3. UE Analysis I f. INF und WINF

$\boxed{76}$ Es gilt $\forall n \geq 1$: $\dfrac{2n^2+1}{n^4+2} \leq \dfrac{3n^2}{n^4} = \dfrac{3}{n^2}$, und

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent (Buch 4.48) $\Longrightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^4+2} \text{ ist konvergent.}$$

$\boxed{82}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist alternierend.

Wir wenden daher 4.41 (Leibniz) aus dem Buch an.

(i) $0 \leq a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2}} = \dfrac{1}{n} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

(ii) Offensichtlich ist (a_n) monoton fallend.

$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2}}$ ist konvergent.

$a_n \geq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n^2}} = \dfrac{1}{n\sqrt{3}}$, $\forall n \geq 1$, und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{3}}$ ist divergent $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent $\Longrightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2}} \text{ ist \underline{nicht} absolut konvergent.}$$

$\boxed{91}$ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (a_{n+1} + a_n)$ hat die Partialsumme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (a_{k+1} + a_k) = a_0 + (-1)^n a_{n+1} \quad \text{(Teleskopsumme).}$$

Beweis durch Induktion: $n=0$: $S_0 = (-1)^0 (a_1 + a_0) = a_0 + a_1$.

$n \to n+1$: $S_{n+1} = S_n + (-1)^{n+1} (a_{n+2} + a_{n+1}) =$

$= a_0 + \cancel{(-1)^n a_{n+1}} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cancel{(-1)^{n+1} a_{n+1}} =$

$= a_0 + (-1)^{n+1} a_{n+2}.$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} (-1)^n a_{n+1} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = a_0$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (a_{n+1} + a_n) = a_0.$$

93 Wir wenden das Quotientenkriterium in Limesform an. (Buch 4.53)

$$|a_n| = \binom{2n}{n}|x|^n = \frac{(2n)!}{n!\,n!}|x|^n \Longrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}|x|^{n+1}}{\frac{(2n)!}{n!\,n!}|x|^n} = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} =$$

$$= |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 4|x|.$$

$4|x|<1 \Longleftrightarrow |x|<\frac{1}{4}$. Also ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$ für $|x|<\frac{1}{4}$ absolut konvergent (und für $|x|>\frac{1}{4}$ divergent; der Fall $|x|=\frac{1}{4}$ erfordert zusätzliche Untersuchung).

101 Definitionen und Vorbemerkungen: $a_n = O(b_n) \Longleftrightarrow \exists c>0: \left|\frac{a_n}{b_n}\right|\le c$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$. $a_n=\Omega(b_n)\Longleftrightarrow b_n=O(a_n)$.

$a_n\,\Theta\,b_n \Longleftrightarrow a_n=O(b_n)$ und $b_n=O(a_n)$.

$a_n=o(b_n)\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$. $a_n\sim b_n \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$.

Folgerungen: (i) $\exists \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\in\mathbb{R} \Longrightarrow a_n=O(b_n)$.

(ii) $a_n=o(b_n)\Longrightarrow a_n=O(b_n)$, $a_n\sim b_n\Longrightarrow a_n=O(b_n)$,
$a_n\sim b_n \Longrightarrow b_n\sim a_n$.

$a_n=\frac{2}{n}$, $b_n=\frac{1}{n^2}$, $c_n=\frac{8n^2}{4n^3+1}$ $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3+2}{8n^3}=1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+1}{8n^4}=0$.

$\Longrightarrow b_n=o(a_n)$, $a_n\sim c_n$, $b_n=o(c_n)$.

106 Vorbemerkung: $a_n\sim b_n$ und $c_n\sim d_n \Longrightarrow a_nc_n\sim b_nd_n$ und $a_n/c_n\sim b_n/d_n$.

$$\binom{3n}{n}=\frac{(3n)!}{n!\,(2n)!} \overset{\text{(Stirling)}}{\sim} \frac{(3n)^{3n}e^{-3n}\cdot\sqrt{2\pi\cdot 3n}}{n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}\cdot(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi\cdot 2n}} =$$

$$= \frac{3^{3n}\cdot n^{3n}\cdot\sqrt{6\pi n}}{2^{2n}\cdot n^n\cdot n^{2n}\cdot\sqrt{4\pi^2\cdot 2n^2}} = \frac{27^n}{4^n}\cdot\sqrt{\frac{6\pi n}{8\pi^2n^2}} = \left(\frac{27}{4}\right)^n\cdot\sqrt{\frac{3}{4\pi n}}.$$