	1.
	2.
Name:	3.
Matrikelnummer:	4.
	5.

Analysis für Inf. und Winf. (Prof. Karigl)

Schriftliche Prüfung am 1. 7. 2014

---

1. Man finde eine explizite Darstellung für die Partialsummen der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n(n+1)}$$

und berechne damit – wenn möglich – die Summe.

(Hinweis: Führen Sie für die Summanden eine Partialbruchzerlegung durch.)

2. Gesucht ist das absolute Maximum der Funktion $f(x,y) = xy(4 - x - y)$ auf dem Definitionsbereich $D = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, y \leq 4 - x\}$.

(Anleitung: Man skizziere den Definitionsbereich D in der (x,y)-Ebene, bestimme dessen Rand und ermittle alle Funktionswerte auf dem Rand. Das absolute Maximum ist dann unter den relativen Maxima im Inneren sowie unter den Funktionswerten am Rand von D zu suchen.)

3. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung: $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 2x$.

4. Hauptsatz über implizite Funktionen:
   - Formulieren Sie den Hauptsatz über implizite Funktionen und skizzieren Sie die Herleitung der Ableitung einer impliziten Funktion mit Hilfe der Kettenregel.
   - Geben Sie ein Beispiel zur Ableitung einer impliziten Funktion an.

Fortsetzung auf der Rückseite!

5. Zu dem Integral $\int \frac{2x}{1-x^2}dx$ beantworte man die folgenden Fragen bzw. überprüfe man die nachstehenden Aussagen (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein):

Handelt es sich um ein	○ bestimmtes ☒ unbestimmtes ○ uneigentliches Integral?
Das Integral ist der Limes von Riemann'schen Zwischensummen.	○ ja ○ nein
Das Integral kann durch Partialbruchzerlegung bestimmt werden.	○ ja ○ nein
Das Integral kann durch partielle Integration bestimmt werden.	○ ja ○ nein
Das Integral kann durch eine Substitution gelöst werden.	○ ja ○ nein
Das Integral ist eindeutig bis auf eine additive Konstante bestimmt.	○ ja ○ nein
Das Integral ist durch folgende Stammfunktion gegeben:	○ $\ln(1-x^2)$ ○ $2\ln(1-x^2)$ ○ $-\ln(1-x^2)$
Zur Berechnung dieses Integrals können verwendet werden:	○ Mittelwertsatz der Integralrechnung ○ Integralkriterium für unendliche Reihen ○ Regel von de l'Hospital

Keine Antwort

Zeit: 100 Minuten

Prüfungsergebnisse bis Freitag, 18. 7. 2014, siehe TISS

ANALYSIS - KARIGL - SS14 - 1.7.2014

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n(n+1)} = 6 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\cancel{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots}$$

$$\cancel{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{n+1} \right) =}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \dots$$

$$\cancel{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1}$$

$$+ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n(n+1)} = 6 \cdot \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 6$$

PARTIALBRUCHZERLEGUNG:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \quad \Big| \cdot n(n+1)$$

