Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 2 (2022W)
Lösungsvorschlag

Aufgabe 2.1 Geben Sie jeweils eine kontextfreie Grammatik an, welche die folgenden Sprachen erzeugt.
Zeigen Sie jeweils auch die Kontextfreiheit von L mit Hilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger (indem Sie entsprechende Sprachen D_n und R sowie einen entsprechenden Homomorphismus h angeben).

a) $L = \{\underline{\mathtt{a}}^{3i}\underline{\mathtt{b}}^{j}\underline{\mathtt{c}}^{3j}\underline{\mathtt{d}}^{i} \mid i, j \geq 0\}$

b) $L = \{(\underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{b}})^{n}(\underline{\mathtt{0}}\,\underline{\mathtt{1}})^{k}(\underline{\mathtt{c}}\,\underline{\mathtt{d}})^{2n} \mid k, n \geq 0\}$

c) $L = \{\underline{\mathtt{0}}^{n}\underline{\mathtt{a}}^{k}\underline{\mathtt{1}}^{m} \mid k \geq 0, n \leq m\}$

d) $L = \{w\underline{\mathtt{c}}^{n} \mid w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^{*}, |w|_{\underline{\mathtt{a}}} = n \text{ oder } |w|_{\underline{\mathtt{b}}} = n\}$

Lösung

a) $G = (\{S, T\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}, \underline{\mathtt{d}}\}, \{S \to \underline{\mathtt{a}}^{3}S\underline{\mathtt{d}} \mid \underline{\mathtt{b}}T\underline{\mathtt{c}}^{3} \mid \varepsilon, \quad T \to \underline{\mathtt{b}}T\underline{\mathtt{c}}^{3} \mid \varepsilon\}, S\})$
Wir zeigen nun die Kontextfreiheit von L mit Hilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger:
$L = \{\underline{\mathtt{a}}^{3i}\underline{\mathtt{b}}^{j}\underline{\mathtt{c}}^{3j}\underline{\mathtt{d}}^{i} \mid i, j \geq 0\}$ ist kontextfrei, da $L = h(D_2 \cap R)$, wobei

$$R = \{\underline{[}_1\}^{*}\{\underline{[}_2\}^{*}\{\underline{]}_2\}^{*}\{\underline{]}_1\}^{*}$$

und

$$h : \{\underline{[}_1, \underline{]}_1, \underline{[}_2, \underline{]}_2\}^{*} \longrightarrow \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}, \underline{\mathtt{d}}\}^{*} \quad \text{mit} \quad h(\underline{[}_1) = \underline{\mathtt{a}}^{3}, h(\underline{]}_1) = \underline{\mathtt{d}}, h(\underline{[}_2) = \underline{\mathtt{b}}, h(\underline{]}_2) = \underline{\mathtt{c}}^{3}$$

b) $G = (\{S, T, A, B\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}, \underline{\mathtt{d}}, \underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}, P, S)$, wobei
$P = \{S \to ASBB \mid T, \quad T \to \underline{\mathtt{0}}\,\underline{\mathtt{1}}T \mid \varepsilon, \quad A \to \underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{b}}, \quad B \to \underline{\mathtt{c}}\,\underline{\mathtt{d}}\}$
Wir zeigen nun die Kontextfreiheit von L mit Hilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger:
$L = \{(\underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{b}})^{n}(\underline{\mathtt{0}}\,\underline{\mathtt{1}})^{k}(\underline{\mathtt{c}}\,\underline{\mathtt{d}})^{2n} \mid k, n \geq 0\}$ ist kontextfrei, da $L = h(D_2 \cap R)$, wobei

$$R = \{\underline{[}_1\}^{*}\{\underline{[}_2\}^{*}\{\underline{]}_2\}^{*}\{\underline{]}_1\}^{*}$$

und

$$h : \{\underline{[}_1, \underline{]}_1, \underline{[}_2, \underline{]}_2\}^{*} \longrightarrow \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}, \underline{\mathtt{d}}, \underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}^{*} \quad \text{mit} \quad h(\underline{[}_1) = \underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{b}}, h(\underline{]}_1) = \underline{\mathtt{c}}\,\underline{\mathtt{d}}\,\underline{\mathtt{c}}\,\underline{\mathtt{d}}, h(\underline{[}_2) = \underline{\mathtt{0}}\,\underline{\mathtt{1}}, h(\underline{]}_2) = \varepsilon$$

