Arbeitsskriptum

zur Vorlesung

Geometrie für Informatiker

von

Wolfgang RATH, Helmut POTTMANN, Martin PETERNELL

Wien 2004

Einleitung

In dieser Vorlesung sollen drei grundlegende Gebiete der Geometrie behandelt werden, die für die Bereiche Computergraphik, Bildverarbeitung, Mustererkennung, Computer Vision und Geometrisches Modellieren wesentlich sind:

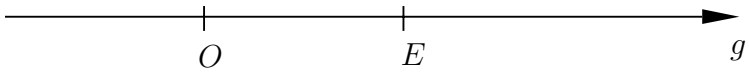
1. **Analytische Geometrie:** Die mathematische Beschreibung geometrischer Objekte und die Berechnung wichtiger Operationen mit diesen Objekten werden mit Hilfe der Vektorrechnung behandelt. Auf die Wahl geeigneter Koordinaten und die einheitliche Behandlung von Problemen unter Verwendung geeigneter Abbildungen (Affinitäten, Kollineationen) wird besonderer Wert gelegt. Ebenso diskutieren wir grundlegende Ansätze für geometrische Ausgleichsprobleme, in denen geometrische Objekte aus fehlerbehafteten Messdaten zu rekonstruieren sind.

2. **Projektive Geometrie:** Die Methoden der Projektiven Geometrie spielen eine bedeutende Rolle bei der einfachen Formulierung von Algorithmen für Zentralprojektionen und insbesondere bei der Umkehraufgabe, nämlich bei der Erkennung und Rekonstruktion von 3D Objekten aus ebenen Bildern (Computer Vision, Geodäsie). Projektive Geometrie erleichtert auch wesentlich das Verständnis der Unterschiede zwischen gewöhnlichen B-Spline-Kurven und -Flächen und der umfassenderen Klasse der NURBS, welche den Industrie-Standard für Freiformgeometrien in CAD-Systemen darstellen.

3. **Differentialgeometrie:** Es sollen hier jene differentialgeometrischen Grundkenntnisse vermittelt werden, welche für Anwendungen in der geometrischen Modellierung, der Bildverarbeitung und der Computergraphik notwendig sind. Neben der klassischen Verwendung von Parameterdarstellungen werden auch die in letzter Zeit in der geometrischen Datenverarbeitung vermehrt auftretenden impliziten Darstellungen (level sets) und die Abschätzung von Invarianten aus diskreten Daten (Triangulierungen, Punktwolken) behandelt.

1 Koordinatensysteme

1.1 Koordinatensystem auf einer Geraden g



Wir wählen auf g zwei Punkte O (*Ursprung*) und E (*Einheitspunkt*) mit $O \neq E$ und damit eine Orientierung $\overrightarrow{OE}$. Wir wollen jedem Punkt $X \in g$ in bijektiver Weise ein Zahl $x \in \mathbb{R}$ zuordnen.

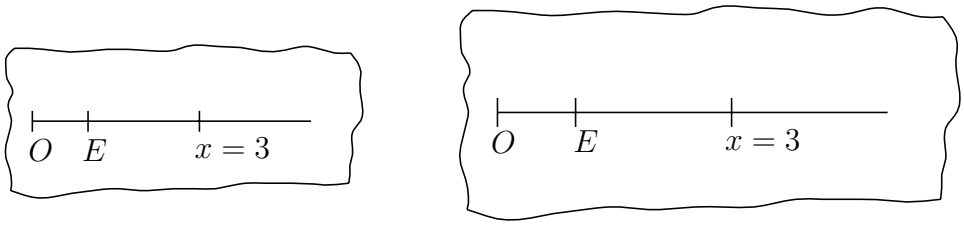
Definition 1: Seien $A, B, C \in g$ mit $B \neq C$. Das *Teilverhältnis* $\lambda = TV(ABC)$ der kollinearen Punkte A, B, C ist definiert durch

$\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$, falls C ausserhalb der Strecke AB liegt,
$\lambda = 0$, falls $A = C$ gilt,
$\lambda = -\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$, falls C innerhalb der Strecke AB liegt,

Satz 1: Ein Koordinatensystem auf einer Geraden ist durch zwei verschiedene, geordnete Punkte O, E bestimmt. Jedem Punkt X der Geraden und jeder gerichteten Strecke $\overrightarrow{OX}$ wird in eineindeutiger Weise als Koordinate die Zahl $x = TV(XEO)$ zugewiesen.

x heißt *Koordinate* von X bezüglich des *Koordinatensystems* $\{O, E\}$.

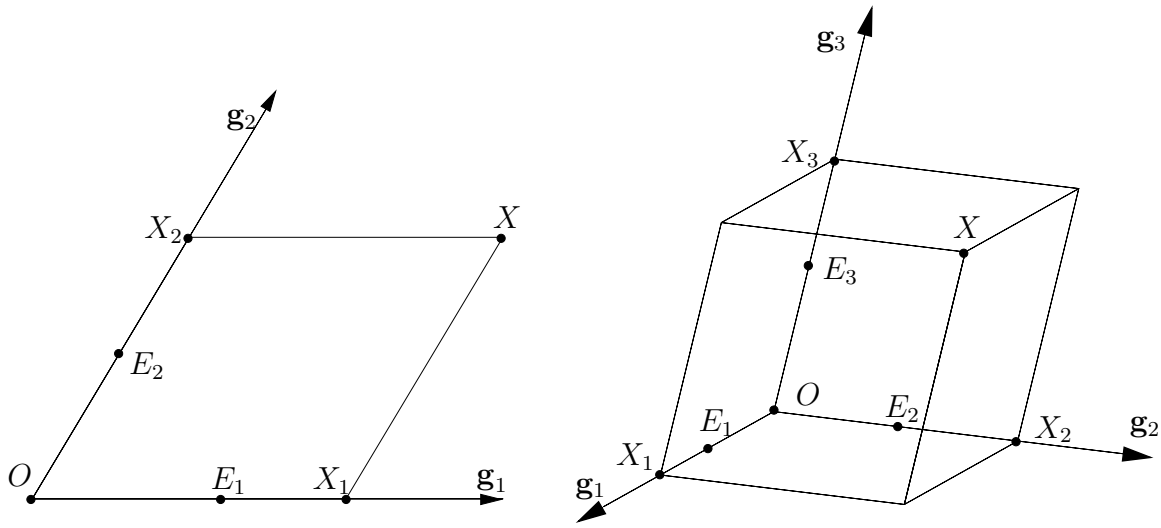
Bemerkung 1: Wenn ein Punkt X die Koordinate $x = 5$ hat, bedeutet dies nicht, daß er 5cm vom Ursprung entfernt ist, sondern daß er 5 mal so weit vom Ursprung entfernt ist wie der Einheitspunkt. Die Koordinate ist also keine Maßzahl sondern ein Teilverhältnis. Nur wenn $e = 1$ gilt, gibt der Betrag $|x| = \overline{OX}$ die Entfernung des Punktes X vom Ursprung an.



Das hat etwa den Vorteil, daß man den Maßstab einer Kopie nicht wissen muß, um die Koordinaten eines Punktes zu ermitteln, soferne nur die Punkte O und E zur Verfügung stehen. Auch bei Anwendung von Abbildungen wird diese Auffassung von Vorteil sein: Wir beziehen dann Urbild und Bild auf verschiedene Koordinatensysteme $\mathcal{K} = \{O, E\}$ und $\mathcal{K}'\{O', E'\}$ und ordnen dem Punkt X jenen Punkt X' zu, der bezüglich $\mathcal{K}'$ dieselben Koordinaten hat, wie X bezüglich $\mathcal{K}$.

1.2 Parallelkoordinatensystem (affines Koordinatensystem) in der Ebene und im Raum

Wir werden dort wo es möglich ist, nicht kartesische sondern allgemeiner affine Koordinaten verwenden.



Wir wählen mit O, E_1, E_2 bzw. O, E_1, E_2, E_3 zwei verschiedene (bzw. drei paarweise verschiedene nicht in einer Ebene liegende) Speere g_i. Zu X zeichnen wir das Koordinatenparallelo-

gramm OX_1X_2 bzw. das Koordinatenparallelepiped. Die Punkte X_i bestimmen dann die Koordinaten x_i von X über $x_i = TV(X_iE_iO)$.

Speziell bezeichnen wir:

$O \ldots$ Ursprung, $E_i \ldots$ Einheitspunkte,

$g_i = [OE_i] \ldots$ Achsen.

Ebene $[g_1g_2] \ldots \pi_1 \ldots$ (12)-Ebene $(x_3 = 0)$

Ebene $[g_2g_3] \ldots \pi_2 \ldots$ (23)-Ebene $(x_1 = 0)$

Ebene $[g_3g_1] \ldots \pi_3 \ldots$ (31)-Ebene $(x_2 = 0)$

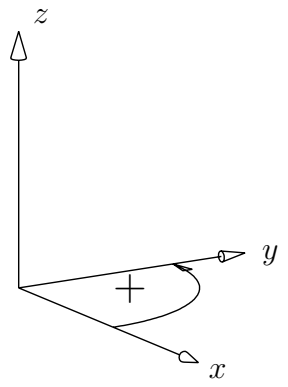
Gerade $[OE_j] \ldots x_j - Achse$ $(x_k = x_l = 0;$ j,k,l paarweise verschieden$)$

Satz 2: Ein Parallelkoordinatensystem in der Ebene bzw. im Raum ist durch 3 bzw. 4 geordnete Punkte allgemeiner Lage bestimmt. Jedem Punkt X und jeder gerichteten Strecke $\overrightarrow{OX}$ wird in eineindeutiger Weise als Koordinate ein geordnetes Zahlenpaar bzw. Zahlentripel $x_i = TV(X_iE_iO)$ ($i = 1, 2$ bzw. $i = 1, 2, 3$) zugewiesen, wobei die Punkte X_i auf den Koordinatenachsen durch Eintragen des Koordinatenparallelogramms bzw. Koordinatenparallelepipeds entstehen.

Bemerkung 2: Allgemeiner kann man den Elementen einer Menge geometrischer Objekte mit Hilfe einer Abbildung n-tupel reller Zahlen zuordnen und nennt dann diese n-tupel Koordinaten der Objekte. Diese Abbildung muß nicht bijektiv sein und es muß nicht zu jedem n-tupel ein Objekt der betrachteten Menge existieren. Vergleiche etwa die *homogenen* und *baryzentrischen Koordinaten* in den folgenden Abschnitten.

1.3 Kartesisches Rechtssystem

Ein affines Koordinatensystem mit Achsen x, y, z heißt *kartesisches Koordinatensystem*, wenn die Achsen paarweise orthogonal sind und die Einheitspunkte vom Ursprung gleich weit entfernt sind. Wir sprechen von einem kartesischen *Rechtssystem*, wenn die kürzeste Drehung der positiven x-Achse in die positive y-Achse im positiven Sinn (gegen Uhrzeigersinn) erscheint, sofern man gegen die positive z-Richtung blickt. (x-, y- und z-Achse liegen wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand.)



2 Vektoren

2.1 Vektorbegriff

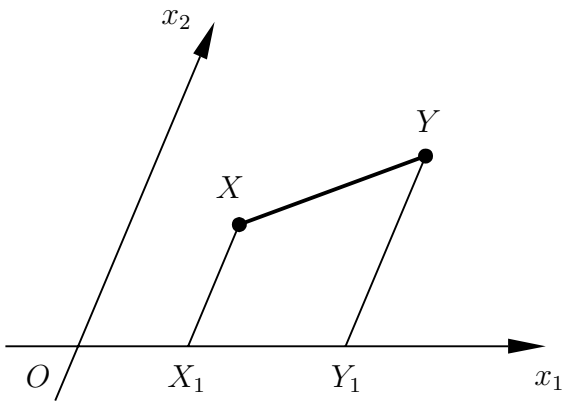
Definition 2: Ein *Vektor* ist die Menge aller gleich langen, gleich orientierten Strecken und wird durch einen vom Anfangspunkt X zum Endpunkt Y orientierte Strecke $\overrightarrow{XY}$ bestimmt. Die Länge $\overline{XY}$ der Strecke XY nennt man den *Betrag* des Vektors $\overrightarrow{XY}$ (Symbol: $\|\overrightarrow{XY}\|$).

Bemerkung 3: Dies ist die Definition eines *ungebundenen* Vektors. In den Anwendungen benötigt man oft *gebundene* Vektoren (z.B an die Wirkunsgslinie einer Kraft).

- Wir bezeichnen Vektoren mit fetten Buchstaben $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Der Vektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{XY}$ hat den *Betrag* $\|\mathbf{v}\| = \overline{XY}$, die *Richtung* von XY und die *Orientierung* von X nach Y.
- Bei $X = Y$ heißt $\overrightarrow{XY} = \mathbf{o}$ *Nullvektor*. Vektoren $\mathbf{e}$ mit $\|\mathbf{e}\| = 1$ heißt *Einheitsvektor*.

2.2 Koordinaten eines Vektors

Für den Punkt X mit den affinen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) schreiben wir kurz $X(x_i)$.



Definition 3: Der durch die Punkte $X(x_i)$ und $Y(y_i)$ bestimmte Vektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{XY}$ hat die Koordinaten v_i:

$$\overrightarrow{XY} = \mathbf{v} = \begin{cases} (v_1, v_2) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2) & \text{in der Ebene} \\ (v_1, v_2, v_3) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3) & \text{im Raum} \end{cases}$$

Merkregel: 'Spitze minus Schaft'

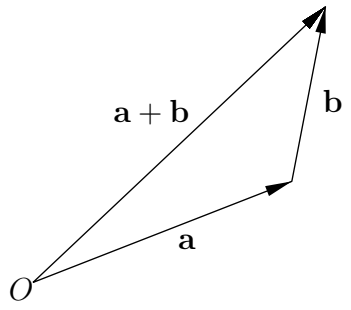
Es gilt:

1. Die Koordinaten sind unabhängig von der Auswahl des Repräsentanten
2. $\overrightarrow{YX} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3) = -\mathbf{v} = -\overrightarrow{XY}$
3. Die *Koordinaten eines Ortsvektors* $\overrightarrow{OX} = \mathbf{x} = (x_1 - 0, x_2 - 0, x_3 - 0) = (x_1, x_2, x_3)$ sind die Koordinaten seines Endpunktes.
4. Bezüglich eines *kartesischen Koordinatensystems* gilt für den Betrag des Vektors $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

2.3 Rechenregeln, Vektorraum

2.3.1 Summe zweier Vektoren

Geometrisch: ”Parallelogrammregel”



Analytisch:

$$\mathbf{a} = (a_i),\ \mathbf{b} = (b_i),\ \mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_i + b_i)$$

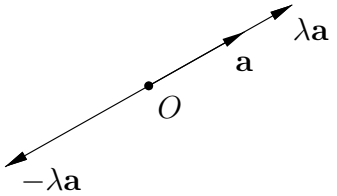
Für die Menge $\mathbb{V}$ aller Vektoren und die Addition gilt:

$(\mathbb{V}, +)$ ist eine *kommutative Gruppe*, d.h. es gelten

1. Assoziativgesetz: $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
2. neutrales Element: $\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$
3. inverses Element: $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$
4. Kommutativgesetz: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

2.3.2 Multiplikation eines Vektors $\mathbf{a}$ mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$

Geometrisch:



Analytisch:

$\mathbf{a} = (a_i) \in \mathbb{V}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_i)$

Es gilt: $\|\lambda\mathbf{a}\| = |\lambda|\|\mathbf{a}\|$, $0\mathbf{a} = \mathbf{o}$

2.3.3 Vektorraum

Sei die Operation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ definiert durch die skalare Multiplikation $(\lambda, \mathbf{a}) \mapsto \lambda\mathbf{a}$, so ist $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ ein *Vektorraum*, d.h. $(\mathbb{V}, +)$ ist eine kommutative Gruppe, und es gilt für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

1. Assoziativgesetz: $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$.
2. Distributivgesetze:

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)\mathbf{a} &= \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}, \\ \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.\end{aligned}$$

3. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

2.4 Linearkombination und lineare Abhängigkeit

Definition 4: Seien $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ eine Menge von endlich vielen Vektoren und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ beliebige reelle Zahlen (*Skalare*), so heißt

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_m\mathbf{a}_m$$

Linearkombination mit den *Koeffizienten* λ_i. Eine Linearkombination heißt *trivial*, wenn alle Koeffizienten gleich null sind, jede andere Linearkombination heißt *nichttrivial*.