$$1 = A(n+1) + Bn = An + A + Bn = (A+B)n + A$$

$$\underline{A = 1}$$

$$A + B = 0$$

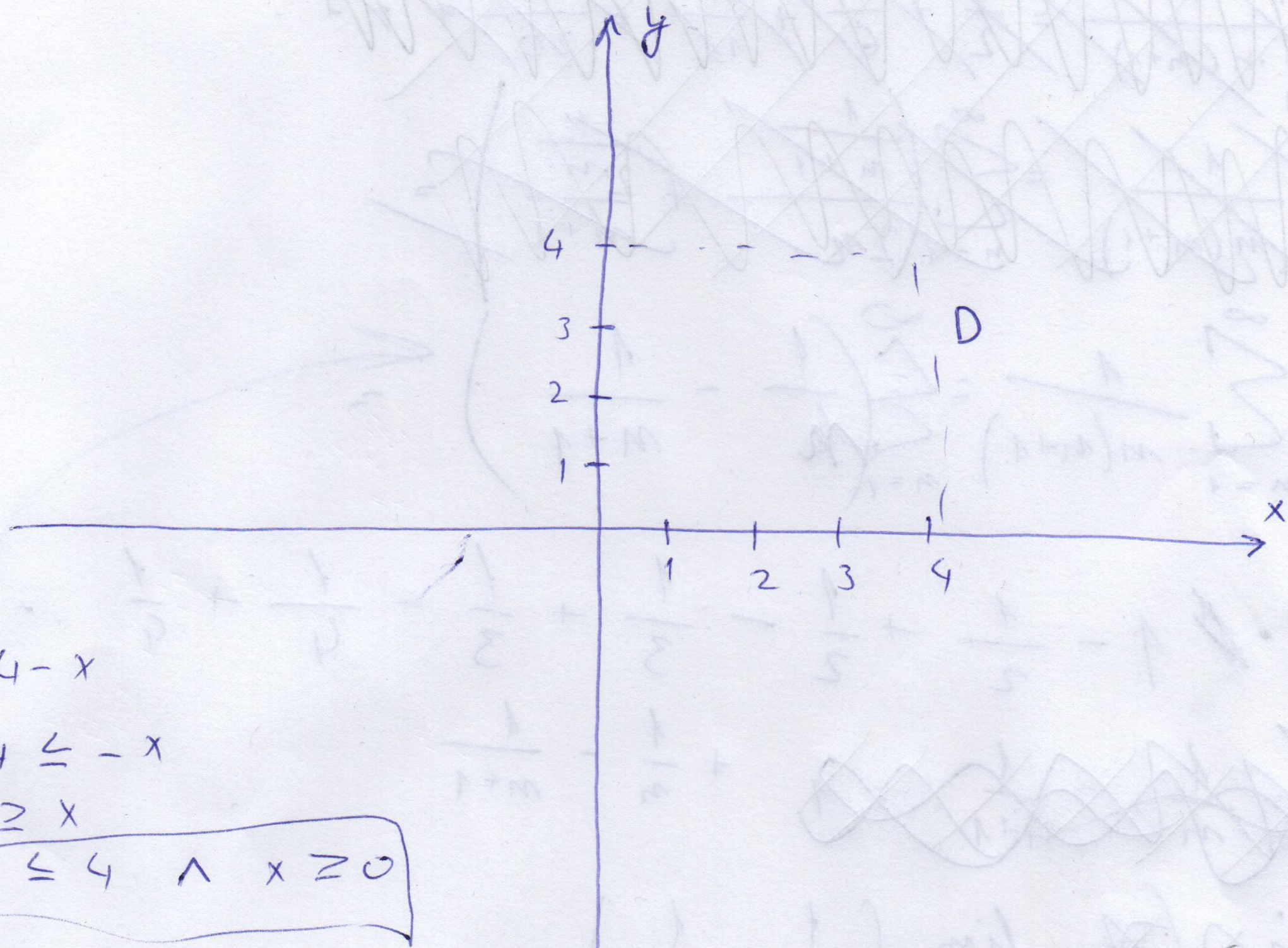
$$\underline{B = -1}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \boxed{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$$

2) $f(x,y) = xy(4-x-y) = 4xy - x^2y - xy^2$

$D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq 4-x\}$

ABSOLUTE MAXIMUM ?



$0 \leq 4 - x$

$-4 \leq -x$

$4 \geq x$

$\boxed{x \leq 4 \ \wedge \ x \geq 0}$

$f_x(x,y) = 4y - 2xy - y^2 = y(4-2x-y)$

$f_y(x,y) = 4x - x^2 - 2yx = x(4-x-2y)$

(1) $x = 0 \ \wedge \ y = 0 \implies P_1(0,0)$

(2) $\boxed{x=0} \ \wedge \ 4 - 2x - y = 0$

$4 - y = 0$

$y = 4 \implies P_2(0,4)$

(3) $4 - x - 2y = 0 \ \wedge \ y = 0$

$4 - x = 0$

$x = 4 \implies P_3(4,0)$

(4) $4 - x - 2y = 0 \ \wedge \ 4 - 2x - y = 0$ ~~$\implies P_4(4,4)$~~

$-x = 2y - 4$

$\boxed{x = 4 - 2y}$

$\boxed{x = \frac{4}{3}}$

$4 - 2(4-2y) - y = 0$

$3y - 4 = 0$

$\boxed{y = \frac{4}{3}}$

$\implies P_4\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

ANALYSIS - KARIGL - SS14 - 1. 7. 2014.

