Lösung von Aufgabe 298

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|}{|x|^3 + |y|}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Wir unterscheiden Fälle:

Fall 1: $\alpha = \beta = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t) = \lim\limits_{t \to 0} f(0,0) = f(0,0) = 1$

Fall 2: $(\alpha, \beta) \neq (0,0) \Longrightarrow \lim\limits_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t) =$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{|\beta t|}{|\alpha t|^3 + |\beta t|} = \lim_{t\to 0} \frac{|\beta| \cdot |t|}{|\alpha|^3 \cdot |t|^3 + |\beta| \cdot |t|} =$$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{|\beta|}{|\alpha|^3 \cdot t^2 + |\beta|}$. Wir unterscheiden 2 Fälle:

Fall 2a: $\beta = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t) = \lim\limits_{t\to 0} 0 = 0$

Fall 2b: $\beta \neq 0 \Longrightarrow \lim\limits_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t) = \dfrac{|\beta|}{|\beta|} = 1$

Wäre $f(x,y)$ an $(0,0)$ stetig, so müsste in allen Fällen derselbe Grenzwert herauskommen. Also ist $f(x,y)$ an der Stelle $(0,0)$ unstetig.