Definition 5: Die Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ heißen *linear unabhängig (l.u.)*, wenn sich aus ihnen der Nullvektor nur in trivialer Weise linear kombinieren läßt, d.h. mit Koeffizienten

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Nicht l.u. Vektoren heißen *linear abhängig (l.a.)*. Vektoren $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ sind also l.a., genau dann wenn es eine Linearkombination des Nullvektors $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\mathbf{a}_i = \mathbf{o}$ gibt, bei der nicht alle Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ gleich Null sind.

Eine Menge linear unabhängiger (l.u.) Vektoren $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots\}$, aus denen sich jeder Vektor eines endlichdimensionalen Vektorraumes linear kombinieren läßt, heißt *Basis*.

Die Einheitsvektoren $\overrightarrow{OE_i}$ eines Koordinatensystems im Raum

$$\{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^\top, \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^\top, \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^\top\}$$

sind l.u., denn aus $\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{o}$ folgt $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$.

Satz 3: In der Ebene (im Raum) besteht jede Basis aus zwei (bzw. drei) Vektoren.

Satz 4: Zwei bzw. drei Vektoren der Ebene bzw. des Raumes sind genau dann linear abhängig, wenn ihre Determimante null ist. Je drei bzw. vier Vektoren der Ebene bzw. des Raumes sind stets linear abhängig.

- Ebene: $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

- Raum: $\mathbf{a} = (a_i)$, $\mathbf{b} = (b_i)$, $\mathbf{c} = (c_i)$

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.$$

  Die Determinante berechnen wir nach der Regel von SARRUS (gilt nur für (3×3)-Determinanten) oder durch Entwickeln nach einer Zeile oder Spalte.

Bemerkung 4: Der Begriff des Vektorraums spielt nicht nur in der analytischen Geometrie eine wesentliche Rolle. So bilden etwa auch die Polynome festen Grades einen Vektorraum und für das Design von Splinekurven ist es wesentlich in diesem Vektorraum geeignete Basispolynome zu finden, sodaß die Koordinaten der Polynome bezüglich dieser Basis geometrische Bedeutung besitzen.

2.5 Affinkombination

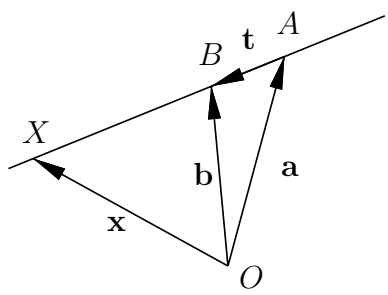
Wir bestimmen die Parameterdarstellungen von Geraden g und Ebenen ε.

- Gerade g durch A, B $(A \neq B)$:

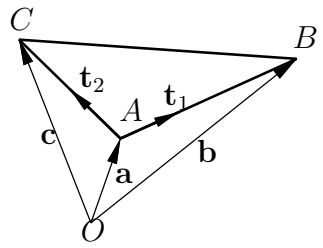
$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{a} + \lambda\mathbf{t} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}),\ \lambda \in \mathbb{R}, \\ &= (1 - \lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b},\ \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

  Äquivalent dazu ist die Darstellung

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b},\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$



- Ebene ϵ durch 3 verschiedene Punkte A, B, C nicht auf einer Geraden.



$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{a} + \lambda\mathbf{t}_1 + \mu\mathbf{t}_2 \\ &= \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \mu(\mathbf{c} - \mathbf{a}),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ &= (1 - \lambda - \mu)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

Äquivalent dazu ist die Darstellung

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{c},\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

Definition 6: Eine Linearkombination

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{a}_i \qquad \text{mit} \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

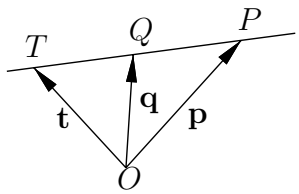
heißt *Affinkombination*.

2.6 Konvexkombination

2.6.1 Teilungspunkt T einer Strecke PQ mit gegebenem Teilverhältnis $\lambda = TV(PQT)$

Wegen $TV(PQT) = \lambda$ gilt: $\lambda\overrightarrow{QT} = \overrightarrow{PT}$. Nach Wahl eines Ursprungs und mit Benützung der Ortsvektoren gilt $\overrightarrow{QT} = \mathbf{t} - \mathbf{q}$ und

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= \mathbf{p} + \overrightarrow{PT} = \mathbf{p} + \lambda\overrightarrow{QT} \\ &= \mathbf{p} + \lambda(\mathbf{t} - \mathbf{q}) \\ &= \mathbf{p} + \lambda\mathbf{t} - \lambda\mathbf{q}.\end{aligned}$$



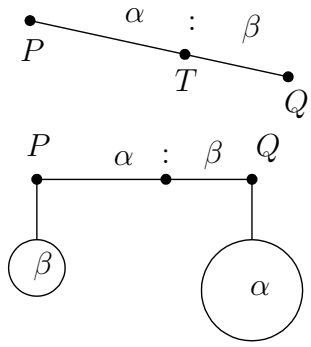
Daraus erhalten wir $(1 - \lambda)\mathbf{t} = \mathbf{p} - \lambda\mathbf{q}$ und schließlich

$$\mathbf{t} = \frac{1}{1 - \lambda}\mathbf{p} - \frac{\lambda}{1 - \lambda}\mathbf{q}.$$

Wegen

$$\frac{1}{1-\lambda} - \frac{\lambda}{1-\lambda} = 1$$

ist $\mathbf{t}$ Affinkombination der Vektoren $\mathbf{p}, \mathbf{q}$. Teilt T die Strecke im Inneren, so gilt $TV(PQT) = \lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$ mit $\alpha, \beta > 0$. Dann folgt



$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\lambda} &= \frac{1}{1+\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \\ -\frac{\lambda}{1-\lambda} &= -\frac{-\frac{\alpha}{\beta}}{1+\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

Der Teilungspunkt T wird daher durch den Ortsvektor

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\alpha+\beta}(\beta\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q}) \tag{1}$$

beschrieben. Wir können T als Schwerpunkt des Massensystems PQ ansehen, wenn man P das Gewicht β und Q das Gewicht α erteilt.

2.6.2 Schwerpunkt eines Systems von n Massenpunkten

Gegeben seien die Punkte P_i $(i = 1, \ldots, n)$ mit den Ortsvektoren $\mathbf{p}_i$ und den Gewichten $\gamma_i > 0$. Wir wollen nun rekursiv den Schwerpunkt S des Massensystems $P_1P_2 \ldots P_n$ definieren, wobei den Punkten P_i das Gewicht γ_i zugeordnet wird:

Definition 7: Seien P_i $(i = 1, \ldots, n)$ und γ_i $(i = 1, \ldots, n)$ wie oben. Um den Schwerpunkt des zugehörigen Massensystems zu erhalten, berechne man zunächst den Schwerpunkt S_{n-1} des $n-1$-elementigen Massensystems, welches zu P_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ und γ_i $(i = 1, \ldots n-1)$ gehört. Dann bilde man den Schwerpunkt des zweipunktigen Massensystems bestehend aus S_{n-1} mit Gewicht $\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i$ und P_n mit Gewicht γ_n (siehe (1)).

Diese Definition hängt a priori von der Reihenfolge der Punkte P_i ab. Dass dies in Wirklichkeit nicht der Fall ist, zeigt der folgende Satz.

Satz 5: Sei die Notation wie oben. Dann hat der *Schwerpunkt* S den Ortsvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \, \mathbf{p}_i, \\ &= \frac{\text{Summe der mit den Gewichten multiplizierten Ortsvektoren}}{\text{Summe der Gewichte}}. \end{aligned}$$

Der Beweis der Behauptung erfolgt durch vollständige Induktion.

- Induktionsanfang: Die Behauptung ist richtig für $n = 2$, siehe Teilungspunkt.
- Induktionsannahme: Die Behauptung ist für n Punkte bewiesen.
- Induktionsschluß: wir schliessen von n auf $n + 1$.

Nach Induktionsannahme gilt:

$$\mathbf{s}_n = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{p}_i$$

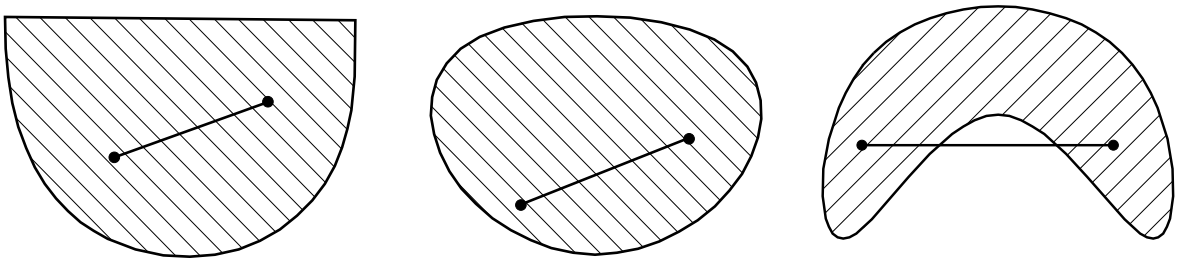
S ist Schwerpunkt des Punktes S_n (belastet mit dem Gewicht $\sum_1^n \gamma_i$) und dem Punkt P_{n+1} (belastet mit γ_{n+1}). Nach Abschnitt 2.6.1 folgt:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \right) \mathbf{s}_n + \gamma_{n+1} \mathbf{p}_{n+1} \right] = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i} \left[\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{p}_i + \gamma_{n+1} \mathbf{p}_{n+1} \right]$$

Der Schwerpunkt ist also eine Affinkombination $\sum \lambda_i \mathbf{p}_i$ mit $\lambda_i > 0$. Das motiviert die folgenden Betrachtungen:

2.6.3 Konvexe Mengen

Definition 8: Eine Punktmenge heißt *konvex*, wenn sie mit je zwei Punkten auch alle Punkte ihrer Verbindungsstrecke enthält.



Konvexe und nicht konvexe Mengen in der Ebene

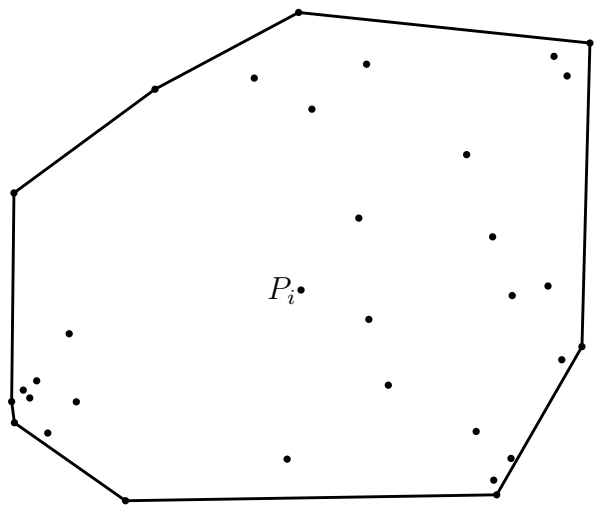
Definition 9: Eine Linearkombination

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{a}_i, \text{ mit } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0,$$

heißt *Konvexkombination*

Der *Schwerpunkt* ist also eine *Konvexkombination der Massenpunkte*.

Definition 10: Der Durchschnitt aller konvexen Mengen, die eine gegebene Punktmenge $\{P_1, \ldots, P_n\}$ enthalten, heißt *konvexe Hülle* von $P_1, \ldots, P_n$.



Beispiel: Konvexe Hülle einer Punktmenge in der Ebene

Satz 6: Die Punkte der konvexen Hülle einer Menge von Punkten $P_1, \ldots, P_n$ mit den Ortsvektoren $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ werden genau durch alle Konvexkombinationen

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{p}_i, \text{ mit } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$$

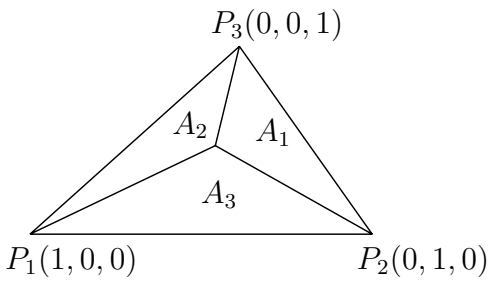
beschrieben.

2.6.4 Baryzentrische Koordinaten in der Ebene

Definition 11: Sei $P_1P_2P_3$ ein Dreieck und seien $\mathbf{p}_i$ die Ortsvektoren der P_i. Dann läßt sich jeder Punkt X im Inneren oder auf dem Rand des Dreiecks (aus der konvexen Hülle der P_i) durch

$$\mathbf{x} = \beta_1\mathbf{p}_1 + \beta_2\mathbf{p}_2 + \beta_3\mathbf{p}_3, \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1, \quad \beta_i \geq 0$$

beschreiben. Die β_i heißen *baryzentrische Koordinaten* von X bezüglich P_1, P_2, P_3.



Bemerkung 5:

1. X ist Schwerpunkt des Dreiecks $P_1P_2P_3$, wenn man den Punkten P_i die Gewichte β_i erteilt.

2. Die β_i sind nicht unabhängig, da ja $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$ gilt.

3. Der *elementargeometrische Schwerpunkt* des Dreiecks entsteht für gleiche Gewichte $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \frac{1}{3}$ und hat daher die Darstellung $\mathbf{s} = \frac{1}{3}\mathbf{p}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{p}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{p}_3$.

Berechnung der baryzentrischen Koordinaten aus affinen Koordinaten

Sei $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i)$, $\mathbf{x} = (x, y)$ bezüglich eines beliebigen affinen Koordinatensystems. Wegen $\mathbf{x} = \beta_1\mathbf{p}_1 + \beta_2\mathbf{p}_2 + \beta_3\mathbf{p}_3$ gelten für die baryzentrischen Koordinaten β_i die Gleichungen

$$\begin{aligned} \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 &= x, \\ \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 &= y, \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= 1. \end{aligned}$$

Aus diesen 3 linearen Gleichungen für $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ folgt mit Hilfe der *Cramerschen Regel*:

$$\beta_1 = \frac{\begin{vmatrix} x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x & x_2 - x & x_3 - x \\ y & y_2 - y & y_3 - y \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x & x_3 - x \\ y_2 - y & y_3 - y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}} = \frac{2A_1}{2A} = \frac{A_1}{A}.$$

Dabei ist A_1 die Fläche des Dreiecks XP_2P_3 und A die Fläche des Dreiecks $P_1P_2P_3$. In analoger Weise gilt:

$$\beta_2 = \frac{A_2}{A}, \quad \beta_3 = \frac{A_3}{A}.$$

3 Produkte von Vektoren

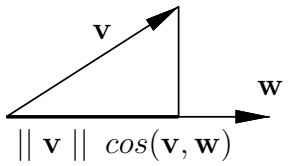
3.1 Skalarprodukt zweier Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Sind $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ und $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ zwei Vektoren in $\mathbb{R}^2$, so bezeichnet

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 \tag{2}$$

das *skalare Produkt* von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$. Die *Norm* (Länge) eines Vektors erhält man mit

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \tag{3}$$



Für das skalare Produkt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ gilt die folgende geometrische Interpretation:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \alpha, \tag{4}$$

wobei α der Winkel zwischen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ ist ($0 \leq \alpha \leq \pi$). Sind $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ orthogonal, so folgt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. Die zu $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ normalen Vektoren $\mathbf{y}$ werden somit dargestellt durch $\mathbf{y} = t(-v_2, v_1)$, mit $t \neq 0$.

