2) Wie viele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 1000$ gibt es, die durch 3 und 5, aber weder durch 7 noch durch 9 teilbar sind?

(7 Punkte)

Es gilt $3 \mid n$ und $5 \mid n \iff kgV(3,5) = 15 \mid n$.

Also gibt es $\left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 66$ Zahlen $1 \leq n \leq 1000$, welche durch 3 und 5 teilbar sind.

Davon sind wegen $kgV(3,5,7) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$

$\left\lfloor \frac{1000}{105} \right\rfloor = 9$ durch 3, 5 und 7 teilbar

und wegen $kgV(3,5,9) = 5 \cdot 9 = 45$

$\left\lfloor \frac{1000}{45} \right\rfloor = 22$ durch 3, 5 und 9 teilbar.

Schließlich sind wegen $kgV(3,5,7,9) =$
$= 5 \cdot 7 \cdot 9 = 35 \cdot 9 = 315$

$\left\lfloor \frac{1000}{315} \right\rfloor = 3$ Zahlen $1 \leq n \leq 1000$ durch 3, 5, 7 und 9 teilbar.

Nach dem <u>Inklusions-Exklusions-Prinzip</u> ist die gesuchte Anzahl

$66 - 9 - 22 + 3 = 69 - 31 = \underline{\underline{38}}.$

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Ein Eisenbahnzug (ohne Lok) besteht aus 2 Schlafwägen, 3 Sitzwägen, 1 Speisewagen, 2 Liegewägen und 1 Autowagen. Auf wie viele Arten kann man den Zug zusammenstellen, wenn

(a) (2 Punkte) der Autowagen am Rand stehen muss?

(b) (2 Punkte) der Autowagen am Rand stehen muss und die Abfolge Schlafwagen-Speisewagen-Schlafwagen vorkommen soll?

(c) (2 Punkte) der Autowagen am Rand stehen muss und die Abfolgen Schlafwagen-Speisewagen-Schlafwagen und Schlafwagen-Liegewagen-Sitzwagen vorkommen soll?

Erklären Sie, wie Sie zu Ihren Lösungen kommen.

Hinweis:

$$\frac{9!}{3!2!2!} = 15120 \qquad \frac{9!}{4!3!2!} = 1260 \qquad \frac{9!}{3!3!2!} = 5040 \qquad \frac{9!}{3!3!3!} = 1680$$

$$\frac{8!}{2!2!2!} = 5040 \qquad \frac{8!}{3!2!2!} = 1680 \qquad \frac{8!}{4!2!2!} = 420 \qquad \frac{8!}{3!3!2!} = 560$$

Lösung: Wir verwenden folgende Abkürzungen:
S = Schlafwagen, Si = Sitzwagen, Sp = Speisewagen,
L = Liegewagen, A = Autowagen

(a) Die gesuchten Zusammenstellungen sind Permutationen der Multimenge

$$\{S, S, Si, Si, Si, Sp, L, L\},$$

wobei der Autowagen A jeweils vorne oder hinten angehängt werden kann.

Die Anzahl der genannten Permutationen ist

$$\frac{8!}{2!\,3!\,2!} = 1680,$$

also die der genannten Zusammenstellungen

$$2 \cdot 1680 = \underline{\underline{3360.}}$$

(b) Analog zu (a) mit der neuen Multimenge:

$$\{(S\,Sp\,S), Si, Si, Si, L, L\},$$

wobei $(S\,Sp\,S)$ als <u>ein</u> Element aufzufassen ist.

Anzahl der Permutationen: $\frac{6!}{3!\,2!} = 60,$

Anzahl der Zusammenstellungen: $2 \cdot 60 = \underline{\underline{120.}}$

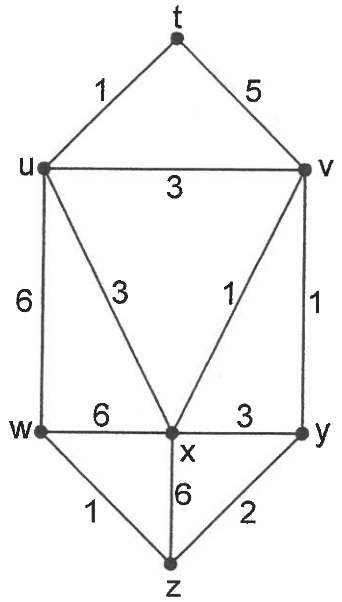
(c) Analog zu (a) und (b).

Multimenge: $\{(S\,Sp\,S\,L\,Si), Si, Si, L\},$

Anzahl der Permutationen: $\frac{4!}{2!} = 12,$

Anzahl der Zusammenstellungen: $2 \cdot 12 = \underline{\underline{24.}}$

(2) [7 Punkte] Gegeben sei der folgende ungerichtete kantenbewertete Graph G:

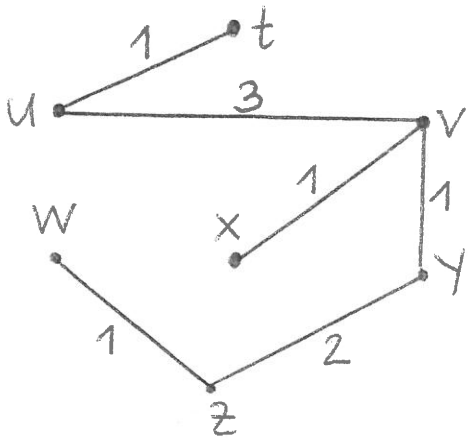


Man bestimme für G mit dem Algorithmus von Dijkstra die kürzesten Wege und ihre Längen von allen Knoten zum Knoten z. Geben Sie dabei bitte unbedingt die Ergebnisse der Iterationsschritte des Dijkstra-Algorithmus in einer Tabelle an.

Lösung: Der Dijkstra-Algorithmus liefert folgende Tabelle:

z	y	x	w	v	u	t	Auswahl	Vorgänger
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	z	—
	2	6	$\boxed{1}$	∞	∞	∞	w	z
	$\boxed{2}$	6		∞	7	∞	y	z
		5		$\boxed{3}$	7	∞	v	y
		$\boxed{4}$			6	8	x	v
					$\boxed{6}$	8	u	v
						$\boxed{7}$	t	u

Aus der Tabelle ergibt sich der „Entfernungsbaum":



Aus diesem liest man (ebenso wie aus der Tabelle) die kürzesten Wege (und Längen) von allen Knoten zum Knoten z ab.