c) $G = (\{S, X\}, \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{1}}\}, \{S \to \underline{\mathtt{0}}S\underline{\mathtt{1}} \mid S\underline{\mathtt{1}} \mid X, \quad X \to \underline{\mathtt{a}}X \mid \varepsilon\}, S\})$
Wir zeigen nun die Kontextfreiheit von L mit Hilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger:
$L = \{\underline{\mathtt{0}}^{n}\underline{\mathtt{a}}^{k}\underline{\mathtt{1}}^{m} \mid k \geq 0, n \leq m\}$ ist kontextfrei, da $L = h(D_3 \cap R)$, wobei

$$R = \{\underline{(}\}^{*}\{\underline{[}\}^{*}\{\underline{\langle}\}^{*}\{\underline{\rangle}\}^{*}\{\underline{]}\}^{*}\{\underline{)}\}^{*}$$

und

$$h : \{\underline{[}, \underline{]}, \underline{(}, \underline{)}, \underline{\langle}, \underline{\rangle}\}^{*} \longrightarrow \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}^{*} \text{ mit}$$

$h(\underline{(}) = \underline{\mathtt{0}}, \quad h(\underline{[}) = \varepsilon, \quad h(\underline{\langle}) = \underline{\mathtt{a}}, \quad h(\underline{\rangle}) = \varepsilon, \quad h(\underline{)}) = h(\underline{]}) = \underline{\mathtt{1}}$

d) $G = (\{S, A, B\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}, \{S \to A \mid B, A \to \underline{\mathtt{a}}A\underline{\mathtt{c}} \mid \underline{\mathtt{b}}A \mid \varepsilon, B \to \underline{\mathtt{b}}B\underline{\mathtt{c}} \mid \underline{\mathtt{a}}B \mid \varepsilon\}, S\})$

Wir zeigen nun die Kontextfreiheit von L mit Hilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger:

$L = \{w\underline{\mathtt{c}}^n \mid w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*, |w|_{\underline{\mathtt{a}}} = n \text{ oder } |w|_{\underline{\mathtt{b}}} = n\}$ ist kontextfrei, da $L = h(D_4 \cap R)$, wobei

$$R = \{\underline{(}_1, \underline{(}_2\}^*\{\underline{)}_1, \underline{)}_2\}^* \cup \{\underline{(}_3, \underline{(}_4\}^*\{\underline{)}_3, \underline{)}_4\}^*$$

und

$$h : \{\underline{(}_1, \underline{)}_1, \underline{(}_2, \underline{)}_2, \underline{(}_3, \underline{)}_3, \underline{(}_4, \underline{)}_4, \}^* \longrightarrow \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^* \quad \text{mit}$$

$$h(\underline{(}_1) = h(\underline{(}_3) = \underline{\mathtt{a}}, \quad h(\underline{(}_2) = h(\underline{(}_4) = \underline{\mathtt{b}}, \quad h(\underline{)}_1) = h(\underline{)}_4) = \underline{\mathtt{c}}, \quad h(\underline{)}_2) = h(\underline{)}_3) = \varepsilon$$

Aufgabe 2.2 Geben Sie für jede der folgenden Grammatiken an, ob diese regulär, kontextfrei, monoton, und/oder kontextsensitiv ist. Geben Sie weiters an, welche Sprache von der jeweils angegebenen Grammatik erzeugt wird, und ob diese regulär, kontextfrei, kontextsensitiv und/oder rekursiv aufzählbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Beispiel:

Sei $G_{BSP} = (\{S\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, \{S \to Saa \mid a \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}\} \cup \{S \to \varepsilon\}, S)$.

G_{BSP} ist kontextfrei. Wegen z.B. der Produktion $S \to S\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}$ ist G_{BSP} nicht regulär, und wegen $S \to \varepsilon$ nicht monoton und auch nicht kontextsensitiv, nachdem S auch auf der rechten Seite von Produktionen vorkommt.

$\mathcal{L}(G_{BSP}) = (\{\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\}^* \cup \{\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\}^*)^*$ ist aber regulär, und damit auch kontextfrei, kontextsensitiv und rekursiv aufzählbar.

a) $G_1 = (\{S, A, B\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, \{S \to AB, \quad \underline{\mathtt{a}}B \to \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}} \mid \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}, \quad A \to \underline{\mathtt{a}}\}, S)$

b) $G_2 = (\{S\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, \{S \to \underline{\mathtt{a}}S \mid \underline{\mathtt{b}}S \mid S\underline{\mathtt{a}} \mid S\underline{\mathtt{b}}\}, S)$

c) $G_3 = (\{S, A, B, C\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, \{S \to ACB, A \to \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}A \mid \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}, \quad B \to \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}B \mid \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}, \quad C\underline{\mathtt{a}} \to \underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}\}, S)$

d) $G_4 = (\{S\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}, \{S \to \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{c}}S \mid \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{c}}\} \cup \{xy \to yx \mid x, y \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}\}, S)$

e) $G_5 = (\{A, B\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \{A \to \underline{0}B \mid \underline{1}, B \to A\underline{1}\}, A)$