3.2 Fläche eines Parallelogramms

Seien $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ und $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ zwei linear unabhängige Vektoren, dann bestimmen sie ein Parallelogramm P. Die Fläche F des Parallelogramms ist gleich $\|\mathbf{v}\| h$, mit h als Höhe von P. Mit α als Winkel zwischen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ berechnet sich die Höhe h aus $h = \|\mathbf{w}\| \sin \alpha = \|\mathbf{w}\| \cos(\pi/2 - \alpha)$. Unter Verwendung des zu $\mathbf{v}$ orthogonalen Vektors $\mathbf{z} = (-v_2, v_1)$ gilt wegen $\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{v}\|$ für die Fläche

$$F = \|\mathbf{v}\| h = \|\mathbf{z}\| \|\mathbf{w}\| \cos(\pi/2 - \alpha) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} = v_1 w_2 - v_2 w_1 = \det(\mathbf{v}, \mathbf{w}). \tag{5}$$

Proportionale (linear abhängige) Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} = t\mathbf{v}$ besitzen verschwindende Determinante $\det(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$.

3.3 Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$

Für Vektoren $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ und $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ des $\mathbb{R}^3$ ist das Skalarprodukt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ bzw. die Norm $\|\mathbf{v}\|$ analog definiert zum ebenen Fall durch

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3, \quad \text{bzw. } \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

Die geometrische Interpretation ist analog zu (4). Insbesondere wird Orthogonalität zweier Vektoren durch das Verschwinden ihres Skalarproduktes ausgedrückt. Ist $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ein beliebiger Vektor in $\mathbb{R}^3$, so gilt für die drei Vektoren

$$\mathbf{a} = (0, -v_3, v_2), \mathbf{b} = (-v_3, 0, v_1), \mathbf{c} = (-v_2, v_1, 0)$$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{v} = 0$. Ist etwa $v_1 \neq 0$, so spannen die Vektoren

$$\beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \beta(-v_3, 0, v_1) + \gamma(-v_2, v_1, 0)$$

die *Normalebene* zu $\mathbf{v}$ auf, d.h. $(\beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}) \cdot \mathbf{v} = 0$.

Das Skalarprodukt ist *kommutativ*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

und es gelten die Distributivgesetze

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}.$$

Man beachte aber, dass die Assoziativität nicht gilt,

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}),$$

denn im allgemeinen ist die linke Seite ein Vektor parallel zu $\mathbf{c}$, und die rechte Seite ein Vektor parallel zu $\mathbf{a}$ (beachte auch, dass hier der Punkt $\cdot$ für das Skalarprodukt zweier Vektoren und die Multiplikation mit einem Skalar steht).

3.4 Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$

Für Vektoren des $\mathbb{R}^3$ kann man ein Vektorprodukt $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ erklären, das keine Entsprechung in der Ebene hat. Sind $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$, so ist der durch

$$\mathbf{z} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1) \tag{6}$$

definierte Vektor das *Vektorprodukt* von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$. Die Koordinaten von $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ sind die 2×2 Unterdeterminanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix},$$

mit

$$z_1 = \det \begin{pmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix}, \; z_2 = \det \begin{pmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{pmatrix}, \; \text{und } z_3 = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}.$$

Zwei Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ sind genau dann *linear abhängig*, wenn $\mathbf{z} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = (0, 0, 0)$ gilt.

Ansonsten ist der Vektor $\mathbf{z} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ein Normalvektor jeder von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ aufgespannten Ebene, denn es gilt

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = 0.$$

Der Flächeninhalt des von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ aufgespannten Parallelogramms berechnet sich mit $F = \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$.

Beispiel 1: Sei ein Dreieck D in $\mathbb{R}^3$ gegeben durch die Ortvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ der Eckpunkte A, B, C. Mit Hilfe der beiden Richtungsvektoren $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\mathbf{w} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$ berechnet sich die Fläche F des Dreiecks D mit

$$F = \frac{1}{2}\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|.$$

Rechenregeln des Vektorprodukts

1. alternierend: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$
2. Assoziativgesetz gilt NICHT:

   $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \quad \neq \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

   $\perp \mathbf{c}$, in Ebene $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad \perp \mathbf{a}$, in Ebene $(\mathbf{b}, \mathbf{c})$
3. Distributivgesetz: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
4. $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.
5. Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ linear unabhängig, dann bilden die Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ein *Rechtssystem*. Wir sehen später, dass $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 > 0$ gilt.

3.5 Determinante dreier Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$, so ist durch

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \tag{7}$$

die *Determinante* der drei Vektoren definiert (zur Berechnung siehe auch 2.4).

Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ drei linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^3$, welche ein *Parallelepiped* P bestimmen. Für das Volumen $\mathrm{vol}(P)$ von P gilt $\mathrm{vol}(P) = Gh$ mit G als Flächeninhalt der Grundfläche (Parallelogramm) und h als Höhe. Wir wählen das Parallelogramm, aufgespannt durch die Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, als Grundfläche, also gilt $G = ||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||$. Bezeichnen wir den normierten Normalvektor der Trägerebene des Parallelogramms mit

$$\mathbf{n} = \frac{1}{||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

so gilt wegen $h = \mathbf{n} \cdot \mathbf{c}$

$$\mathrm{vol}(P) = Gh = ||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Auf Grund der geometrischen Interpretation der Determinante als Volumen von P erhalten wir

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}. \tag{8}$$

Es gilt:

- Sind die Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ linear abhängig, so folgt $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.
- Sind $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ linear unabhängig, so gilt $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$ genau dann, wenn $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ im selben Halbraum bezüglich der durch $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ bestimmten Ebene liegen, d.h. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} > 0$.
- Wegen der Kommutativität des Skalarproduktes gilt
$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$
- Da das Vektorprodukt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ alternierend ist, gilt
$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

Beispiel 2: Sei das Tetraeder T gegeben durch die Ortsvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$ der Ecken A, B, C und D. Mit Hilfe der Vektoren

$$\mathbf{u} = \mathbf{d} - \mathbf{a},\ \mathbf{v} = \mathbf{d} - \mathbf{b},\ \mathbf{w} = \mathbf{d} - \mathbf{c}$$

berechnet sich das Volumen $\mathrm{vol}(T)$ des Tetraeders T mit

$$\mathrm{vol}(T) = \frac{1}{6}\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

3.6 Mehrfache Produkte

Gelegentlich ist es nützlich, mehrfache Produkte zu verwenden. Wir geben nur die folgenden Formeln ohne Herleitungen an.

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a} && (9)\\
\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} && (10)\\
(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) && (11)\\
(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= \det(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{b}-\det(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{a}, \quad \text{oder} && (12)\\
(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= \det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})\mathbf{c}-\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{d}
\end{aligned}
$$

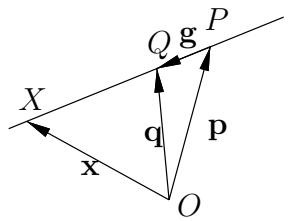
Bezüglich der letzten beiden Formeln bemerken wir, dass sich $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$ sowohl als Linearkombination von $\mathbf{a},\mathbf{b}$ als auch als Linearkombination von $\mathbf{c},\mathbf{d}$ darstellen lässt.

4 Analytische Darstellung von Geraden und Ebenen

4.1 Parameterdarstellung einer Geraden

Zwei verschiedene Punkte P und Q bestimmen genau eine *Verbindungsgerade* G. Ein Richtungsvektor von G ist gegeben durch $\mathbf{q}-\mathbf{p}$; eine Parameterdarstellung von G lautet

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p})=(1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q}, \quad t\in\mathbb{R}. \qquad (13)$$



Dabei bezeichnet $\mathbf{x}(t)$ den von t abhängigen Koordinatenvektor des laufenden Punktes $X(t)$ auf G. Je nachdem die Eingabevektoren $\mathbf{p},\mathbf{q}$ zwei- oder dreidimensional sind, stellt $\mathbf{x}(t)$ eine Gerade in der Ebene $\mathbb{R}^2$ oder im Raum $\mathbb{R}^3$ dar. Durch die Parametrisierung $\mathbf{x}(t)$ wird das reelle Intervall $[0,1]$ teilverhältnistreu auf die Strecke PQ abgebildet.

4.2 Gleichung einer Geraden in der Ebene und Normalform

Eine Gerade G kann auch als Lösungsmenge einer linearen Gleichung

$$G : n_1x_1 + n_2x_2 + d = 0, \quad (n_1, n_2) \neq (0, 0), \tag{14}$$

angegeben werden. Die Menge der Punkte (x_1, x_2) ändert sich nicht, wenn man (14) mit einer Zahl $t \neq 0$ multipliziert. Daher beschreibt jede zu (14) proportionale Gleichung dieselbe Gerade G.

Sind $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ und $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ zwei Punkte von G, so erfüllen sie $n_1(p_1-q_1)+n_2(p_2-q_2) = 0$; mittels $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ gilt also $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q}) = 0$ und somit ist der Vektor $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ ein *Normalvektor* der Geraden G. Mit Hilfe des skalaren Produkts lässt sich die Gleichung einer Geraden auch durch $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + d = 0$ angeben; mit einem Punkt $\mathbf{a}$ auf G gilt die gleichwertige Darstellung $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$. Setzen wir $\mathbf{n}$ als Einheitsvektor voraus, so heißt

$$G : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + d = 0, \text{ mit } \|\mathbf{n}\| = 1 \tag{15}$$

die (Hessesche) *Normalform* einer Geraden. Der *orientierte Abstand* $d(P, G)$ eines Punktes P von G ist gegeben durch

$$d(P, G) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} + d, \text{ mit } \|\mathbf{n}\| = 1. \tag{16}$$

Das Vorzeichen des Abstands ist durch die Orientierung von $\mathbf{n}$ bestimmt. Der Koeffizient d ist der orientierte Abstand des Ursprungs O von G. Zum Beweis von (16) beachten wir, dass $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} + d = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{a})$ gleich der Normalkomponente des Vektors $\mathbf{p} - \mathbf{a}$, also dem orientierten Abstand ist.

Bemerkung 6: Sei das in $\mathbb{R}^2$ zu Grunde gelegte Koordinatensystem kein kartesisches, sondern ein allgemeines affines Koordinatensystem. Auch hier sind die Punkte einer Geraden G als Lösungsmenge einer linearen Gleichung (14) festlegbar. Die Interpretation der Koeffizienten n_1, n_2 als Koordinaten eines Normalvektors von G gilt allerdings nicht mehr.

4.3 Schnittpunkt zweier Geraden

Seien $G : g_1x_1 + g_2x_2 + d = 0$ und $H : h_1x_1 + h_2x_2 + e = 0$ die Gleichungen zweier Geraden in der Ebene. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} g_1x_1 + g_2x_2 &= -d \\ h_1x_1 + h_2x_2 &= -e, \end{aligned}$$

in den Unbekannten x_1, x_2. Ist $g_1h_2 - g_2h_1 \neq 0$, so erhalten wir als Lösung des Gleichungssystems die Koordinaten des Schnittpunkts S,

$$s_1 = \frac{eg_2 - dh_2}{g_1h_2 - g_2h_1}, s_2 = \frac{dh_1 - eg_1}{g_1h_2 - g_2h_1}. \tag{17}$$

Ist hingegen $g_1h_2 - g_2h_1 = 0$, so sind die Geraden G und H parallel oder gleich, und für die Normalvektoren $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ und $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ gilt $\mathbf{h} = t\mathbf{g}$, mit $t \neq 0$.

4.4 Symmetriegerade zweier Punkte in der Ebene

Seien P und Q zwei Punkte in der Ebene. Der Ort jener Punkte X, welche von P und Q gleichen Abstand haben, ist die Symmetriegerade (Streckensymmetrale) S_{PQ}, welche durch den Mittelpunkt $\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$ der Strecke PQ geht. Der Richtungsvektor von S_{PQ} ist normal zu $\mathbf{n} = \mathbf{q}-\mathbf{p}$, daher ist $\mathbf{n}$ ein Normalvektor von S_{PQ}. Daraus folgt für S_{PQ} die Gleichung

$$S_{PQ} : (\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{m}) = 0. \tag{18}$$

Beispiel 3: Seien P, Q, R drei Punkte in der Ebene, die ein Dreieck bilden. Wir berechnen die Symmetriegeraden S_{PQ}, S_{QR} und S_{RP}. Der Schnittpunkt $\mathbf{y}$ von zwei der drei Geraden hat die Eigenschaft, dass die Abstände

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{p}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{q}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{r}\|$$

gleich sind. Daher schneiden die drei Geraden S_{PQ}, S_{QR}, S_{RP} in $\mathbf{y}$, welcher der Umkreismittelpunkt der drei Punkte P, Q, R ist.

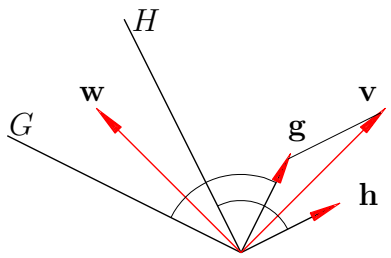
4.5 Winkelsymmetrale zweier Geraden

Unter Verwendung der Normalform einer Geraden lassen sich die Winkelsymmetralen zweier Geraden $G : g_1x_1 + g_2x_2 + d = 0$ und $H : h_1x_1 + h_2x_2 + e = 0$ einfach bestimmen.

Bezeichnen wir die normierten Normalvektoren von G und H mit $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ und $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$, so sind

$$\mathbf{v} = \mathbf{g} + \mathbf{h}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{g} - \mathbf{h}$$

die Normalvektoren der Winkelsymmetralen V und W, siehe Figur. Die Geraden V und W sind orthogonal.



Die Gleichungen der Winkelsymmetralen sind daher

$$V : (g_1 + h_1)x_1 + (g_2 + h_2)x_2 + (d + e) = 0,$$
$$W : (g_1 - h_1)x_1 + (g_2 - h_2)x_2 + (d - e) = 0.$$

Sind G und H parallel und $\mathbf{g}$ und $\mathbf{h}$ gleich orientiert, so ist $\mathbf{v} = 2\mathbf{g}$ und $\mathbf{w} = \mathbf{o} = (0, 0)$. V ist dann die Mittellinie von G und H, und W ist nicht erklärt.

4.6 Darstellung einer Ebene im Raum

Eine Ebene E im Raum $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch drei Punkte P, Q, R, welche ein Dreieck bilden. Dann kann man jeden Punkt X der Ebene E durch die folgende Parametrisierung darstellen,

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{p} + u(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + v(\mathbf{r} - \mathbf{p}) = (1 - u - v)\mathbf{p} + u\mathbf{q} + v\mathbf{r}. \tag{19}$$

Dabei beschreibt $\mathbf{x}(u, v)$ eine *affine Abbildung* der Punkte der uv-Ebene auf die Punkte von E. Das Dreieck, gebildet von den Punkten $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ wird auf das Dreieck P, Q, R abgebildet. Die Abbildung erfolgt mittels gleicher baryzentrischer Koordinaten $(1 - u - v, u, v)$ bezüglich dieser Dreiecke. Dies bedeutet etwa, dass die Punkte $(0.5, 0)$ und $(0, 0.5)$ auf die Mittelpunkte der Strecken PQ und PR abgebildet werden. Jede Gerade $(u(t), v(t))$ in der uv-Ebene wird durch die Parametrisierung $\mathbf{x}(u, v)$ auf eine Gerade $\mathbf{x}(u(t), v(t))$ in E abgebildet.

