Runde 7, Beispiel 45

LVA 118.181, Übungsrunde 7, 01.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 01.12.2006

1 Angabe

Man betrachte das RWP

$$\ddot{y}(t) - y(t) = at + b \qquad y(0) = 0; y(1) = 0$$

für $a, b \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe des Alternativsatzes zeige man, dass das RWP für jede Wahl von a, b eindeutig lösbar ist.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Randwertaufgaben (allgemein)

Definition: Treten in der Bestimmungsgleichung für die eindeutige Charakterisierung der Lösung einer DGL Auswertungen der gesuchten Funktion und deren Ableitungen nicht nur an einer Stelle (wie beim AWP), sondern an zwei Stellen $a \neq b$ auf, dann spricht man von einer **Randwertaufgabe (RWA)** bzw. von einem **Randwertproblem (RWP)**.
Allgemeines Prinzip zur Lösung von RWA/RWP:

- Auffinden der allgemeinen Lösung der gegebenen DGL (mit Parametern $c_1, c_2, \ldots, c_n$)
- Anpassen der Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ durch Einsetzen der Randbedingungen in die allgemeine Lösung

$\Rightarrow$ Gleichungssystem $c_1, c_2, \ldots, c_n$
Spezialfall: DGL ist linear und Randbedingungen sind auch Linear $\Rightarrow$ Lineares Gleichungssystem für $c_1, c_2, \ldots, c_n$.
Falls nichtlineare RWA/RWP, so ist das Problem i.A. wesentlich komplizierter.
Für die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \leq x \leq b, a < b$$

tritt meist eine der vier folgenden Randbedingungen auf:

(1)	$y(a) = r_1$	$y(b) = r_2$	1. Art
(2)	$y'(a) = r_1$	$y'(b) = r_2$	2. Art
(3)	$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = r_1$	$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = r_2$	3. Art
(4)	$y(a) = y(b)$	$y'(a) = y'(b)$	Period. Randbed.

$$(r_1, r_2, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$$

In (1),(2) und (3) treten in jeder Gleichung nur die Werte für ein Intervallende auf (Randbedingungen sind separier).
Fall (4) führt mit $T = b - a$ zu T-periodischen Lösungen, falls $f(x, y, y')$ ebenfalls T-periodisch in x ist.

2.2 Lineare Randwertprobleme, Alternativsatz, Lösung des RWP

Seien a und b reelle Zahlen mit $a < b$. Ein Randwertproblem mit einer linearen Differentialgleichung

$$L(y) = \sum_{v=0}^{n} p_v(x) \cdot y^{(v)} = q(x)$$

der Ordnung n und n linearen Randbedingungen

$$R_\mu(y(a)) = \sum_{v=0}^{n-1} \alpha_{v\mu} \cdot y^{(v)}(a) = \alpha_\mu, \qquad \mu = 1, \ldots, s$$
$$R_\mu(y(b)) = \sum_{v=0}^{n-1} \beta_{v\mu} \cdot y^{(v)}(b) = \beta_\mu, \qquad \mu = s+1, \ldots, n$$

heist ein **lineares Randwertproblem der Ordnung** n.
Dabei sind die stetigen Funktionen $p_v(x)$, $q(x)$ sowie die Zahlen $\alpha_{v\mu}$, $\beta_{v\mu}$, α_μ, β_μ gegeben.
Das lineare Randwertproblem heisst

- vollhomogen, falls $q(x) \equiv 0$ und $\alpha_\mu = 0$, $\beta_\mu = 0$ für alle μ gilt
- halbhomogen, falls entweder $q(x) \equiv 0$ oder alle $\alpha_\mu, \beta_\mu = 0$ sind
- inhomogen sonst.

Jedes inhomogene lineare Randwertproblem lässt sich folgendermaßen in ein halbhomogenes Randwertproblem umformen:

- Sei $\psi(x)$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung. Es gilt also $L(\psi) = q(x)$. Mit dem Ansatz $y(x) = \psi(x) + z(x)$ ergeben sich für z die homogene Differentialgleichung $L(z) = 0$ und die neuen Randbedingungen

$$R_\mu(z(a)) = \tilde{\alpha}_\mu, \qquad \mu = 1, \ldots, s$$
$$R_\mu(z(b)) = \tilde{\beta}_\mu, \qquad \mu = s+1, \ldots, n$$

  mit $\tilde{\alpha}_\mu := R_\mu(\psi(a))$ und $\tilde{\beta}_\mu := \beta_\mu - R_\mu(\psi(b))$.

