93\,a + 36\,b = 3.$$

Lösung:

(a) Euklidischer Algorithmus:

$93 = 36 \cdot 2 + 21, \quad 36 = 21 \cdot 1 + 15,$

$21 = 15 \cdot 1 + 6, \quad 15 = 6 \cdot 2 + 3,$

$6 = 3 \cdot 2 + 0 \implies \mathrm{ggT}(93, 36) = 3.$

(b) Ermittlung von $a, b \in \mathbb{Z}$, so dass $93a + 36b = 3$:

$3 = 15 - 6 \cdot 2 = 15 - (21 - 15 \cdot 1) \cdot 2 =$

$= 21 \cdot (-2) + 15 \cdot 3 = 21 \cdot (-2) + (36 - 21 \cdot 1) \cdot 3 =$

$= 36 \cdot 3 + 21 \cdot (-5) = 36 \cdot 3 + (93 - 36 \cdot 2) \cdot (-5) =$

$= 93 \cdot (-5) + 36 \cdot 13$, also $a = -5$, $b = 13$.

Probe: $93 \cdot 5 = 465$, $36 \cdot 13 = 468$ ✓

(3) [4 Punkte] Gegeben sei folgende im Allgemeinen falsche Mengeninklusion:

$$A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \,\Delta\, C.$$

Für die vier nachfolgend angegebenen Situationen kreuze man an, ob für solch ein Element x die Mengeninklusion wahr oder falsch ist (dabei soll natürlich $\in$ bzw. $\notin$ bedeuten, dass das Element x in der entsprechenden Menge enthalten ist bzw. nicht enthalten ist):

A	B	C	Aussage	
$\in$	$\in$	$\in$	☒ wahr	○ falsch
$\in$	$\notin$	$\in$	○ wahr	☒ falsch
$\notin$	$\in$	$\in$	☒ wahr	○ falsch
$\notin$	$\notin$	$\notin$	☒ wahr	○ falsch

Anmerkung: Sie können selbstverständlich Nebenrechnungen machen, um dieses Beispiel zu lösen, aber für die Benotung dieser Frage ist nur relevant, was Sie hier in dieser Tabelle angekreuzt haben!

Lösung: Wir stellen für beide Terme eine Elementtafel auf, wobei wir $\in = 1$ und $\notin = 0$ setzen.

	A	B	C	B\C	A\(B\C)	A\B	(A\B) Δ C	Inklusion
•	1	1	1	0	1	0	1	wahr
	1	1	0	1	0	0	0	wahr
•	1	0	1	0	1	1	0	falsch
	1	0	0	0	1	1	1	wahr
•	0	1	1	0	0	0	1	wahr
	0	1	0	1	0	0	0	wahr
	0	0	1	0	0	0	1	wahr
•	0	0	0	0	0	0	0	wahr

Die für das Ankreuzen relevanten Zeilen sind mit „•" gekennzeichnet.