Eine Ebene E kann aber auch als Lösungsmenge einer linearen Gleichung

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0, \quad (n_1, n_2, n_3) \neq (0, 0, 0) \tag{20}$$

angegeben werden. Dabei ist $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ ein Normalvektor der Ebene, der proportional zum Vektor $(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{p})$ ist. Mit Hilfe des skalaren Produkts lässt sich die Gleichung einer Ebene auch durch $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + n_0 = 0$ angeben. Jede zu (20) proportionale Gleichung beschreibt dieselbe Ebene.

Ist $\mathbf{n}$ ein Einheitsvektor ($\|\mathbf{n}\| = 1$), so heisst $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + n_0 = 0$ die (Hessesche) *Normalform* der Ebene. Der *orientierte Abstand* $d(P, E)$ eines Punktes P von E ist gegeben durch

$$d(P, E) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} + n_0. \tag{21}$$

4.7 Ausgleichsebene

4.7.1 Ausgleichsebene durch $n > 3$ Punkte

Als Anwendung der Hesseschen Normalfom einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ wollen wir die *Ausgleichsebene* von $n > 3$ Punkten P_i berechnen, die nicht notwendigerweise in einer Ebene liegen. Gegeben sind also Datenpunkte

$$P_i = (p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}),\ i = 1, \ldots, n.$$

Gesucht ist eine Ebene $\epsilon : u_0 + u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = u_0 + \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{x} = 0$, sodass die Normalabstände $d(P_i, \epsilon)$ der Punkte P_i von der gesuchten Ebene ϵ möglichst klein werden. Setzen wir voraus, dass $\|\mathbf{u}\| = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ gilt, so berechnen sich die Abstände aus

$$d(P_i, \epsilon) = u_0 + \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p}_i.$$

Dies sind orientierte (vorzeichenbehaftete) Abstände. Falls die Daten von einer Messung mit normalverteilten Fehlern kommen, haben wir zur Bestimmung der Ebene ϵ die Summe der quadrierten Abstände

$$F(u_0, \mathbf{u}) = \sum_i d(P_i, \epsilon)^2 = \sum_i (u_0 + \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p}_i)^2 \tag{22}$$

zu minimieren. Es liegt also die Minimierung der quadratischen Funktion $F(u_0, \mathbf{u})$ in $u_0, \mathbf{u}$ unter der quadratischen Nebenbedingung $G(u_0, \mathbf{u}) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - 1 = 0$ vor.

Nach der Regel von Lagrange bildet man die Funktion $H(u_0, \mathbf{u}, \lambda) = F(u_0, \mathbf{u}) - \lambda G(u_0, \mathbf{u})$ (wir verwenden den Multiplikator $-\lambda$, weil sich dann später λ als Eigenwert einer gewissen Matrix deuten lässt). Eine notwendige Bedingung für eine Lösung des Problems ist

$$\frac{\partial H}{\partial u_0} = \ldots = \frac{\partial H}{\partial u_3} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0$$

Die partielle Ableitung nach u_0 liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u_0} &= 2\sum_{i=1}^{n}(u_0 + u_1p_{i1} + u_2p_{i2} + u_3p_{i3}) \\
&= 2(nu_0 + u_1\sum p_{i1} + u_2\sum p_{i2} + u_3\sum p_{i3}) \\
&= 2n(u_0 + u_1s_1 + u_2s_2 + u_3s_3) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wobei $S = (s_1, s_2, s_3) = 1/n(\sum p_{i1}, \sum p_{i2}, \sum p_{i3})$ den *Schwerpunkt* der Punkte P_i bezeichnet. Daraus folgt somit, dass die gesuchte Ebene ϵ den Schwerpunkt des Punktesystems P_i enthält.

Wir wählen somit S als Ursprung des Koordinatensystems und bilden die Vektoren $\mathbf{q}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{s}$ zur Beschreibung der Punkte P_i. Da wegen $S \in \epsilon$ nun $u_0 = 0$ gelten muss, vereinfacht sich die zu minimierende Funktion aus (22) zu

$$F(\mathbf{u}) = \sum_i (\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{q}_i)^2 \to \text{min},$$

mit obiger Nebenbedingung $G(\mathbf{u}) = 0$. Das Minimierungsproblem kann in Matrizenschreibweise wegen $(\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{q}_i)^2 = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i^T \cdot \mathbf{u}$ sehr einfach dargestellt werden durch

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}) &= \mathbf{u}^T \cdot M \cdot \mathbf{u} \to \text{min}, \quad \text{mit Nebenbedingung} \\ G(\mathbf{u}) &= \mathbf{u}^T \cdot E \cdot \mathbf{u} - 1 = 0, \end{aligned}$$

wobei die Matrix $M = \sum \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i^T$ (Trägheitsmatrix des Punktsystems) von folgender Gestalt ist

$$\begin{pmatrix} \sum q_{i1}^2 & \sum q_{i1}q_{i2} & \sum q_{i1}q_{i3} \\ \sum q_{i1}q_{i2} & \sum q_{i2}^2 & \sum q_{i2}q_{i3} \\ \sum q_{i1}q_{i3} & \sum q_{i2}q_{i3} & \sum q_{i3}^2 \end{pmatrix}.$$

Bilden wir die partiellen Ableitungen von $H(\mathbf{u}, \lambda) = F(\mathbf{u}) - \lambda G(\mathbf{u})$ nach $\mathbf{u}$, so erhalten wir

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 2(M - \lambda E) \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Der Lösungsvektor $\bar{\mathbf{u}}$ (mit $\|\bar{\mathbf{u}}\| = 1$) darf nicht der Nullvektor sein. Er ist somit Eigenvektor der Matrix M. Wir zeigen nun, dass der Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert $\bar{\lambda}$ von M der richtige ist, denn für einen gemäß der Nebenbedingung normierten Eigenvektor $\mathbf{u}_i$ zum Eigenwert λ_i gilt

$$F(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_i^T \cdot M \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^T \cdot (\lambda_i \mathbf{u}_i) = \lambda_i.$$

Der Eigenwert ist also die Fehlerquadratsumme F. Somit wird das Minimum für den Eigenvektor $\bar{\mathbf{u}}$ zum kleinsten Eigenwert angenommen. Die Gleichung der Ausgleichsebene ist $\bar{\mathbf{u}}^T \cdot \mathbf{y} = 0$, allerdings im Koordinatensystem, das S als Ursprung besitzt ($\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{s}$). Rechnen wir auf alte Koordinaten um, so erhalten wir

$$-\bar{\mathbf{u}}^T \cdot \mathbf{s} + \bar{\mathbf{u}}^T \cdot \mathbf{x} = 0.$$

Die Berechnung einer Ausgleichsebene hat zahlreiche Anwendungen. Sie ist eine der einfachsten Aufgaben bei der Rekonstruktion von 3D Objekten aus Messpunkten, welche mit einem 3D Scanner ermittelt wurden. Wir werden später noch weitere derartige geometrische Ausgleichsprobleme behandeln.

4.8 Schnittpunkt dreier Ebenen

Seien $E : \mathbf{e}\cdot\mathbf{x}+e_0 = 0$, $F : \mathbf{f}\cdot\mathbf{x}+f_0 = 0$ und $G : \mathbf{g}\cdot\mathbf{x}+g_0 = 0$ die Gleichungen dreier, paarweise nicht paralleler Ebenen im Raum. Die Normalvektoren $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ der Ebenen sind demnach linear unabhängig. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 &= -e_0, \\ f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 &= -f_0, \\ g_1x_1 + g_2x_2 + g_3x_3 &= -g_0, \end{aligned}$$

in den Unbekannten x_1, x_2, x_3. Da die drei Ebenen nicht parallel sind, hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung $\mathbf{s}$, welche den Schnittpunkt S der drei Ebenen festlegt.

4.9 Symmetrieebene zweier Punkte

Seien P und Q zwei Punkte im Raum. Der Ort jener Punkte X, welche von P und Q gleichen Abstand haben, ist die Symmetrieebene σ, welche durch den Mittelpunkt $\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{q})$ der Strecke PQ geht und $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ ist ein Normalvektor von σ. Daraus folgt für σ die Gleichung

$$\sigma : (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{p}) = 0. \tag{23}$$

Beispiel 4: Gegeben sind vier Punkte A, B, C, D im Raum, welche ein Tetraeder bilden. Je drei der vier Symmetrieebenen σ_{AB}, $\sigma_{BC}, \sigma_{CD}, \sigma_{DA}$ besitzen denselben Schnittpunkt $\mathbf{s}$ mit

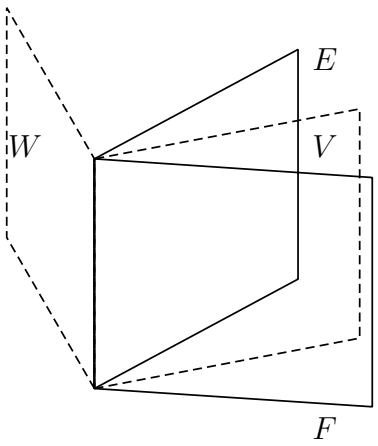
$$\|\mathbf{s} - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{s} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{s} - \mathbf{c}\| = \|\mathbf{s} - \mathbf{d}\|. \tag{24}$$

Daher ist $\mathbf{s}$ der Mittelpunkt der Umkugel des Tetraeders A, B, C, D.

4.10 Symmetrieebene zweier Ebenen

Gegeben seien zwei Ebenen $E : \mathbf{e} \cdot \mathbf{x} + e_0 = 0$, $F : \mathbf{f} \cdot \mathbf{x} + f_0 = 0$. Unter Verwendung der Normalformen für E, F ($\|\mathbf{e}\| = 1$,$\|\mathbf{f}\| = 1$) lassen sich die Symmetrieebenen einfach bestimmen.

Sind die Einheitsvektoren $\mathbf{e}$ und $\mathbf{f}$ nicht parallel, so sind $\mathbf{v} = \mathbf{e} + \mathbf{f}$ und $\mathbf{w} = \mathbf{e} - \mathbf{f}$ die Normalvektoren der Symmetrieebenen V und W.



Die Gleichungen der Symmetrieebenen sind daher

$$\begin{aligned} V : (\mathbf{e}+\mathbf{f})\cdot\mathbf{x} + (e_0+f_0) &= 0, \\ W : (\mathbf{e}-\mathbf{f})\cdot\mathbf{x} + (e_0-f_0) &= 0. \end{aligned}$$

Ist E parallel zu F und $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ gleich orientiert, so ist V die Mittenebene von E und F; W ist nicht erklärt.

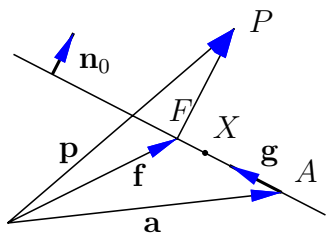
4.11 Abstand eines Punktes von einer Geraden im Raum

In Abschnitt 4.6 wurde der Normalabstand eines Punktes P von einer Ebene E mit Hilfe der Hesseschen Normalform $E : \mathbf{n}\cdot\mathbf{x} + n_0 = 0$ ($\|\mathbf{n}\| = 1$) der Ebene E berechnet, siehe (21). Hier wollen wir die Berechnung des kürzesten Abstands eines Punktes von einer Geraden G in $\mathbb{R}^3$ bestimmen.

Sei G eine Gerade, gegeben durch die Parametrisierung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{g},$$

und $\mathbf{p}$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes. Sei $\mathbf{f}$ der Ortsvektor des Fusspunkts F von P auf G. Dann ist $\mathbf{p}-\mathbf{f}$ orthogonal zum Richtungsvektor $\mathbf{g}$ von G, also $(\mathbf{p}-\mathbf{f})\cdot\mathbf{g} = 0$. Wir setzen F unbestimmt an mit $\mathbf{f} = \mathbf{a} + t_f\mathbf{g}$ und erhalten den F bestimmenden Parameterwert t_f durch



$$(\mathbf{p}-\mathbf{a}-t_f\mathbf{g})\cdot\mathbf{g} = 0 \Longrightarrow t_f = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{g}}{\mathbf{g}\cdot\mathbf{g}}.$$

Der Normalabstand $d(P,G)$ berechnet sich folglich durch

$$d(P,G) = \|\mathbf{f}-\mathbf{p}\|.$$

Betrachten wir das Parallelogramm, aufgespannt von den Vektoren $\mathbf{p}-\mathbf{a}$ und $\mathbf{g}$ und setzen wir $\|\mathbf{g}\| = 1$ voraus, so berechnet sich der Normalabstand $d(P,G)$ auch durch

$$d(P,G) = \|(\mathbf{p}-\mathbf{a})\times\mathbf{g}\|.$$

Diese Formel findet auch Anwendung bei der Bestimmung einer Ausgleichgeraden einer Punkt-

menge in $\mathbb{R}^3$.

4.12 Ausgleichsgerade in $\mathbb{R}^3$

Gegeben seien N Punkte P_i mit Ortsvektoren $\mathbf{p}_i$ und wir nehmen an, dass die Punkte in einem "geradlinigen Schlauch" liegen. Gesucht ist jene Gerade G des $\mathbb{R}^3$, welche diese Punktmenge möglichst gut annähert. Wir setzen G vorerst unbestimmt durch die Parametrisierung $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{g}$ an. Es ist nicht schwer einzusehen (siehe Ausgleichsebene), dass die gesuchte Gerade den Schwerpunkt $\mathbf{s}$ der Punktmenge $\mathbf{p}_i$ enthalten muss. Wählen wir $\mathbf{s}$ als Koordinatenursprung, so werden die Punkte P_i beschrieben durch die Ortsvektoren $\mathbf{h}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{s}$ und die gesuchte Gerade lautet $\mathbf{x}(t) = t\mathbf{g}$. Wir können $\|\mathbf{g}\| = 1$ voraussetzen.

Der Normalabstand eines festen Punktes P_i von der gesuchten Geraden G lautet $\|\mathbf{h}_i \times \mathbf{g}\|$. Die Gerade wird nun durch die Forderung

$$F(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^{N} \|\mathbf{h}_i \times \mathbf{g}\|^2 \to \min \tag{25}$$

unter der Nebenbedingung $\|\mathbf{g}\|^2 = 1$ festgelegt. Unter Benützung der Formeln aus Abschnitt 3.6 können wir die Gleichung (25) auch schreiben als

$$F(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^{N} [\mathbf{h}_i^2 \mathbf{g}^2 - (\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{g})^2] \to \min. \tag{26}$$

Seien $\mathbf{h}_i = (h_{i1}, h_{i2}, h_{i3})$ und $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$ die Koordinaten dieser Vektoren. Die Minimierung der quadratischen Funktion $F(\mathbf{g}) = F(g_1, g_2, g_3)$ führt auf die Lösung des folgenden, gewöhnlichen Eigenwertproblems

$$(A - tI) \cdot \mathbf{g} = \mathbf{o},$$

und die Einträge der Matrix A lauten

$$A = \begin{bmatrix} \sum(h_{i2}^2 + h_{i3}^2) & -\sum(h_{i1}h_{i2}) & -\sum(h_{i1}h_{i3}) \\ -\sum(h_{i1}h_{i2}) & \sum(h_{i1}^2 + h_{i3}^2) & -\sum(h_{i2}h_{i3}) \\ -\sum(h_{i1}h_{i3}) & -\sum(h_{i2}h_{i3}) & \sum(h_{i1}^2 + h_{i2}^2) \end{bmatrix}.$$

Der gesuchte Richtungsvektor $\mathbf{g}$ ist der Eigenvektor von A zum *kleinsten* Eigenwert.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Bestimmung von Ausgleichsebene und Ausgleichsgerade einer Punktmenge?

