

Übungszettel 3

Wahrscheinlichkeitstheorie und stochastische Prozesse (WS 2024)

Kapitel 4 im Buch

1) Ein Frosch springt auf dem Graph \mathbb{Z}^2 wie folgt: Zum Zeitpunkt 0 befindet er sich am Ursprung, das heißt auf Position $(0, 0)$. Dann springt er zu einem der vier Punkte von \mathbb{Z}^2 , die Abstand 1 vom Ursprung haben, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/4$. Es sei $X = (X_1, X_2)$ die Position nach dem Sprung, wobei X_1 die x-Koordinate und X_2 die y-Koordinate ist. Sind X_1 und X_2 unabhängig? Nimm stattdessen an, dass er zu einem der vier Punkte mit Abstand $\sqrt{2}$ vom Ursprung springt, wieder mit Wahrscheinlichkeit je $1/4$. Es sei wieder $X = (X_1, X_2)$ die Position nach dem Sprung. Sind nun X_1 und X_2 unabhängig?

2) Sei X eine Zufallsvariable die unabhängig von sich selbst ist. Was können wir über die Verteilung von X sagen? Außerdem sei Y eine Zufallsvariable die unabhängig von Y^2 ist. Was können wir über die Verteilung von Y sagen?

3) Eine Zufallsvariable X mit $X(\Omega) = \mathbb{N}$ heißt gedächtnislos falls für jedes $n, m \in \mathbb{N}$, es gilt

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \mathbb{P}(X \geq n + m \mid X \geq m).$$

Zeige dass jede geometrisch-verteilte Zufallsvariable ist gedächtnislos.

4) Sei X mit $X(\Omega) = \mathbb{N}$ eine gedächtnislose Zufallsvariable. Zeige, dass es $p \in [0, 1]$ gibt, sodass X geometrisch-verteilt mit Parameter p ist.

5) Gib ein Beispiel eines Zufallsvektors (X, Y) mit

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$

sodass X^2 und Y^2 unabhängig, und außerdem X und Y *nicht* unabhängig sind.

6) Man wirft zweimal einen 3-seitigen Würfel, dessen Seiten von 1 bis 3 nummeriert sind. Sei X (bzw. Y) die Augenzahl des ersten (bzw. zweiten) Wurfes, und seien $m = \min(X, Y)$ und $M = \max(X, Y)$. Berechne die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von $(X + Y, m \times M)$. Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion von X gegeben $M = 2$? Sind die Zufallsvariablen $\mathbf{1}_{\{X=m\}}$ (die Indikatorfunktion des Ereignisses $\{X = m\}$) und M unabhängig?