- Sei $\psi^*(x)$ eine Funktion, die die folgenden Randbedingungen erfüllt:

$$R_\mu(\psi^*(a)) = \alpha_\mu, \qquad 1 \leq \mu \leq s$$
$$R_\mu(\psi^*(b)) = \beta_\mu, \qquad s+1 \leq \mu \leq n$$

  Mit dem Ansatz $y(x) = \psi^*(x) + \omega(x)$ ergibt sich für ω die lineare Differentialgleichung

$$L(\omega) = \tilde{q} \qquad \text{mit} \qquad \tilde{q}(x) = q(x) - L(\psi^*)$$

und die homogenen Randbedingungen

$$R_\mu(\omega(a)) = 0, \qquad \mu = 1, \dots, s$$
$$R_\mu(\omega(b)) = 0, \qquad \mu = s+1, \dots, n$$

In beiden Fällen ist ein halbhomogenes Randwertproblem entstanden.

Zur Untersuchung der Lösbarkeit linearer Randwertprobleme können wir ohne Einschränkung stets von einem halbhomogenen Randwertproblem mit einer homogenen Differentialgleichung ausgehen. Es gilt der **Alternativsatz**: Ausgangspunkt sei das Randwertproblem aus mit $q(x) \equiv 0$. Es sei $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differentialgleichung $L(y) = 0$, und es sei ferner

$$\triangle := \det R := \det \begin{pmatrix} R_1(y_1(a)) & \cdots & R_1(y_n(a)) \\ \vdots & & \vdots \\ R_s(y_1(a)) & \cdots & R_s(y_n(a)) \\ R_{s+1}(y_1(b)) & \cdots & R_{s+1}(y_n(b)) \\ \vdots & & \vdots \\ R_n(y_1(b)) & \cdots & R_n(y_n(b)) \end{pmatrix}$$

sowie $\gamma = (\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n)^T$.
Es gibt drei Alternativen:

- Ist $\triangle \neq 0$, dann ist das Randwertproblem eindeutig lösbar.
- Ist $\triangle = 0$ und gilt rg $R = \mathrm{rg}(R, \gamma)$, dann hat das Randwertproblem unendlich viele Lösungen.
- Ist $\triangle = 0$ und gilt rg $R < \mathrm{rg}(R, \gamma)$, dann ist das Randwertproblem unlösbar.

Anmerkungen:

- Erinnerung an den Begriff des Ranges einer Matrix M: rg M (der Rang von M) ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten (oder Zeilen) der Matrix M. Ist a ein Spaltenvektor mit genauso viel Komponenten, wie M Zeilen besitzt, dann ist (M, a) die Matrix, die aus M durch Hinzufügen der Spalte a entsteht.
- Ist das Randwertproblem vollhomogen, dann existiert bei der ersten Alternative nur die triviale Lösung $y(x) \equiv 0$. Die dritte Alternative tritt nicht auf.

Zusammengefasst die **Schritte zur Lösung eines linearen Randwertproblemes**:

1. Man bestimme eine spezielle Lösung $\psi(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung $L(y) = q(x)$ und forme das Randwertproblem in ein halbhomogenes Randwertproblem mit homogener Differentialgleichung um.
2. Man berechne ein Fundamentalsystem aus Lösungen $\{z_1(x), \dots, z_n(x)\}$ von $L(z) = 0$, bilde die Matrix R und den Vektor $\gamma = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_s, \tilde{\beta}_{s+1}, \dots, \tilde{\beta}_n)^T$.

3. Im Falle der Lösbarkeit (ersten beiden Alternativen) löse man das lineare Gleichungssystem $R \cdot c = \gamma$ nach $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ auf.

4. Die gesuchte Lösung des Randwertproblems lautet nun:

$$y(x) = \psi(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot z_k(x)$$

3 Lösung des Beispiels

Man betrachte das RWP

$$\ddot{y}(t) - y(t) = at + b \qquad y(0) = 0; y(1) = 0$$

für $a, b \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe des Alternativsatzes zeige man, dass das RWP für jede Wahl von a, b eindeutig lösbar ist.
Wir betrachten zunachst das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $\lambda^2 = 1$, was die Lösungsbasis $\phi_1(t) = e^{-t}$ und $\phi_2(t) = e^t$ ergibt.
Nun wird die Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ gebildet:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{t} \\ -\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}$$

R und S werden nach den Randbedingungen gebildet:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun wird die Matrix D berechnet:

$$D := R \cdot \Phi(a) + S \cdot \Phi(b) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-a} & \mathrm{e}^{a} \\ \mathrm{e}^{-b} & \mathrm{e}^{b} \end{pmatrix}$$

Die Determinante von D ist:

$$\|D\| = \mathrm{e}^{-a} \cdot \mathrm{e}^{b} - \mathrm{e}^{-a} \cdot \mathrm{e}^{a} = \mathrm{e}^{b-a} - \mathrm{e}^{a-b}$$

a und b sind nicht die Randwerte, sondern 0 und 1 - die Determinante lautet:

$$\|D\| = \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Damit ist das Randwertproblem eindeutig lösbar.