5 Affinitäten

5.1 Analytische Beschreibung

Definition 12: Eine Abbildung $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $X \mapsto X\alpha$ heißt reguläre Affinität (affine Abbildung), wenn sie bezüglich eines Parallelkoordinatensystems durch

$$\mathbf{x}' = \mathbf{a} + A \cdot \mathbf{x}, \tag{27}$$

mit einem festen Vektor $\mathbf{a}$ und einer regulären $(d \times d)$-Matrix A beschrieben wird.

1. Ausführlich lautet die Darstellung einer Affinität im $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{10} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{20} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{30} + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{a} = (a_{10}, a_{20}, a_{30})^\top, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

2. Der Ortsvektor $\mathbf{a}$ beschreibt den Bildpunkt $O\alpha$ des Ursprungs O.

3. Für die Bildpunkte $E_i\alpha$ der Einheitspunkte $E_i = \mathbf{e}_i$ mit

$$E_i = \mathbf{e}_i \quad \mathbf{e}_1 = (1,0,0)^\top, \mathbf{e}_2 = (0,1,0)^\top, \mathbf{e}_3 = (0,0,1)^\top.$$

gilt:

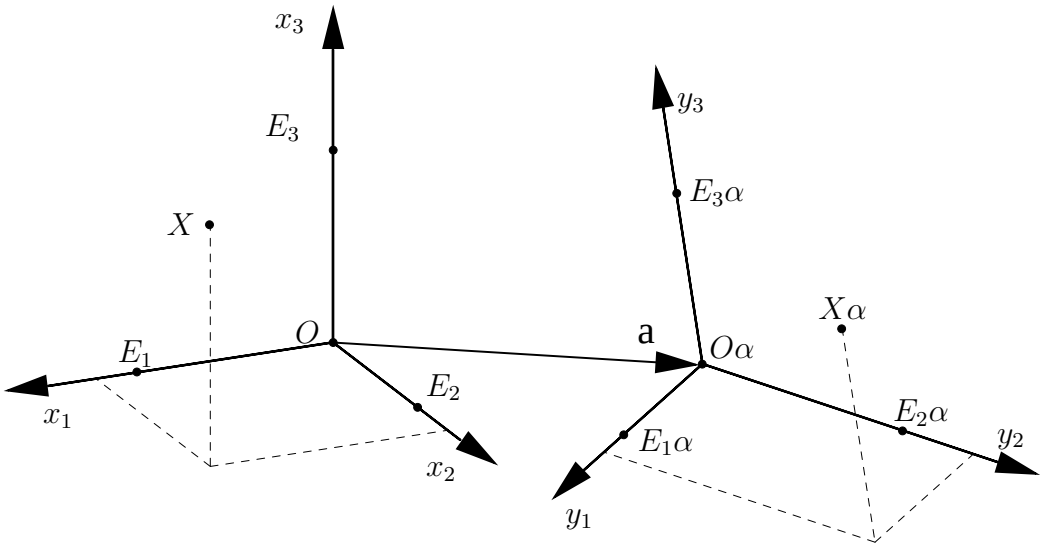
$$E_i\alpha = \mathbf{e}_i', \text{ mit } \quad \mathbf{e}_i' = \mathbf{a} + (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})^\top = \mathbf{a} + \mathbf{s}_i.$$

Hier bezeichnen wir den i-ten Spaltenvektor von A mit $\mathbf{s}_i$, und es gilt $\overrightarrow{O\alpha\, E_i\alpha} = \mathbf{s}_i$.

Die Koordinaten der Spaltenvektoren $\mathbf{s}_i$ in der Matrix A sind jene der Richtungsvektoren $\overrightarrow{O\alpha\, E_i\alpha}$ bezüglich des Parallelkoordinatensystems $\mathcal{S} = \{O; E_1, E_2, E_3\}$. $\overrightarrow{O\alpha\, E_i\alpha}$ zielen vom Bildpunkt $O\alpha$ der Ursprungs O zu den Bildpunkten $E_i\alpha$ der Einheitspunkte E_i des zugrundeliegenden Koordinatensystems $\mathcal{S}$.

4. Ist der Punkt X festgelegt durch

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d} x_i \mathbf{e}_i,$$



so gilt:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{a} + A \cdot (\sum_{i=1}^{d} x_i \mathbf{e}_i) = \mathbf{a} + \sum_{i=1}^{d} x_i A \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{a} + \sum_{i=1}^{d} x_i \mathbf{s}_i$$

Da A regulär ist, sind die $\mathbf{s}_i$ l. u. und $\mathcal{S}' = \{O\alpha;\ E_1\alpha,\ E_2\alpha,\ E_3\alpha\}$ ist ein Koordinatensystem. Die Koordinaten von X bezüglich $\mathcal{S}$ stimmen dann überein mit den Koordinaten von $X\alpha$ bezüglich $\mathcal{S}'$.

Damit läßt sich eine Affinität folgendermaßen erzeugen: Gegeben sind zwei Parallelkoordinatensysteme $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}'$. Dann ist die durch "gleiche Koordinaten" beschriebene Abbildung $\alpha : X \mapsto X\alpha$ eine Affinität, d.h. hat X bezüglich $\mathcal{S}$ die Koordinaten (x_1, x_2, x_3), so hat $X\alpha$ bezüglich $\mathcal{S}'$ die gleichen Koordinaten (x_1, x_2, x_3).

Hieraus erkennen wir, dass der Wechsel von einem Parallelkoordinatensystem zu einem anderen ebenfalls von der Bauart (27) ist.

5. Der Vektor $\overrightarrow{XY} = \mathbf{y} - \mathbf{x} := \mathbf{z}$ wird bei α abgebildet auf $\overrightarrow{X\alpha\, Y\alpha} = \mathbf{a} + A\mathbf{y} - \mathbf{a} - A\mathbf{x} = A(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = A\mathbf{z}$.

6. Die Zusammensetzung von Affinitäten ist eine Affinität.

5.2 Eigenschaften von Affinitäten

Bijektivität

Zur regulären Matrix A existiert die inverse Matrix A^{-1}. Die Umkehrabbildung α^{-1} von α ist somit eine reguläre Affinität beschrieben durch

$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{a}) = -A^{-1} \cdot \mathbf{a} + A^{-1} \cdot \mathbf{x}' \ = \mathbf{a}' + A' \cdot \mathbf{x}'.$$

Geradentreue und Ebenentreue

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \mathbf{t}_i \mapsto \mathbf{x}' = \mathbf{a} + A \cdot (\mathbf{b} + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \mathbf{t}_i) = \mathbf{a} + A \cdot \mathbf{b} + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i A \cdot \mathbf{t}_i = \mathbf{b}' + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \mathbf{t}_i'$$

Parallelentreue

Parallele Geraden g, h mit Richtungsvektor $\mathbf{t}_1$	$\mapsto$	parallele Geraden $g\alpha$, $h\alpha$ mit Richtungsvektor $A \cdot \mathbf{t}_1$
Parallele Ebenen ϵ, ϕ	$\mapsto$	parallele Ebenen $\epsilon\alpha$, $\phi\alpha$

Teilverhältnistreue und Schwerpunkttreue

Seien die Punkte Y bzw. X_i festgelegt durch die Ortsvektoren $\mathbf{y}$ bzw. $\mathbf{x}_i$, und sei $\mathbf{y}$ Affinkombination der $\mathbf{x}_i$, d.h.

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \mathbf{x}_i \ \text{ mit } \ \sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1$$

Dann folgt nach Anwendung der Affinität α:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{a} + A \cdot (\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \mathbf{x}_i) = (\sum_{i=1}^{l} \lambda_i)\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i (A \cdot \mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i (\mathbf{a} + A \cdot \mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \mathbf{x}_i'.$$

Nach Abschnitt 2.6 folgen hieraus unmittelbar Teilverhältnistreue und Schwerpunkttreue.

Geometrische Kennzeichnung

Ohne Beweis sei angeführt:

Jede bijektive, lineare Abbildung des $\mathbb{R}^d$ auf sich ist eine Affinität.

Dabei bedeutet lineare Abbildung, daß Punkte, die auf einer Geraden liegen, immer auf solche, die wieder auf einer Geraden liegen, abgebildet werden.

Volumen

Wir betrachten das von drei Vektoren $\{\mathbf{a}_i\}$ aufgespannte Parallelepiped. Dann gilt für dessen Volumen V

$$V = |det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)|.$$

Sind $\mathbf{a}'_i = A \cdot \mathbf{a}_i$ die Bilder der Vektoren $\mathbf{a}_i$ unter der durch $\mathbf{x}' = \mathbf{a} + A \cdot \mathbf{x}$ festgelegten Affinität (vgl. (12)), so gilt

$$V' = |\ det(\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_3)| = |\ det(A\mathbf{a}_1, A\mathbf{a}_2, A\mathbf{a}_3)| = |\ det(A)\ det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)| = |det(A)|V.$$

Unter einer Affinität ändert sich daher im allgemeinen das Volumen eines Körpers. Genau dann wenn $det(A) = +1$ oder $det(A) = -1$ bleibt das Volumen gleich. Bei jeder Affinität werden die Volumina aller Körper mit dem konstanten Faktur $det(A)$ multipliziert und das Verhältnis zweier Volumina bleibt daher konstant.

5.3 Perspektive Affinitäten

Definition 13: Eine Affinität α im $\mathbb{R}^3(\mathbb{R}^2)$ heißt perspektive Affinität, wenn

1. alle Punkte einer Ebene (Geraden) ($\rightarrow$ *Affinitätsachse*) einzeln fest bleiben.
2. die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte (*Affinitätsstrahlen*) $X, X\alpha$ (mit $X \neq X\alpha$) untereinander parallel sind.

Bemerkung (ohne Beweis): Ist α eine (reguläre) Affinität, so folgt aus jeder der beiden oben genannten Eigenschaften automatisch die andere.

Zur analytischen Darstellung von perspektiven Affinitäten unterscheiden wir zwei Fälle:

A. Affinitätsstrahlen nicht parallel zur Affinitätsachse:

In diesem Fall kann ein affines Koordinatensystem so gewählt werden, daß die Affinitätsachse von den ersten Koordinatenachsen aufgespannt wird, und daß die letzte Achse parallel zu den Affinitätsstrahlen ist. Dann hat die perspektive Affinität α die Darstellung:

In der Ebene:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Im Raum:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

B. Affinitätsstrahlen parallel zur Affinitätsachse (Scherung):

Ist die Fixpunktgerade bzw. -ebene wieder die x_1-Achse bzw. x_1x_2-Ebene, so hat eine Scherung die Darstellung:

In der Ebene:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Im Raum:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Wegen

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1$$

sind Scherungen flächen- bzw. volumstreue Affinitäten (vgl. Volumsberechnung nach dem Prinzip von Cavalieri).

5.4 Kongruenzabbildungen und Ähnlichkeiten

5.4.1 Kongruenzabbildungen

Eine *Kongruenz* ist eine *längentreue* Affinität; daraus folgt die *Winkeltreue*.

Für ein kartesisches Koordinatensystem $\{O; E_i\}$ folgt aus der Längen- und Winkeltreue, daß

$\{O\alpha, E_i\alpha\}$ ein kartesisches Koordinatensystem ist. Daher gilt für die Spaltenvektoren $\mathbf{s}_i$ von A:

$$\mathbf{s}_i^2 = 1, \;\; \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_k = 0 \; (i, k = 1, 2, 3, i \neq k), \quad \Leftrightarrow \quad A^T \cdot A = E.$$

Damit ist A eine *orthogonale Matrix*.

Es gilt det$A = \pm 1$. Bei det$A = +1$ sprechen wir von einer *gleichsinnigen Kongruenz (Bewegung)*. Für det$A = -1$ erhalten wir eine *gegensinnige Kongruenz*; sie ist zusammensetzbar aus einer Spiegelung an einer Ebene und einer gleichsinnigen Kongruenz.

Wir wollen die Bewegungen noch etwas genauer betrachten. Beginnen wir mit dem Sonderfall einer *Drehung* α um eine Achse F durch den Winkel ϕ. Sofern F in die x_3-Achse eines kartesischen Systems gelegt wird, bleiben O und E_3 fest, und es ist

$$E_1\alpha = \mathbf{s}_1 = (\cos\phi, \sin\phi, 0), \; E_2\alpha = \mathbf{s}_2 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0).$$

Daher lautet die Darstellung der Drehung

$$\mathbf{x}' = A \cdot \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ein weiteres spezielles Beispiel einer Kongruenzabbildung ist eine *Schiebung (Translation)*, $\mathbf{x}' = \mathbf{a} + \mathbf{x}$. Man kann zeigen, dass sich jede Kongruenzabbildung durch Zusammensetzung einer Drehung um eine geeignete Achse F und einer Schiebung längs derselben Achse F darstellen lässt; man spricht von einer (diskreten) *Schraubung* um die Achse F.

Jede Drehung lässt sich in einen stetigen Drehungsvorgang (kontinuierliche Drehung) einbetten. Man braucht sich bloß den nun stetig variierenden Drehwinkel ϕ als Zeit t vorstellen. Alle diese damit beschriebenen Drehungen bilden eine Gruppe bezüglich der Operation des Hintereinanderausführens.

Ganz analog kann man bei der Schraubung vorgehen. Wir fassen den Drehwinkel als Zeit t auf, und die dazu gehörige Schiebstrecke sei $p \cdot t$; p heißt *Schraubparameter*. Wenn wir wieder die Achse F in die x_3-Achse legen, hat die resultierende kontinuierliche Schraubung die Darstellung

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos t - x_2 \sin t, \\ x_2' &= x_1 \sin t + x_2 \cos t, \\ x_3' &= x_3 + pt. \end{aligned} \tag{28}$$

Auch diese Kongruenzen bilden eine Gruppe. Die kontinuierlichen Schraubungen spielen in der Raumkinematik eine wichtige Rolle, weil sie sich hinsichtlich der Eigenschaften erster Ordnung (Geschwindigkeiten) so wie ein beliebiger stetiger Bewegungsvorgang verhalten. Wir werden dieses Thema später nochmals aufgreifen.

5.4.2 Ähnlichkeiten

Ähnlichkeiten sind winkeltreue Affinitäten. Bei diesen hat die Matrix A aus (12) die Bauart $A = \lambda B$ mit einer orthogonalen Matrix B und einem $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5.5 Singuläre Affinitäten und Parallelprojektionen

Eine Affinität α ist festgelegt, wenn die Bildpunkte des Ursprungs und der Einheitspunkte eines zugrundegelegten affinen Koordinatensystems bestimmt sind.

Somit ist eine reguläre Affinität in der Ebene bzw. im Raum durch zwei entsprechende beschriftete Dreiecke bzw. Tetraeder festgelegt.

Ebenso ist eine Affinität α festgelegt, wenn der Bildpunkt des Ursprungs (festgelegt durch $\mathbf{a}$) und die Bilder $\mathbf{e}_i\alpha$ der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_i$ bestimmt sind.

Im Fall einer regulären Affinität sind die $\mathbf{e}_i\alpha$ linear unabhängig. Läßt man in der Darstellung (12) auch singuläre Matrizen A zu, so erhält man singuläre Affinitäten. Der Rang der Matrix A gibt dann die Dimension des Bildraumes an, der mit der Dimension des Unterraumes übereinstimmt, der durch die - jetzt linear abhängigen - Vektoren $\mathbf{e}_i\alpha = \mathbf{s}_i$ aufgespannt wird.