Lösung

a) G_1 ist eine monotone und auch kontextsensitive Grammatik. Wegen z.B. $S \to AB$ ist G_1 nicht regulär, wegen z.B. $\underline{\mathtt{a}}B \to \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}$ ist G_1 auch nicht kontextfrei.

$\mathcal{L}(G_1) = \{\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\}$ ist endlich, also sicher regulär, und somit auch eine kontextfreie, kontextsensitive und rekursiv aufzählbare Sprache.

b) G_2 ist kontextfrei, monoton, und kontextsensitiv, aber nicht regulär (wegen z.B. $S \to S\underline{\mathtt{a}}$).

$\mathcal{L}(G_2) = \{\}$ ist aber regulär, und damit, aufgrund der Chomsky Hierarchie auch kontextfrei, kontextsensitiv und rekursiv aufzählbar.

c) G_3 ist monoton und kontextsensitiv. Wegen z.B. der Produktion $S \to ACB$ ist G_3 nicht regulär, wegen $C\underline{\mathtt{a}} \to \underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}$ nicht kontextfrei. $\mathcal{L}(G_3) = \{\underline{\mathtt{a}}^{2i}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}^{3j} \mid i, j \geq 1\}$ ist aber regulär, und damit auch kontextfrei, kontextsensitiv und rekursiv aufzählbar.

d) G_4 ist monoton. Wegen z.B. der Produktion $S \to \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{c}}S$ ist G_4 nicht regulär, wegen z.B. $\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}} \to \underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}$ ist G_4 weder kontextfrei noch kontextsensitiv. $\mathcal{L}(G_4) = \{w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^+ \mid |w|_{\underline{\mathtt{a}}} = |w|_{\underline{\mathtt{b}}} = |w|_{\underline{\mathtt{c}}}\}$ ist kontextsensitiv und damit auch rekursiv und rekursiv aufzählbar, aber keinesfalls regulär oder kontextfrei.

e) G_5 ist kontextfrei, kontextsensitiv und monoton, aber nicht regulär, da in den rechten Seiten der Produktionen das Terminalsymbol sowohl links wie auch rechts des Nonterminals vorkommt. $\mathcal{L}(G_5) = \{\underline{0}^n\underline{1}^{n+1} \mid n \geq 0\}$ ist ebenfalls kontextfrei, kontextsensitiv und rekursiv aufzählbar, aber sicher nicht regulär.

Aufgabe 2.3 Beweisen Sie mittels entsprechender Abschlusseigenschaften, dass die jeweils gegebene Sprache L nicht kontextfrei ist. (Sie können dabei davon ausgehen, dass eine Sprache der Form $\{\underline{0}^{kn}\underline{1}^{ln}\underline{2}^{mn} \mid n \geq 1\}$ für beliebige (von Ihnen frei wählbare) Konstanten $k, l, m > 0$ als nicht kontextfrei bekannt ist.)

a) $L = \{\underline{a}^{2n}\underline{b}^{3n}\underline{c}^{337k}\underline{d}^{m} \mid k, n, m \geq 0\} \cap \{\underline{a}^{k}\underline{b}^{m}\underline{c}^{6n}\underline{d}^{2m} \mid k, n, m \geq 0\}$

(*Hinweis*: Bestimmen Sie zunächst L.)

b) $L = \{w\underline{c}u\underline{c}w^r \mid u, w \in \{\underline{a}, \underline{b}\}^+, |u| = |w|\}$

(*Hinweis*: w^r bezeichnet das Spiegelbild von w.)

Lösung

a) Wir überlegen zunächst, dass $L = \{\underline{a}^{2n}\underline{b}^{3n}\underline{c}^{2022k}\underline{d}^{6n} \mid k, n \geq 0\}$ ist und beweisen nun, dass L nicht kontextfrei ist:

Beweis indirekt. Angenommen, $L = \{\underline{a}^{2n}\underline{b}^{3n}\underline{c}^{2022k}\underline{d}^{6n} \mid n, k \geq 0\}$ ist kontextfrei. Sei dann $h : \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}\}^* \longrightarrow \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}\}^*$ ein Homomorphismus mit

$h(\underline{a}) = \underline{0}$, $h(\underline{b}) = \underline{1}$, $h(\underline{c}) = \varepsilon$, $h(\underline{d}) = \underline{2}$.