2) $\circ\!\!\longrightarrow$ $f_{xx}(x,y) = -2y$

$f_{xy}(x,y) = 4-2x-2y$

$f_{yx}(x,y) = 4-2x-2y$

$f_{yy}(x,y) = -2x$

$$H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

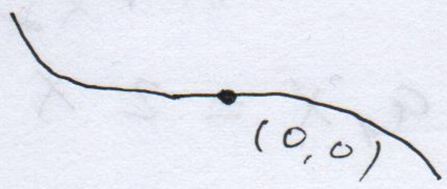
$\det H_{f(x,y)} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$

① $P_1(0,0)$

$$H_{f(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$f_{xx}(0,0) = 0 \Rightarrow$ kein Extremum

nur eine Änderung...



② $$H_f(0,4) = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$f_{xx} = -8 < 0$

$\det H_{f(x,y)} = 0 - 16 = -16 < 0 \Rightarrow$ Hesse-Matrix indefinit

$\Rightarrow$ Sattelpunkt

③ $$H_f(4,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$f_{xx} = 0 \Rightarrow$ kein Extremum

④ $$H_f\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$f_{xx} = -\frac{8}{3} < 0$

$\det H_f(x,y) = \frac{64}{9} - \frac{16}{9} = \frac{48}{9} > 0$ $\Big\}$ negativ definit

$\Rightarrow P\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ ist absolutes Maximum auf D.

3) $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 2x$

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

$y_h(x) = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$

$y_p(x) = a_0 + a_1 x$; $y_p'(x) = a_1$; $y_p''(x) = 0$

$0 - 2a_1 + 2a_0 + 2a_1 x = 2x$

$2a_1 x = 2x$

$\boxed{a_1 = 1}$

$-2a_1 + 2a_0 = 0$

$-2 + 2a_0 = 0$

$\boxed{a_0 = 1}$

$y_p(x) = 1 + x$

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + x + 1$

4) PAGE 237 – 6.22

Hauptsatz über <u>implizite Funktionen</u>:

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $F: D \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Weiters sei $F(x_0, y_0) = 0$ und $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von (x_0, y_0), so dass die Gleichung $F(x, y) = 0$ in U eine eindeutig bestimmte stetige Lösung $y(x)$ hat. Die Funktion $y(x)$ ist darüber hinaus stetig differenzierbar und erfüllt:

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}$$

KETTENREGEL:

$$\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x))\, y'(x) = 0$$

$$F_y(x, y(x))\, y'(x) = -F_x(x, y(x))$$

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}$$

<u>Bsp.</u>:

$F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ (Kreis)

$y_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$; $y_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$

$F_x(x, y) = 2x$

$F_y(x, y) = 2y$

$F_y(x, y) = 0$ wenn $y = 0$

Der Hauptsatz über implizite Funktionen ist erfüllt wenn:

$y \neq 0 \Rightarrow F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Der Anstieg der Tangente in (x_0, y_0) ist dann:

$$y'(x_0) = -\frac{x_0}{y(x_0)}.$$

SUBSTITUTION:

5) $\int \frac{2x}{1-x^2}\,dx = 2\int \frac{x}{1-x^2}\,dx =$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 1-x^2 \\ du &= -2x\,dx \end{aligned}} \Rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$$

$$= -\cancel{2}\int \frac{\cancel{x}}{u\cancel{-2x}}\,du = -\int \frac{1}{u}\,du =$$

$$= -\ln|u| + C = -\ln(1-x^2) + C$$

PARTIALBRUCHZERLEGUNG:

$$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$$

$$2x = A(1+x) + B(1-x) = A + Ax + B - Bx$$

$$2x = (A-B)x + A + B$$

$$A + B = 0$$
$$A = -B$$

$$A - B = 2$$
$$-B - B = 2$$

$$\boxed{B = -1}$$

$$\boxed{A = 1}$$

SUBST.: $1-x = u_1$; $1+x = u_2$

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx - \int \frac{1}{1+x}\,dx = -\int \frac{1}{u_1}\,du_1 - \int \frac{1}{u_2}\,du =$$

$$= -\ln|u_1| - \ln|u_2| = -(\ln|u_1| + \ln|u_2|) = -\ln|u_1 u_2| =$$

$$= -\ln|1-x^2| + C$$

PARTIELLE INTEGRATION: $\boxed{\text{NEIN}}$

$\frac{1}{1-x^2}$ ist nicht stetig differenzierbar.

SUMMARY:

* unbestimmtes
* ja
* ja
* nein
* ja
* ja

* $-\ln(1-x^2)$
* keines