Durch $\mathbf{x}' = A \cdot \mathbf{x}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wird eine *Parallelprojektion* auf die Ebene $x_3 = 0$ beschrieben. Offenbar wird der Punkt $(0, 0, 1)$ auf $(\lambda, \mu, 0)$ abgebildet; die Sehstrahlen sind also parallel zum Vektor $(\lambda, \mu, -1)$. Im vorliegenden Fall ist der Rang von A gleich 2.

Jede singuläre Affinität mit einer Matrix vom Rang 2 ist aus einer Parallelprojektion und einer regulären Affinität in der Bildebene der Projektion zusammensetzbar.

Bei einer singulären Affinitat mit einer Matrix A vom Rang 1 liegt das gesamte Bild des $\mathbb{R}^3$ in einer Geraden.

5.6 Eigenschaften von Parallelprojektionen

Analog zum Fall der regulären Affinitäten zeigt man folgende Eigenschaften:

1. Parallelentreue
2. Teilverhältnistreue
3. Geraden parallel zur Projektionsrichtung (projizierende Geraden) werden auf Punkte abgebildet. Ebenen parallel zur Projektionsrichtung (projizierende Ebenen) werden auf Geraden abgebildet.
4. Geraden parallel zur Bildebene (Hauptgeraden) und Ebenen parallel zur Bildebene (Hauptebenen) werden unverzerrt abgebildet. (Diese Geraden bzw. Ebenen können durch eine Parallelverschiebung in Sehstrahlrichtung mit den Bildern zur Deckung gebracht werden.)

5.7 Normalprojektionen

Ist die Projektionsrichtung normal zur Bildebene spricht man von Normalprojektion. Zusätzlich zu den Eigenschaften der Parallelprojektionen gilt für Normalprojektionen der

Satz vom rechten Winkel:
Sei n eine Normalprojektion. Dann folgt aus je zwei der folgenden drei Aussagen die dritte.

1. Die Geraden a, b sind orthogonal.
2. Mindestens eine der Geraden a, b ist parallel zur Bildebene (Hauptgerade), keine der Geraden ist parallel zur Projektionsrichtung (die Geraden sind nicht projizierend).
3. Die Bildgeraden a^n, b^n sind orthogonal.

Normalprojektionen werden für technische Zeichnungen verwendet. Dazu benutzt man oft die Projektionen auf die Koordinatenebenen eines dem Objekt angepassten Koordinatensystems (*Hauptrisse*):

Grundriss ...	Projektion auf die x_1, x_2-Ebene:	$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, 0)$.
Aufriss ...	Projektion auf die x_2, x_3-Ebene:	$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (0, x_2, x_3)$.
Kreuzriss ...	Projektion auf die x_1, x_3 Ebene:	$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, 0, x_3)$.

Weiters ist gesichert, dass bei einem Normalriss keine extremen Verzerrungen auftreten und damit ist ein guter Bildeindruck gewährleistet. Denn es gilt für eine Strecke AB, die mit der Bildebene einen Winkel α einschließt:

$$\overline{A^n B^n} = \overline{AB}\ \cos\alpha.$$

D.h. bei Normalprojektion ist die Bildstrecke nicht länger als das Original. Dies muss bei einer Parallelprojektion nicht gelten (vgl. Schatten bei untergehender Sonne).

6 Projektive Geometrie

6.1 Zentralprojektion

Einem Foto liegt folgende geometrische Abbildung des Raumes auf die Ebene zugrunde: Gegeben sei eine Ebene π (Bildebene) und ein Projektionszentrum (Augpunkt) $Z \notin \pi$.

Die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} c\colon & \mathcal{P} & \to & \pi \\ & P & \mapsto & P^c := [ZP] \cap \pi \text{ für } P \neq Z \end{array}$$

heißt *Zentralprojektion* mit dem *Zentrum* Z und der *Bildebene* π. P^c heißt *Zentralriß* von P.

Eigenschaften:

1. Z hat kein Bild.
2. Jeder von Z verschiedene Punkt V in der *Verschwindungsebene* $\nu \parallel \pi$ durch Z hat keinen (eigentlichen) Bildpunkt.
3. Die Bilder der Punkte einer Geraden g $(Z \notin g, g \not\subset \nu)$ liegen auf der Geraden $g^c = [Zg] \cap \pi$. Geraden durch Z (Projektionsstrahlen, Sehgeraden) werden auf einen Punkt abgebildet, sofern sie nicht in ν liegen.
4. Die Bilder paralleler Geraden g, h gehen durch den gemeinsamen *Fluchtpunkt* U^c, den Schnittpunkt des zu g, h parallelen Projektionsstrahls mit π.
5. Die Einschränkung der Zentralprojektion auf eine Gerade g ist nicht bijektiv, da $V \in \nu$ kein Bild und U^c kein Urbild hat.

Diese Eigenschaften zeigen, dass ein geeigneter geometrischer Rahmen für das Studium der Zentralprojektion eine Geometrie ist, in der parallele Geraden als schneidend gelten. Um dies zu erreichen, werden neue Punkte, die wir *Fernpunkte* nennen, der vorhandenen Punktmenge hinzugefügt.

6.2 Projektive Erweiterung der Ebene

Wir fügen zu den gewöhnlichen Punkten weitere Punkte hinzu und definieren:

Definition 14: Zwei parallele Geraden schneiden einander in genau einem *Fernpunkt*. Die um ihre Fernpunkte erweiterte Anschauungsebene heißt *projektiv abgeschlossene Anschauungsebene*. Alle Fernpunkte erfüllen die *Ferngerade*.

Wir nennen die bisherigen Punkte auch *eigentliche* Punkte und die neuen Fernpunkte *uneigentliche* Punkte. Fernpunkte werden graphisch durch Pfeile symbolisiert.

Beachte: Jede Gerade enthält nur einen Fernpunkt. Entgegengesetzt orientierte Pfeile bestimmen denselben Fernpunkt.

6.3 Homogene Koordinaten in der Ebene

6.3.1 Homogene Punktkoordinaten

Wir betten die auf das Koordinatensystem $\mathcal{S} = (O; x, y)$ bezogene Ebene ϵ so in den auf $\mathcal{R} = (U; x_1, x_2, x_3)$ bezogenen Raum ein, daß ϵ die Gleichung $x_3 = 1$ hat, die x_1-Achse parallel zur x-Achse, die x_2-Achse parallel zur y-Achse und $O \in x_3$-Achse ist.

Für jeden eigentlichen und uneigentlichen Punkt $P \in \epsilon$ gibt es die eindeutige Verbindungsgerade $p = [UP]$. Ein Richtungsvektor $\mathbf{x}$ von p in $\mathcal{R}$ legt P eindeutig fest. Da mit $\mathbf{x}$ auch $\lambda\mathbf{x}$ ($\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) ein Richtungsvektor von p ist, sind die so gewonnenen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) von P nur bis auf einen gemeinsamen Faktor eindeutig bestimmt. Man nennt sie daher *homogene Koordinaten* von P und schreibt:

$$P = (x_1 : x_2 : x_3) := \{(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} =: \mathbf{x}\mathbb{R}.$$

Man spricht von homogenen affinen Koordinaten oder homogenen kartesischen Koordinaten, je nachdem ob $\mathcal{S} = (O; x, y)$ affin oder kartesisch ist.

Ist $P(x, y) \in \epsilon$ ein eigentlicher Punkt, so ist $\mathbf{x} = (x, y, 1)$ ein Richtungsvektor von $p = [UP]$

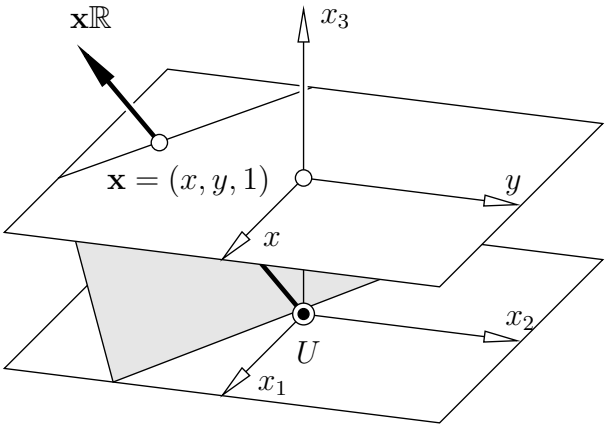


Abbildung 1: Einführung homogener Koordinaten.

und P hat die homogenen Koordinaten

$$(x_1 : x_2 : x_3) = (x : y : 1). \tag{29}$$

Haben wir also die homogenen Koordinaten eines eigentlichen Punktes gegeben, so ergeben sich die gewöhnlichen *inhomogenen* Koordinaten als

$$x = \frac{x_1}{x_3},\ y = \frac{x_2}{x_3}. \tag{30}$$

Ist P_u Fernpunkt der Geraden $g \subset \epsilon$, die bezüglich $(O; x, y)$ den Richtungsvektor (t_1, t_2) besitzt, so ist $\mathbf{x} = (t_1, t_2, 0)$ ein Richtungsvektor von $p = [UP_u]$. Die homogenen Koordinaten von P_u lauten daher

$$(x_1 : x_2 : x_3) = (t_1 : t_2 : 0). \tag{31}$$

6.3.2 Homogene Geradenkoordinaten

Neben den homogenen Koordinaten für Punkte lassen sich auch homogene Koordinaten für Geraden einführen: Jede Gerade $g \subset \epsilon$ läßt sich mit U zu einer Ebene verbinden, welche bezüglich $\mathcal{R}$ eine Gleichung der Bauart

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \quad (u_1, u_2, u_3) \neq \mathbf{o},$$

besitzt. Die Koeffizienten (u_1, u_2, u_3) sind wieder nur bis auf einen gemeinsamen Faktor λ eindeutig bestimmt. Man nennt $[u_1 : u_2 : u_3]$ *homogene Geradenkoordinaten* von g und schreibt $g = \mathbb{R}\mathbf{u}$ mit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Formal erhält man also die homogenen Koordinaten einer Geraden als Koeffizienten ihrer Gleichung. Sind $(O; x, y)$ und $(U; x_1, x_2, x_3)$ kartesische Koordinatensysteme, so sind die Geradenkoordinaten von g die Koordinaten eines Normalvektors der Ebene $[Ug]$.

Die Ferngerade von ϵ besitzt die homogenen Geradenkoordinaten $[0 : 0 : 1]$.

6.3.3 Inzidenzbedingung

$P = (x_1 : x_2 : x_3) = \mathbf{x}\,\mathbb{R}$ liegt genau dann auf $g = [u_1 : u_2 : u_3] = \mathbb{R}\,\mathbf{u}$, wenn gilt

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0. \tag{32}$$

Verbindungsgerade zweier Punkte:

Jeder Punkt auf der Verbindungsgeraden $g = [PQ]$ der Punkte $P = (p_1 : p_2 : p_3) = \mathbf{p}\,\mathbb{R}$, $Q = (q_1 : q_2 : q_3) = \mathbf{q}\,\mathbb{R}$ wird durch

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{p} + \mu \mathbf{q}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \tag{33}$$

mit geeigneten (λ, μ) erfasst. (33) ist die *Parameterdarstellung* der Geraden $[PQ]$. Beachte, dass es nur auf das Verhältnis $\lambda : \mu$ ankommt; die Parameter sind also selbst homogen.

Für die Geradenkoordinaten $\mathbf{u}$ gilt nach (32) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{q} = 0$ und somit

$$g = \mathbb{R}\,\mathbf{u} = \mathbb{R}\,(\mathbf{p} \times \mathbf{q}). \tag{34}$$

Schnittpunkt zweier Geraden:

Jede Gerade l durch den Schnittpunkt $S = \mathbf{s}\,\mathbb{R} = (gh)$ der Geraden $g = \mathbb{R}\,\mathbf{g} = [g_1 : g_2 : g_3]$ und $h = \mathbb{R}\,\mathbf{h} = [h_1 : h_2 : h_3]$ wird durch

$$l = \mathbb{R}\,\mathbf{l} = \lambda \mathbf{g} + \mu \mathbf{h}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \tag{35}$$

erfasst.

Für die Punktkoordinaten $\mathbf{s}$ gilt nach (32) $\mathbf{g} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{s} = 0$ und somit

$$S = \mathbf{s}\,\mathbb{R} = \left[\begin{vmatrix} g_2 & g_3 \\ h_2 & h_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} g_1 & g_3 \\ h_1 & h_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}\right] = (\mathbf{g} \times \mathbf{h})\,\mathbb{R}. \tag{36}$$

Wir erkennen also, dass die Berechnung des Schnittpunkts zweier Geraden bzw. der Verbindungsgeraden zweier Punkte formal identisch ablaufen. Man kann darauf das später noch genauer besprochene Dualitätsprinzip gründen. Für die praktische Implementierung geometrischer Algorithmen bringen homogene Koordinaten, wenn man sie richtig einsetzt, weniger Sonderfälle und erhöhte numerische Stabilität.

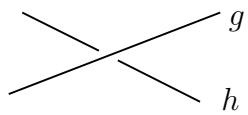
6.4 Projektive Erweiterung des Raumes

Wir diskutieren die gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen:

1. Zwei Geraden g, h sind

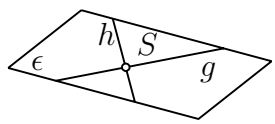
   (a) **windschief**

   g und h haben keinen gemeinsamen Punkt und liegen nicht in einer Ebene.



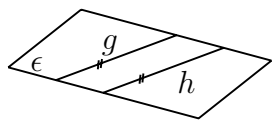
   (b) **schneidend**

   Es existiert ein gemeinsamer Punkt S und beide inzidieren mit einer Ebene ϵ.



   (c) **parallel**

   Es existiert kein gemeinsamer (eigentlicher) Punkt, aber eine Ebene ϵ, mit der beide inzidieren.

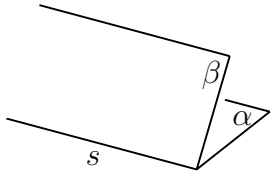


   Wir fügen wieder *Fernpunkte* hinzu, wobei alle zueinander parallelen Geraden einen gemeinsamen Fernpunkt besitzen, und jeder Geraden genau ein Fernpunkt angehört. Im Sinne der projektiven Geometrie, d.h. wenn wir nicht zwischen eigentlichen Punkten und Fernpunkten unterscheiden, sind die Fälle (b) und (c) gleichwertig.

2. Zwei Ebenen α, β sind

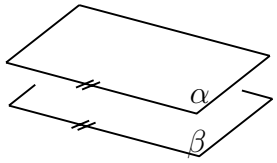
(a) **schneidend**

Es gibt eine (eigentliche) Schnittgerade s.



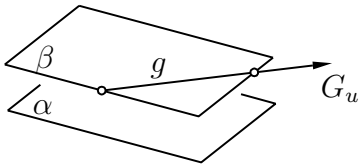
(b) **parallel**

Es gibt keinen (eigentlichen) gemeinsamen Punkt.



Wir fügen *Ferngeraden* hinzu, wobei alle zueinander parallelen Ebenen eine gemeinsame Ferngerade besitzen, und jeder Ebene genau eine Ferngerade angehört. In der projektiven Geometrie liegt also nur mehr ein einziger Fall für die gegenseitiger Lage zweier verschiedener Ebenen vor.

3. Gerade g und Ebene ϵ
   (a) g liegt in ϵ.
   (b) eigentlicher Schnittpunkt $S = g \cap \alpha$
   (c) g ist parallel zu α
   $g \cap \alpha = \{G_u\}$, G_u ist Fernpunkt.



In der projektiven Geometrie sind (b) und (c) identisch. Die Ferngerade von ϵ wird von den Fernpunkten aller Geraden $g \parallel \epsilon$ gebildet.