Da die Familie der kontextfreien Sprachen gegenüber beliebigen Homomorphismen abgeschlossen ist, müsste auch $h(L) = \{\underline{0}^{2n}\underline{1}^{3n}\underline{2}^{6n} \mid n \geq 0\}$ kontextfrei sein, was aber nicht der Fall ist. Widerspruch! Somit kann auch L nicht kontextfrei sein.

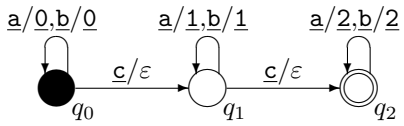
b) $L = \{w\underline{c}u\underline{c}w^r \mid u, w \in \{\underline{a}, \underline{b}\}^+, |u| = |w|\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis indirekt. Angenommen, die Sprache $L = \{w\underline{c}u\underline{c}w^r \mid u, w \in \{\underline{a}, \underline{b}\}^+, |u| = |w|\}$ ist kontextfrei. Sei dann

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}, \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}\}, \delta, q_0, \{q_2\})$$

die (deterministische) *gsm* mit

$\delta(q_0, \underline{a}) = (q_0, \underline{0})$, $\delta(q_0, \underline{b}) = (q_0, \underline{0})$, $\delta(q_0, \underline{c}) = (q_1, \varepsilon)$,
$\delta(q_1, \underline{a}) = (q_1, \underline{1})$, $\delta(q_1, \underline{b}) = (q_1, \underline{1})$, $\delta(q_1, \underline{c}) = (q_2, \varepsilon)$,
$\delta(q_2, \underline{a}) = \delta(q_2, \underline{b}) = (q_2, \underline{2})$.



Da die Familie der kontextfreien Sprachen gegenüber beliebigen gsm-Abbildungen abgeschlossen ist, müsste auch $M(L) = \{\underline{0}^n\underline{1}^n\underline{2}^n \mid n \geq 1\}$ kontextfrei sein, was aber nicht der Fall ist. Widerspruch! Somit kann auch L nicht kontextfrei sein.

Aufgabe 2.4 Sind folgende Aussagen korrekt? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Die Vereinigung unendlich vieler regulärer Sprachen ist wiederum eine reguläre Sprache.

b) $L = \{\underline{a}^n\underline{b}^n\underline{c}^n \mid n \geq 0\}$ ist regulär, da L die Konkatenation der drei regulären Sprachen $\{\underline{a}^n \mid n \geq 0\}$, $\{\underline{b}^n \mid n \geq 0\}$, und $\{\underline{c}^n \mid n \geq 0\}$ ist.

c) Es gibt rekursiv aufzählbare Sprachen über $\Sigma = \{\underline{0}, \underline{1}\}$, deren Komplement endlich ist.

d) Die Grammatik $G = (\{A\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \{A \to AA \mid \underline{0} \mid \underline{1}\}, A)$ ist mehrdeutig.

e) Sei A eine Sprache über $\{\underline{0}, \underline{1}\}$ und $B = A \cap \{\underline{1}\}^*$. Dann gilt: Ist B regulär, so ist auch A regulär.

f) Es gibt kontextfreie Sprachen, deren Komplement nicht rekursiv aufzählbar ist.

Lösung

a) **Falsch.** Sei $L = \{\varepsilon\} \cup \{\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\} \cup \{\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\} \cup \{\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\} \cup \ldots$. Jede dieser Sprachen ist endlich und damit regulär, die unendliche Vereinigung ergibt aber die Sprache $L = \{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^n \mid n \geq 0\}$, welche kontextfrei, aber nicht regulär ist.

b) **Falsch.** Die Konkatenation der drei regulären Sprachen ergibt $\{\underline{\mathtt{a}}\}^*\{\underline{\mathtt{b}}\}^*\{\underline{\mathtt{c}}\}^*$, was nicht gleich $L = \{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^n\underline{\mathtt{c}}^n \mid n \geq 0\}$. ($L$ ist bekanntermaßen nicht einmal kontextfrei.)

c) **Richtig.** Beispielsweise hat die reguläre (und damit rekursiv aufzählbare) Sprache $L = \{\underline{0}, \underline{1}\}^+$ mit $\overline{L} = \{\varepsilon\}$ ein endliches Komplement.

