“ADM” - UE-Test 3 - Gruppe R

Name: Matrikelnummer:

(1) [6 Punkte] Wir betrachten die Menge $\mathbb{Z}_8$ der Restklassen modulo 8 zusammen mit den Operationen $+$ und $\cdot$.

(a) Man gebe die von $\overline{2}$ erzeugte Untergruppe in der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}_8, +)$ an, also $U = \langle \overline{2} \rangle$.

(b) Welche Elemente in der multiplikativen Halbgruppe $(\mathbb{Z}_8, \cdot)$ besitzen ein (multiplikatives) Inverses? (Anmerkung: es ist nicht notwendig, die Inversen zu bestimmen.)

(c) Der Ring $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ ist kein Integritätsring. Man gebe ein Paar von Nullteilern $a, b \in \mathbb{Z}_8$ an, sodass $a \cdot b = \overline{0}$.

(2) [7 Punkte] Gegeben seien zwei Permutationen $\pi, \rho \in S_6$ in der symmetrischen Gruppe $(S_6, \circ)$ mittels Zyklendarstellung bzw. zweizeiliger Darstellung:

$$\pi = (135)(246), \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Man gebe π in zweizeiliger Darstellung sowie ρ in Zyklendarstellung an.

(b) Man bestimme π^{-1} (in einer beliebigen Darstellung).

(c) Man bestimme $\rho \circ \pi^{-1}$ sowie das Vorzeichen $\operatorname{sgn}(\rho \circ \pi^{-1})$, wobei unbedingt angegeben werden muss, wie das Vorzeichen bestimmt wurde.

(3) [7 Punkte] Wir betrachten zwei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ sowie die aus diesen Vektoren gebildete Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ a \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Für welchen Wert $a \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ linear abhängig?

(b) Im folgenden sei a jener Wert, der in Punkt (a) bestimmt wurde. Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit A als Abbildungsmatrix bezüglich der kanonischen Basis, also:

$$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}, \qquad f\left(\tbinom{1}{0}\right) = \vec{v}_1, \quad f\left(\tbinom{0}{1}\right) = \vec{v}_2.$$

Man bestimme den Kern $\ker f$ der Abbildung f sowie dessen Dimension $\operatorname{def} f = \dim \ker f$.