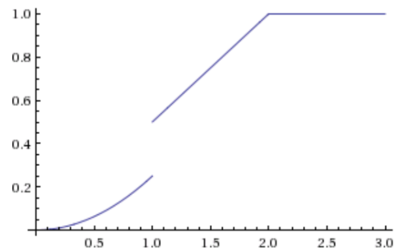
2. Übung - Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse

Felix Knorr (1325541) - e1325541@student.tuwien.ac.at

30. Oktober 2014

1. Gegeben ist die Funktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x^2/4 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ x/2 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$



- Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.
  - $0 \leq F(x) \leq 1 \longrightarrow$ Erfüllt
  - F monoton nicht fallend $\longrightarrow$ Erfüllt
  - $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \longrightarrow$ Erfüllt
  - $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1 \longrightarrow$ Erfüllt
  - F rechtstetig $\longrightarrow$ Erfüllt
- X sei nach F verteilt. Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X < 1)$, $\mathbb{P}(X \leq 1)$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$
  - $\mathbb{P}(X < 1) = F_X(1 - 0) = 0.25$
  - $\mathbb{P}(X \leq 1) = F_X(1) = 0.5$
  - $\mathbb{P}(X = 0) = F_X(0) - F_X(0 - 0) = 0$
  - $\mathbb{P}(X = 1) = F_X(1) - F_X(1 - 0) = 0.5 - 0.25 = 0.25$
  - $\mathbb{P}(X = 2) = F_X(2) - F_X(2 - 0) = 0$

2. (Fortsetzung)

- Ist die Verteilung von X diskret, stetig, oder gemischt?
  - Gemischt
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und/oder die Dichtefunktion
  - $p_X(x) = \begin{cases} 0.25 & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - $f_X(x) = \begin{cases} x/2 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - Probe: $0.25 + \int_0^1 x/2 \; dx + \int_1^2 1/2 \; dx = 0.25 + 0.25 + 0.5 = 1$
- Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X)$
  - $\mathbb{E}(X) = \sum_a a \cdot p_X(a) + \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot f_X(u) \; du = 1 \cdot 1/4 + \int_0^1 x \cdot \frac{x}{2} \; dx + \int_1^2 x \cdot \frac{1}{2} \; dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{7}{6}$

3. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Zeigen Sie, dass f eine Dichtefunktion ist.
  - Fläche unter der Kurve muss 1 sein
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \; dx = \int_0^{\infty} 2e^{-2x} = 2 \cdot \frac{1}{-2} \cdot e^{-2x}\Big|_0^{\infty} = -e^{-2x}\Big|_0^{\infty} = -e^{-\infty} + e^0 = 1$

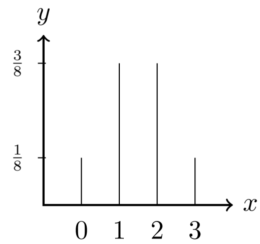
- Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion
  - $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\ dx = -e^{-2x}\Big|_0^x = 1 - e^{-2x}$
- Bestimmen Sie den Erwartungswert.
  - $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot f_X(u)\ du = \int_0^{\infty} u \cdot (2e^{-2u}) = 2 \cdot e^{-2x}\left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)\Big|_0^{\infty} = 0.5$

4. Eine faire Münze wird dreimal geworfen, X sei die Summe der Augenzahlen. Bestimmen Sie die Verteilung und den Erwartungswert von X.

   Insgesamt gibt es 2^3 Möglichkeiten (Von 000 bis 111)

   Wahrscheinlichkeitsfunktion:

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$



$$\mathbb{E}(x) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1.5$$

5. Eine Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal "Kopf" erscheint, X sei die Anzahl der Würfe. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

   - $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$
   - $\mathbb{E}(x) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot \dfrac{1}{2^1} + 2 \cdot \dfrac{1}{2^2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \dfrac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{k}{2^k} \longrightarrow 2$

6. Die Ereignisse A und B sind unabhängig. Zeigen Sie, dass dann auch A und B^C bzw. A^C und B^C unabhängig sind.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B^C) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\
&= \mathbb{P}(A)[\underbrace{1 - \mathbb{P}(B)}] \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^C)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A^C \cap B^C) &= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) \\
&= 1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) \\
&= 1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)) \\
&= (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)) \\
&= \mathbb{P}(A^C)\mathbb{P}(B^C)
\end{aligned}$$

7. X sei auf $[-1, 1]$ stetig gleichverteilt (d.h.

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{für } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   Bestimmen Sie die Dichte von e^x und x^2.

$$g(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad g^{-1}(y) = \ln(y) \quad \Rightarrow \quad g'(g^{-1}(y)) = e^{\ln(y)} = y$$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|} = f_X(\ln(y)) \cdot \frac{1}{y} = \begin{cases} \dfrac{1}{2y} & \text{für } \dfrac{1}{e} < x \le e \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$-1 \le \ln(x) \le 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{e} < y \le e$

Probe: $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{2y}\ dy = 1$

$$g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad g^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad g'(g^{-1}(y)) = 2\sqrt{y}$$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|} = f_X(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}} & \text{für } 0 < y <= 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$-1 \le \sqrt{x} \le 1 \quad \Rightarrow \quad (2\times) 0 \le y \le 1$

Probe: $2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{4\sqrt{y}}\ dy = 1$