d) **Richtig.** G ist mehrdeutig, da es z.B. für das Wort $\underline{1}\underline{1}\underline{1}$ zwei verschiedene Linksableitungen gibt:
$A \to AA \to \underline{1}A \to \underline{1}AA \to \underline{1}\underline{1}A \to \underline{1}\underline{1}\underline{1}$ bzw.
$A \to AA \to AAA \to \underline{1}AA \to \underline{1}\underline{1}A \to \underline{1}\underline{1}\underline{1}$

(*Anmerkung*: Die von G erzeugte Sprache $L(G) = \{\underline{0}, \underline{1}\}^+$ ist aber nicht mehrdeutig, da sie z.B. von folgender eindeutiger Grammatik G' erzeugt wird:
$G' = (\{A\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \{A \to \underline{0}A \mid \underline{1}A \mid \underline{0} \mid \underline{1}\}, A)$)

e) **Falsch.** Sei beispielsweise $A = \{\underline{0}^n\underline{1}^n \mid n \geq 0\}$, dann ist B regulär, da $A \cap \{\underline{1}\}^* = \{\varepsilon\}$. A selbst ist aber keinesfalls regulär.

f) **Falsch.** Zwar sind kontextfreie Sprachen nicht unter Komplement abgeschlossen, kontextsensitive (wie auch entscheidbare) aber sehr wohl. Nachdem $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_{rec} \subset \mathcal{L}_0$, ist also das Komplement einer kontextfreien Sprache jedenfalls kontextsensitiv und damit auch entscheidbar und rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 2.5 Sei $A \leq_p B$ (wobei A und B in **NP** sein können, aber nicht müssen). Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie

- *jedenfalls* zutrifft (unabhängig davon, um welche Probleme es sich bei A und B handelt, und auch unabhängig von (noch) unbewiesenen Beziehungen zwischen Komplexitätsklassen)
- *vielleicht* zutrifft (je nach dem worum es sich bei A und B handelt, und/oder abhängig von der Lösung bisher unbewiesener Beziehungen zwischen Komplexitätsklassen)
- *keinesfalls* zutrifft (unabhängig davon, um welche Probleme es sich bei A und B handelt, und auch unabhängig von (noch) unbewiesenen Beziehungen zwischen Komplexitätsklassen)

Begründen Sie Ihre jeweilige Antwort.

a) Wenn A **NP**-vollständig ist, so ist auch B **NP**-vollständig.

b) Wenn B **NP**-vollständig ist, dann ist A entscheidbar.

c) Wenn B in **P** ist, dann ist das Komplement von A nicht in **P**.

d) Nachdem $A \leq_p B$ gilt auch $\overline{A} \leq_p \overline{B}$.

e) Wenn das Komplement von B endlich ist, dann ist $A \in$ **NP**.

f) Wenn A **NP**-vollständig ist, dann ist das Komplement von B in **P**.

Lösung

a) **Vielleicht**. Damit diese Aussage zutrifft, muss B in **NP** liegen. B kann aber auch durchaus schwieriger sein, also selbst nicht in **NP** liegen.

b) **Jedenfalls**. Wenn B **NP**-vollständig ist, so kann A keinesfalls außerhalb von **NP** liegen, da $A \leq_p B$. Jedes Problem in **NP** ist entscheidbar (Definition), die Komplexitätsklasse **NP** ist eine echte Teilmenge der entscheidbaren Sprachen.

c) **Keinesfalls**. Die Komplexitätsklasse **P** ist unter Komplement abgeschlossen. Und da A aufgrund der Reduktion in **P** liegt, muss auch $\overline{A} \in \mathbf{P}$ gelten.

d) **Jedenfalls.** Nachdem $A \leq_p B$ gibt es eine Reduktionsfunktion f, welche in polynomieller Zeit berechenbar ist. Daher gilt: $w \in A$ genau dann wenn $f(w) \in B$. Das ist aber äquivalent zu $w \notin A$ genau dann wenn $f(w) \notin B$. Es gilt also auch $\overline{A} \leq_p \overline{B}$.

e) **Jedenfalls.** Wenn das Komplement von B endlich ist, dann ist B regulär. Somit gilt sicher $B \in \mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$, da die regulären Sprachen eine Teilmenge von **P** bzw. **NP** sind. Dann muss aber, nachdem $A \leq_p B$, auch $A \in \mathbf{NP}$ gelten.

f) **Vielleicht.** Da $A \leq_p B$ und A **NP**-vollständig ist, müsste B mindestens auch **NP**-vollständig sein. Damit das Komplement von B aber dann auch in **P** liegt, müsste $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ gelten, was (noch) nicht bewiesen oder widerlegt ist.