Der um die Fernelemente (Fernpunkte, Ferngeraden) erweiterte Anschauungsraum heißt *projektiv abgeschlossener Anschauungsraum*. Alle Fernpunkte und Ferngeraden liegen in der *Fernebene*. Dass alle Fernelemente mit einer Ebene inzidieren werden wir analytisch nachweisen; dies ist keine Definition.

6.5 Homogene Koordinaten im Raum

6.5.1 Homogene Punktkoordinaten

Analog zur ebenen Geometrie kann man durch Einbetten des Raumes $\mathbb{R}^3$ (mit dem Koordinatensystem $(O; x, y, z)$) in einen vierdimensionalen Raum $\mathbb{R}^4$ mit dem Koordinatensystem $(U; x_1, x_2, x_3, x_4)$

in dem der $\mathbb{R}^3$ die Gleichung $x_4 = 1$ besitzt, homogene Punktkoordinaten definieren:

$$P = (x_1 : x_2 : x_3 : x_4) =: \mathbf{x}\mathbb{R}.$$

Für eigentliche Punkte gilt

$$P = (x, y, z) = (x : y : z : 1), \tag{37}$$

bzw.

$$x = \frac{x_1}{x_4},\ y = \frac{x_2}{x_4},\ z = \frac{x_3}{x_4}. \tag{38}$$

Für einen Fernpunkt P_u der Geraden g mit dem Richtungsvektor (t_1, t_2, t_3) gilt

$$P_u = (t_1 : t_2 : t_3 : 0). \tag{39}$$

6.5.2 Homogene Ebenenkoordinaten

Jede eigentliche Ebene besitzt eine lineare Gleichung

$$u_1 x + u_2 y + u_3 z + u_4 = 0.$$

Ihre homogenen Koordinaten sind

$$[u_1 : u_2 : u_3 : u_4] = \mathbb{R}\mathbf{u}. \tag{40}$$

Genau für Fernpunkte ist $x_4 = 0$, sie erfüllen also eine Ebene, die Fernebene, mit den Ebenenkoordinaten $[0 : 0 : 0 : 1]$.

6.5.3 Inzidenzbedingung

Ein Punkt $P = (x_1 : x_2 : x_3 : x_4) = \mathbf{x}\mathbb{R}$ inzidiert mit der Ebene $\epsilon = [u_1 : u_2 : u_3 : u_4] = \mathbb{R}\mathbf{u}$ genau dann wenn

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0. \tag{41}$$

6.5.4 Homogene Geradenkoordinaten

Es lassen sich auch homogene Geradenkoordinaten einführen. Die Verbindungsgerade der zwei Punkte $P(p_1 : p_2 : p_3 : p_4)$ und $Q(q_1 : q_2 : q_3 : q_4)$ hat dann die Koordinaten (*Plücker-Koordinaten*)

$$g = (g_1 : g_2 : g_3 : g_4 : g_5 : g_6) =$$
$$\left(\begin{vmatrix} p_4 & p_1 \\ q_4 & q_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_4 & p_2 \\ q_4 & q_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_4 & p_3 \\ q_4 & q_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_3 & p_1 \\ q_3 & q_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \right). \tag{42}$$

Diese 6 Koordinaten sind aber nicht unabhängig voneinander wählbar, sondern durch die sogenannte Plücker-Bedingung,

$$g_1 g_4 + g_2 g_5 + g_3 g_6 = 0,$$

gekoppelt. Jedes homogene 6-Tupel reeller Zahlen, welches diese Bedingung erfüllt, beschreibt genau eine Gerade. Dies steht im Einklang mit der Tatsache, dass die *Geradenmenge des Raumes eine vierdimensionale Menge* ist. Eine elementare Möglichkeit dies einzusehen besteht in der Festlegung jeder Geraden durch ihr Spurpunktepaar in zwei festen Ebenen; die damit nicht erfassbaren Geraden (Treffgeraden der Schnittgerade der beiden Spurenebenen) erfüllen nur eine 3-parametrige Menge.

6.6 Kollineationen

In der projektiven Geometrie spielen die regulären linearen Abbildungen, genannt Kollineationen, eine zentrale Rolle. Wir können sie als Verallgemeinerungen der Affinitäten auffassen. Analog zu Def. 12 definieren wir

Definition 15: Eine Abbildung $\kappa : P^3 \to P^3$ (P^3 ... projektiv abgeschlossener $\mathbb{R}^3$), die in homogenen Koordinaten durch $\mathbf{x}\mathbb{R} \mapsto \mathbf{x}'\mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{x}' = A \cdot \mathbf{x} \tag{43}$$

beschrieben wird, heißt Kollineation, sofern A eine reguläre (4×4)-Matrix ist, d.h. $\det(A) \neq 0$.

Ausführlich lautet die Darstellung einer Kollineation

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

6.6.1 Eigenschaften

1. Eine Kollineation ist *bijektiv*, da zu der regulären Matrix A die inverse Matrix existiert. Die Umkehrabbildung wird dann beschrieben durch $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{x}'$.

2. Eine Kollineation ist *geradentreu* und *ebenentreu*, denn: Sind $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ homogene Koordinatenvektoren der Punkte P, Q, so gilt für einen Punkt R der Verbindungsgeraden $\mathbf{r} = \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}$. Für $\mathbf{r}'$ erhalten wir $\mathbf{r}' = A \cdot (\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}) = \lambda(A \cdot \mathbf{p}) + \mu(A \cdot \mathbf{q}) = \lambda\mathbf{p}' + \mu\mathbf{q}'$.

3. Die Eigenschaften 1. und 2. sind sogar kennzeichnend. Es gilt (ohne Beweis): *Eine bijektive Abbildung $\kappa : P^3 \to P^3$, welche kollineare Punkte stets wieder in kollineare Punkte abbildet, ist eine Kollineation.*

4. Jede reguläre (4x4)-Matrix beschreibt eine Kollineation $\kappa : \mathbf{x}\mathbb{R} \to \mathbf{x}'\mathbb{R}$ durch $\mathbf{x}' = A \cdot \mathbf{x}$. Die zugehörige Matrix ist aber nicht eindeutig, da mit A auch jedes Vielfache λA von A die gleiche Kollineation beschreibt.

5. **Transformation der Ebenenkoordinaten**

   Mit (43) wissen wir, wie Punktkoordinaten transformiert werden. Es gilt $\mathbf{x}'\mathbb{R} = (A \cdot \mathbf{x})\mathbb{R}$. Ist eine Ebene ϵ durch die Koordinaten $\mathbb{R}\mathbf{u}$ festgelegt, so liegt ein Punkt X genau dann in der Ebene, wenn $\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{x} = 0$, und der Bildpunkt X' genau dann in ϵ' wenn $\mathbf{u}'^T \cdot \mathbf{x}' = 0$. Wegen
   $$\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u}^T \cdot A^{-1} \cdot \mathbf{x}' = (\mathbf{u}^T \cdot A^{-1}) \cdot \mathbf{x}'$$
   gilt $\mathbf{u}'^T = \mathbf{u}^T \cdot A^{-1}$, also werden die Ebenenkoordinaten gemäß
   $$\mathbf{u}' = A^{-T} \cdot \mathbf{u} \quad \text{mit} \quad A^{-T} = (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$
   transformiert.

6. **Doppelverhältnis** Seien A, B, C, D vier Punkte auf einer Geraden g. Dann heißt
   $$DV(ABCD) := \frac{TV(ABC)}{TV(ABD)}$$
   Doppelverhältnis der vier Punkte A, B, C, D.

   Liegen die Punkte auf der Verbindungsgeraden der Punkte P, Q mit den homogenen Koordinatenvektoren $\mathbf{p}, \mathbf{q}$, so gilt $\mathbf{a} = \lambda_A \mathbf{p} + \mu_A \mathbf{q}$, etc. Man kann zeigen, dass sich dann das Doppelverhältnis berechnen läßt durch:
   $$DV(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_A & \mu_A \\ \lambda_C & \mu_C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_B & \mu_B \\ \lambda_C & \mu_C \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \lambda_A & \mu_A \\ \lambda_D & \mu_D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_B & \mu_B \\ \lambda_D & \mu_D \end{vmatrix}}.$$
   Sind drei Punkte ABC einer Geraden gegeben, dann können die homogenen Koordinatenvektoren so normiert werden, dass $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Jeder Punkt $\mathbf{x}$ auf der Geraden gestattet die Darstellung $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$. $(\lambda : \mu)$ können als homogene Koordinaten auf der Geraden AB interpretiert werden. Der Wert $\xi = \lambda/\mu$ stimmt nach obigem überein mit dem

$DV(ABCX)$, wobei den Punkten A, B, C der Reihe nach die Werte $\infty, 0, 1$ zugeordnet sind (*projektive Skala*).

Durch Grenzübergang zeigt man: Ist D ein Fernpunkt, so gilt $DV(ABCD) = TV(ABC)$.

Aus diesen Überlegungen folgt dann: Eine Kollineation ist *doppelverhältnistreu*, i.a. aber nicht teilverhältnistreu.

7. **Verschwindungs- und Fluchtebene**

   Alle Punkte X deren Bilder $X\kappa$ Fernpunkte sind, werden charakterisiert durch

   $$x_4' = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0. \tag{44}$$

   Sie erfüllen also eine Ebene, die *Verschwindungsebene*.

   Um das Bild der Fernebene zu erhalten, suchen wir das Urbild der Verschwindungsebene für die Umkehrabbildung $\kappa^{-1} : \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}'$. Das Bild der Fernebene ist daher ebenfalls eine Ebene und heißt *Fluchtebene*.

8. **Bilder der Einheitspunkte**

   Bezeichnen $E_1 = (1 : 0 : 0 : 0), E_2 = (0 : 1 : 0 : 0), E_3 = (0 : 0 : 1 : 0), E_4 = (0 : 0 : 0 : 1)$ die Einheitspunkte. Ein Koordinatenvektor des Bildpunktes E_i' von E_i unter der Kollineation ϕ ist der i-te Spaltenvektor der zugehörigen Transformationsmatrix A. Durch diese vier Punkte allein sind die Kollineation und die Matrix A aber noch nicht festgelegt, da der Koordinatenvektor von $\mathbf{e}_i'$ mit einem beliebigen von Null verschiedenen Faktor multipliziert werden kann. Der Punkt $E(1 : 1 : 1 : 1)$ mit $\mathbf{e} = \sum \mathbf{e}_i$ wird abgebildet auf $\mathbf{e}' = \sum \mathbf{e}_i'$. Durch diese Eigenschaft ist dann die Kollineation festgelegt.

9. **Festlegen einer Kollineation:** Eine Kollineation in der Ebene (im Raum) ist durch vier (bzw. fünf) Paare entsprechender Punkte X_i, X_i' festgelegt: Nehmen wir an, es seien die homogenen Koordinaten $X_i = \mathbf{x}_i\mathbb{R}, X_i' = \mathbf{x}_i'\mathbb{R}$ bekannt. Um die Matrix A zu bestimmen, ist das Gleichungssystem

   $$\lambda_i\mathbf{x}_i' = A \cdot \mathbf{x}_i,$$

   zu lösen. Hierin kommen auch die unbekannten Faktoren λ_i vor! Im Raum liegt also ein homogenes lineares System von $5 \cdot 4 = 20$ skalaren Gleichungen in 21 Unbekannten (den 16 Einträgen von A und $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$) vor. Hieraus ist das Verhältnis der Unbekannten, also A bis auf einen unwesentlichen gemeinsamen Faktor aller Einträge, berechenbar.

Die Berechnung kann auch so erfolgen, dass wir zuerst die Urpunkte X_i auf die Einheitspunkte abbilden und diese dann auf die Bildpunkte X_i'. Die Zusammensetzung der beiden Abbildungen ist dann die gewünschte Kollineation.

6.6.2 Perspektive Kollineationen

Definition 16: Eine Kollineation im Raum (in der Ebene) heißt *perspektive Kollineation*, wenn sie alle Punkte einer Ebene (Geraden) einzeln fix läßt (*Kollineationsachse*).

Es folgt dann (o.B.): Es existiert ein Punkt S (*Kollineationszentrum*), so dass X, $X\kappa$, S stets auf einer Geraden liegen.

Eine perspektive Kollineation ist durch das Zentrum S, die Achse a und ein Punktepaar $X, X\kappa$ in zulässiger Lage eindeutig bestimmt, wie die Vervollständigungskonstruktion in Abb. 2 zeigt. Dort sind auch Fluchtgerade und Verschwindungsgerade konstruiert.

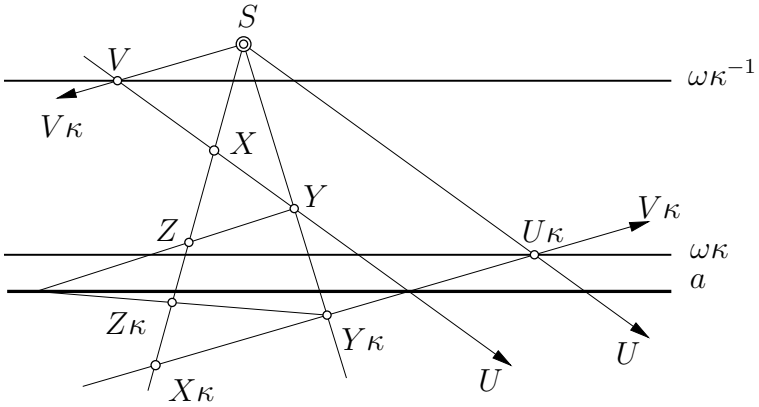


Abbildung 2: Perspektive Kollineation in der Ebene.

Bemerkung 7: Wählt man das Zentrum S als Fernpunkt, so erhält man eine perspektive Affinität. Wenn die Achse uneigentlich ist, so ergibt sich entweder eine zentrische Ähnlichkeit (S eigentlich) oder eine Translation (S uneigentlich), siehe Abb. 3.

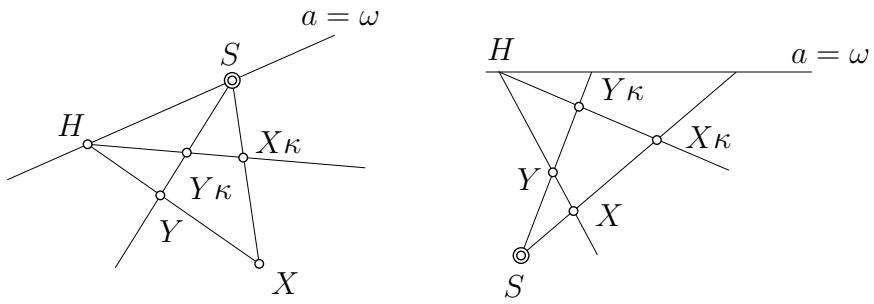


Abbildung 3: Translation und zentrische Ähnlichkeit als spezielle perspektive Kollineationen.

6.6.3 Anwendungen

Entzerrung

Die Zusammensetzung einer Zentralprojektion von ϵ nach $\overline{\epsilon}$ und einer anschließenden Bewegung nach $\overline{\overline{\epsilon}}$ ist eine Kollineation κ von ϵ nach $\overline{\overline{\epsilon}}$. Umgekehrt kann jede Kollineation einer Ebene auf eine andere als Produkt einer Zentralprojektion und einer Bewegung erzeugt werden.

Ein Foto eines ebenen Objekts und das Original hängen also durch eine Kollineation zusammen. Zur Entzerrung des Fotos benötigen wir vier Paare entsprechender Punkte (Passpunkte). In der Praxis verwendet man aber meist mehr als vier Passpunkte und löst dann ein entsprechendes Ausgleichsproblem.

Zahlreiche Anwendungen der Eigenschaften von Kollineationen und Zentralprojektionen findet man im Computer Vision.

