1.) Man berechne die ersten 4 Ableitungen der Funktion $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \neq 1$, und gebe einen Ausdruck für die n-te Ableitung an.

(7 Punkte)

Lösung:

$$f'(x) = \frac{(x-1)\cdot 1 - (x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = (-2)(x-1)^{-2}$$

$$f''(x) = (-2)(-2)(x-1)^{-3} = \frac{2\cdot 2}{(x-1)^3}$$

$$f'''(x) = (-2)(-2)(-3)(x-1)^{-4} = \frac{-2\cdot 2\cdot 3}{(x-1)^4}$$

$$f^{IV}(x) = (-2)(-2)(-3)(-4)(x-1)^{-5} = \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(x-1)^5}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 2 \cdot n!\,(x-1)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}, \quad n \geq$$

Beweis durch Induktion:

$n=1$: $\quad f'(x) = (-1)^1 \cdot 2 \cdot 1!\,(x-1)^{-2}$

$n \to n+1$: $\quad f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \cdot 2 \cdot n!\,(-1)(n+1)(x-1)$

$$= (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot (n+1)!\,(x-1)^{-(n+1+1)}$$

$\square$

2.) Man zeige, dass die folgende Potenzreihe im angegebenen Bereich konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n, \quad |x| < \frac{1}{4}. \quad \text{(6 Punkte)}$$

Lösung: Wir verwenden das Quotientenkriterium in Limesform. Setzen wir $a_n := \binom{2n}{n} x^n$, so erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{2(n+1)}{n+1} \cdot |x|^{n+1}}{\binom{2n}{n} \cdot |x|^n} =$$

$$= |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!\,n!}} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)} =$$

$$= |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(2+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})} = |x| \cdot \frac{(2+0)(2+0)}{(1+0)(1+0)} =$$

$= 4 \cdot |x|$, wobei wir $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und die bekannten Rechenregeln für Grenzwerte verwendet haben.

Für $|x| < \frac{1}{4}$ ist somit $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 4 \cdot |x| < 1$, daher ist die angegebene Potenzreihe für $|x| < \frac{1}{4}$ absolut konvergent.

3.) Man diskutiere die Funktion $f(x)=e^{-x^2}, x\in\mathbb{R}$ (d.h. man bestimme Nullstellen, Grenzwerte, Symmetrieeigenschaften, Extremwerte, Wendepunkte).

(7 Punkte)

Lösung:

$f(x)>0$ und $f(-x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$, d.h. f ist eine „gerade Funktion" (symmetrisch zur y-Achse).

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, also ist die x-Achse Asymptote.

$$f'(x) = (-2x)\cdot e^{-x^2} \Rightarrow f''(x) = (-2)\cdot e^{-x^2} + (-2x)(-2x)e^{-x^2} =$$
$$= (4x^2-2)e^{-x^2} \Rightarrow f'''(x) = 8x\cdot e^{-x^2} + (4x^2-2)(-2x)e^{-x^2} =$$
$$= (12x-8x^3)e^{-x^2} = 4x\cdot(3-2x^2)e^{-x^2}.$$

Extremwert: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$. Wegen $f''(0)=-2<0$ und $f(0)=1$ ist der Punkt $(0,1)$ das absolute Maximum der Funktion.

Wendepunkte: $f''(x)=0 \Leftrightarrow 4x^2-2=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Wegen $x^2=\frac{1}{2}$ haben wir $f'''\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(3-1)\cdot e^{-1/2} =$
$= \pm 4\sqrt{2}\cdot e^{-1/2} \neq 0$, also liegen Wendepunkte vor:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right) \text{ und } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right).$$

Skizze der Funktion: