# 3. UE-Test für "Algebra und diskrete Mathematik für Informatik und WI" (Gruppe A)

24. Jänner 2022

Vorname: _____

Familienname: _____ Matrikelnummer: _____

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten sind genau zu begründen.
Arbeitszeit: 35 Minuten

**Aufgabe 1:** Sei $U$ die von $\overline{3}$ erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Z}_9$.

(1) Man bestimme die Elemente der Untergruppe $U$.
(2) Man zeige, dass $U$ ein Normalteiler von $\mathbb{Z}_9$ ist.
(3) Man bestimme die Elemente und die Gruppentafel der Faktorgruppe $\mathbb{Z}_9/U$.

(6 Punkte)

**Aufgabe 2:** Man untersuche das Polynom $x^2 + x - 9$ auf Irreduzibilität

(1) über $\mathbb{Q}$ und
(2) über $\mathbb{Z}_7$.

(6 Punkte)

**Aufgabe 3:** Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$$

(1) Bestimmen Sie die Matrix von $f$ bezüglich der kanonischen Basis. (D.h. im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$ werde die kanonische Basis gewählt.)
(2) Bestimmen Sie den Rang dieser Matrix.
(3) Bestimmen Sie das Bild von $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ unter $f$.
(4) Bestimmen Sie den Kern von $f$.

(8 Punkte)

**3. UE-Test für "Algebra und diskrete Mathematik für Informatik und WI"**
**(Gruppe B)**
24. Jänner 2022

Vorname: _____

Familienname: _____ Matrikelnummer: _____

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten sind genau zu begründen.
Arbeitszeit: 35 Minuten

**Aufgabe 1:** Sei $U$ die von $\overline{4}$ erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Z}_{12}$.

(1) Man bestimme die Elemente der Untergruppe $U$.
(2) Man zeige, dass $U$ ein Normalteiler von $\mathbb{Z}_{12}$ ist.
(3) Man bestimme die Elemente und die Gruppentafel der Faktorgruppe $\mathbb{Z}_{12}/U$.

(6 Punkte)

**Aufgabe 2:** Man untersuche das Polynom $x^2 - 4x - 2$ auf Irreduzibilität

(1) über $\mathbb{Q}$ und
(2) über $\mathbb{Z}_5$.

(6 Punkte)

**Aufgabe 3:** Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$$

(1) Bestimmen Sie die Matrix von $f$ bezüglich der kanonischen Basis. (D.h. im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$ werde die kanonische Basis gewählt.)
(2) Bestimmen Sie den Rang dieser Matrix.
(3) Bestimmen Sie das Bild von $\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ unter $f$.
(4) Bestimmen Sie den Kern von $f$.

(8 Punkte)

# 3. Übungstest

# Algebra und Diskrete Mathematik für Inf und WInf

## Gruppe C

TU Wien, Zoom, 24.1.2022 Arbeitszeit: 35 Minuten

---

1) (7 Punkte) Sei $w_8 = (1, \frac{\pi}{4}) \in \mathbb{C}$ die primitive achte Einheitswurzel und sei $w_4 = (1, \frac{\pi}{2}) = i \in \mathbb{C}$ die primitive vierte Einheitswurzel. Sei $C_8$ die von $w_8$ und $C_4$ die von $w_4$ erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ Dann ist $C_4$ eine Untergruppe von $C_8$. Bestimmen Sie die Elemente von $C_4$ und die Elemente von $C_8$. Bestimmen Sie alle Nebenklassen von $C_4$ in $C_8$.

2) (6 Punkte) Sei $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ mit den in $\mathbb{R}$ ausgeführten Operationen der Addition und der Multiplikation mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{Q}$ bildet.

3) (7 Punkte) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

und sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto A \cdot x$. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(f)$. Geben Sie den Rang von $f$ an.

# 3. Übungstest

# Algebra und Diskrete Mathematik für Inf und WInf

## Gruppe D

TU Wien, Zoom, 24.1.2022 Arbeitszeit: 35 Minuten

---

1) (7 Punkte) Sei $w_8 = (1, \frac{\pi}{4}) \in \mathbb{C}$ die primitive achte Einheitswurzel und sei $w_4 = (1, \frac{\pi}{2}) = i \in \mathbb{C}$ die primitive vierte Einheitswurzel. Sei $C_8$ die von $w_8$ und $C_4$ die von $w_4$ erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ Dann ist $C_4$ eine Untergruppe von $C_8$. Bestimmen Sie die Elemente von $C_4$ und die Elemente von $C_8$. Bestimmen Sie alle Nebenklassen von $C_4$ in $C_8$.

2) (6 Punkte) Sei $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ mit den in $\mathbb{R}$ ausgeführten Operationen der Addition und der Multiplikation mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{Q}$ bildet.

3) (7 Punkte) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

und sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto A \cdot x$. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(f)$. Geben Sie den Rang von $f$ an.

# 3. Übungstest

# Algebra und Diskrete Mathematik für Inf und WInf

## Gruppe E

TU Wien, Zoom, 24.1.2022 Arbeitszeit: 35 Minuten

---

1) (7 Punkte) Für $a, b \in \mathbb{Q}$ sei $a \circ b = a + b - ab$. Ist die algebraische Struktur $(\mathbb{Q} \setminus \{1\}, \circ)$ kommutativ? eine Halbgruppe? ein Monoid? eine Gruppe?

2) (7 Punkte) Ist die folgende Menge von Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3) (6 Punkte) Seien $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} cx_1 + d \\ cx_2 + d \end{pmatrix}$. Ist $f$ eine lineare Abbildung?

# 3. Übungstest

# Algebra und Diskrete Mathematik für Inf und WInf

## Gruppe F

TU Wien, Zoom, 24.1.2022 Arbeitszeit: 35 Minuten

---

1) (7 Punkte) Für $a, b \in \mathbb{Q}$ sei $a \circ b = a + b - ab$. Ist die algebraische Struktur $(\mathbb{Q} \setminus \{1\}, \circ)$ kommutativ? eine Halbgruppe? ein Monoid? eine Gruppe?

2) (7 Punkte) Ist die folgende Menge von Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3) (6 Punkte) Seien $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} cx_1 + d \\ cx_2 + d \end{pmatrix}$. Ist $f$ eine lineare Abbildung?