6.7 Homogene Schreibweise von Affinitäten

Eine Affinität wird bezüglich (inhomogener) affiner Koordinaten im Raum beschrieben durch

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \mathbf{a} + A \cdot \mathbf{x}.$$

Kennzeichnen wir den Koordinatenvektor der homogenen Koordinaten des Punktes X durch $\overline{\mathbf{x}}$, so gilt:

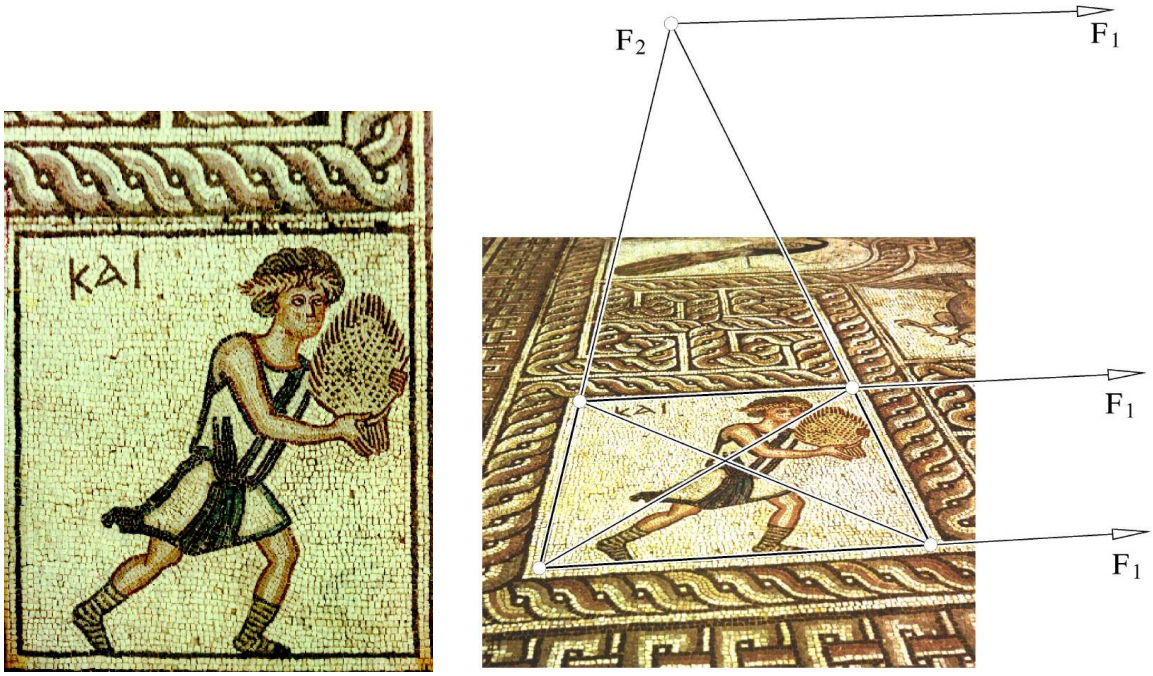


Abbildung 4: Entzerrung eines Fotos einer ebenen Figur (Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung, TU Wien).

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overline{\mathbf{x}}' = A_h \cdot \overline{\mathbf{x}}.$$

Ein Vorteil der homogenen Darstellung ist die einfachere Beschreibung der Hintereinanderausführung von Affinitäten. Die Zusammensetzung $\alpha : X \mapsto X\alpha = X\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ von Affinitäten α_i mit zugehörigen Matrizen A_h^i lautet nun

$$\overline{\mathbf{x}}' = A_h^n \cdot A_h^{n-1} \cdots A_h^2 \cdot A_h^1 \cdot \overline{\mathbf{x}}.$$

Dies wird z.B. in der Robotik verwendet.

6.8 Korrelation

Eine Korrelation ist eine Abbildung ϕ der Punktmenge auf die Ebenenmenge des projektiven Raumes. Ein Punkt $X = \mathbf{x}\mathbb{R}$ wird abgebildet auf eine Ebene $X\phi = \epsilon = \mathbb{R}\mathbf{u}'$ vermöge einer linearen Transformation der Koordinaten,

$$\mathbf{u}' = A \cdot \mathbf{x}. \tag{45}$$

Wie bei den Kollineationen ist A als reguläre (4×4)-Matrix vorausgesetzt.

Eine Korrelation hat folgende Eigenschaften:

- kollineare Punkte $\rightarrow$ koaxiale Ebenen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &\mapsto \mathbf{u}'_i \\ \mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 &\mapsto \mathbf{u}' = \lambda_1\mathbf{u}'_1 + \lambda_2\mathbf{u}'_2. \end{aligned}$$

- koplanare Punkte $\rightarrow$ kopunktale Ebenen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &\mapsto \mathbf{u}'_i \\ \mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3 &\mapsto \mathbf{u}' = \lambda_1\mathbf{u}'_1 + \lambda_2\mathbf{u}'_2 + \lambda_3\mathbf{u}'_3. \end{aligned}$$

Mit jeder Korrelation ist also im Sinne der letztgenannten Eigenschaft auch eine Abbildung von Ebenen auf Punkte verknüpft. Völlig analog zur Herleitung der Transformation der Ebenenkoordinaten unter einer Korrelation zeigt man, dass diese so genannte *duale Korrelation* beschrieben wird durch

$$\mathbb{R}\mathbf{u} \mapsto \mathbb{R}\mathbf{x}' = (A^{-T} \cdot \mathbf{x})\mathbb{R}. \tag{46}$$

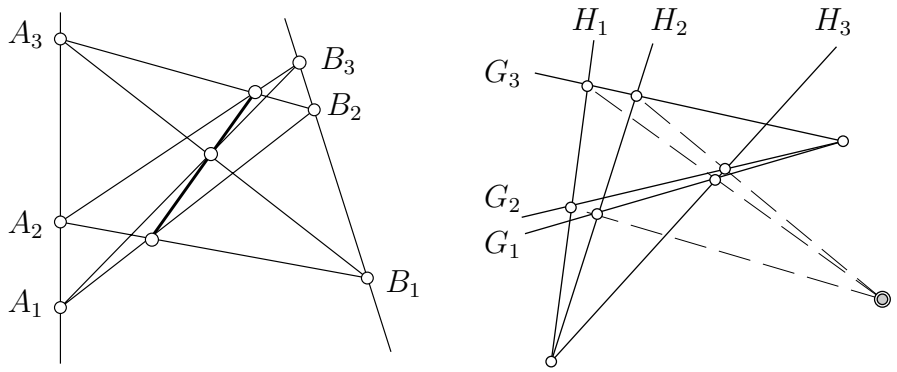


Abbildung 5: Links: Satz von Pappos. Rechts: der dazu duale Satz von Brianchon.

6.9 Dualitätsprinzip

Jeder Satz der projektiven Geometrie (nur Punkte, Geraden, Ebenen, Inzidenz kommen vor) geht wieder in einen richtigen Satz der projektiven Geometrie über, wenn Inzidenzen erhalten bleiben und folgende Vertauschungen vorgenommen werden:

In der Ebene:

$$\text{Punkt} \leftrightarrow \text{Gerade}$$

Im Raum:

$$\text{Punkt} \leftrightarrow \text{Ebene}$$

$$\text{Gerade} \leftrightarrow \text{Gerade}$$

Wendet man also auf eine Figur eine Korrelation an, so entsteht eine duale Figur. Als Beispiel illustriert Abb. 5 die dual einander gegenüberstehenden Sätze von Pappos und Brianchon.

6.10 Polaritäten und Quadriken

Eine Korrelation, deren Abbildungsmatrix A symmetrisch ist ($A = A^T$), heißt *Polarität*. Wendet man auf einen Punkt $X = \mathbf{x}\mathbb{R}$ zuerst die Polarität an, so erhält man $(A \cdot \mathbf{x})\mathbb{R}$. Wird dann noch die duale Polarität (mit der Matrix $(A^T)^{-1} = A^{-1}$) ausgeübt, so kommt man wieder nach X zurück. Etwas schlampig ausgedrückt liefert also die zweimalige Anwendung die Identität.

Ein unter einer Polarität entsprechendes Paar (Punkt,Ebene) heißt (Pol,Polarebene). Alle Punkte $X = \mathbf{x}\mathbb{R}$, welche in ihrer Polarebene (Polare) $X\phi = \mathbb{R}(A \cdot \mathbf{x})$ liegen, erfüllen eine *Quadrik* (in der Ebene spricht man von einem *Kegelschnitt*).

Der Punkt $X = \mathbf{x}\mathbb{R}$ inzidiert mit seiner Polarebene, wenn die Inzidenzbedingung $\mathbf{x}^T \cdot (A \cdot \mathbf{x}) = 0$ erfüllt ist. Die Gleichung der Quadrik Φ lautet daher in homogenen Punktkoordinaten,

$$\mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} = 0. \tag{47}$$

Je nach Matrix A braucht eine Quadrik keinen reellen Punkt zu enthalten. Ein Beispiel liefert die Einheitsmatrix. Die zugehörige Quadrik in der Ebene, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, trägt keinen reellen Punkt, denn die einzige reelle Lösung $(0 : 0 : 0)$ der Gleichung stellt keinen Punkt dar. Analoges gilt im Raum. Im folgenden studieren wir aber nur Quadriken, welche auch reelle Punkte tragen.

Die Polarebene eines Punktes X der Quadrik Φ ist die Tangentialebene von Φ in X. Hieraus schließt man mittels der Eigenschaften einer Polarität: Die Menge der Berührpunkte der aus $P \notin \Phi$ an Φ legbaren Tangentialebenen liegt in der Polarebene $P\phi$ (siehe Abb. 6). Natürlich nehmen wir hier an, dass es überhaupt reelle Tangentialebenen aus P an Φ gibt.

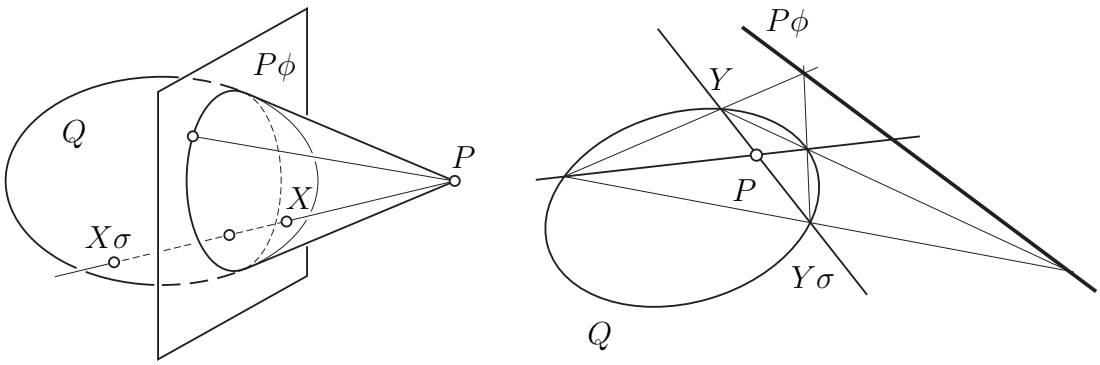


Abbildung 6: Pol und Polare bezüglich einer Quadrik im Raum (links) und in der Ebene (rechts).

Mit jedem Paar von Pol P und Polare $P\phi$ ist auch eine spezielle perspektive Kollineation σ verknüpft. Diese besitzt P als Zentrum, $P\phi$ als Achse und bildet die Quadrik auf sich ab (vgl. Abb. 6). Man kann eine solche Kollineation als eine projektive Variante einer Spiegelung ansehen.

Im folgenden werden wir noch eine Klassifikation der Kegelschnitte und Quadriken (mit reellen Punkten) angeben. Im Sinne der projektiven Geometrie ist die Zahl der verschiedenen Typen gering:

- Je zwei Kegelschnitte können durch eine geeignete Kollineation (sogar unendlich viele) ineinander übergeführt werden, sind also projektiv äquivalent. Insbesondere ist jeder Ke-

gelschnitt durch eine geeignete Kollineation in einen Kreis transformierbar und jedes kollineare Bild eines Kreises ein Kegelschnitt. Es gibt also einen einzigen projektiven Typ.

- Bei den Quadriken im Raum unterscheidet man nur zwischen *ovalen* und *ringartigen* Quadriken. Eine ovale Quadrik trägt keine reelle Gerade und kann stets durch eine Kollineation in eine Kugel transformiert werden. Eine ringartige Quadrik trägt zwei Scharen von Geraden; je zwei Geraden derselben Schar sind windschief, Geraden aus verschiedenen Scharen schneiden einander in einem Punkt.

In den beiden folgenden Abschnitten werden noch ohne Beweis die verschiedenen Typen von Kegelschnitten und Quadriken aus der Sicht der Elementargeometrie zusammengestellt. Man unterscheidet hier nach der Lage zur Ferngeraden bzw. Fernebene und gibt auch noch eine geeignete Normalform in einem speziell gewählten kartesischen Koordinatensystem an.

6.11 Euklidische Normalformen der Kegelschnitte

Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts in homogenen Koordinaten lautet ausführlich

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0. \tag{48}$$

In inhomogenen Koordinaten sieht dies so aus,

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Da es nur auf das Verhältnis zwischen den a_{ik} ankommt, ist ein Kegelschnitt durch 5 Punkte, von denen keine 3 kollinear sind, eindeutig bestimmt.

Zur Feststellung der Anzahl der Fernpunkte schneiden wir mit der Ferngeraden $x_3 = 0$. Dies liefert eine quadratische Gleichung für $x_1 : x_2$,

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0, \tag{49}$$

mit der Diskriminante $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} =: -\Delta$; die Determinante der Koeffizientenmatrix A_2 ist Δ. Je nachdem, ob Δ größer, gleich oder kleiner Null ist, ergeben sich 0,1 oder 2 Fernpunkte und demnach eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. In den einzelnen Fällen kann man noch ein spezielles Koordinatensystem (mit Achsen parallel zu den Eigenvektoren von A_2) wählen, und erhält dann die im folgenden angegebenen Normalformen. Falls es einen Mittelpunkt (=eigentlicher Pol der Ferngeraden) gibt, ist er der Ursprung des speziellen Koordinatensystems.

Hyperbel

Die euklidische Normalform lautet

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{50}$$

Die Fernpunkte erhalten wir aus $x_1^2/a^2 - x_2^2/b^2 = 0$; sie haben also die homogenen Koordinaten $(a : b : 0)$ und $(a : -b : 0)$. Die Asymptoten (Tangenten in den Fernpunkten) sind durch die gemeinsame Gleichung $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$ beschrieben, und daher die Geraden $x/a - y/b = 0$ und $x/a+y/b$=0. Die Hauptscheitel sind $(\pm a, 0)$ und die Brennpunkte $(\pm e, 0)$ mit $e^2 = a^2 + b^2$.

Ellipse

Die euklidische Normalform ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{51}$$

Es gibt keine reellen Fernpunkte. Die Hauptscheitel sind $(\pm a, 0)$, die Nebenscheitel $(0, \pm b)$ und die Brennpunkte $(\pm e, 0)$ mit $e^2 = a^2 - b^2$. Die für Ellipsenpunkte bestehende konstante Abstandssumme $2a$ zu den Brennpunkten ist analytisch leicht zu bestätigen (analog die konstante Abstandsdifferenz bei der Hyperbel).

Parabel

Die euklidische Normalform lautet.

$$x^2 - 2py = 0. \tag{52}$$

Die Fernpunkte erhalten wir aus $x_1^2 = 0$; es gibt also genau einen Fernpunkt, $(0 : 1 : 0)$, den Fernpunkt der y-Achse. Letztere ist die Achse der Parabel; $(0, 0)$ ist der Scheitel. Brennpunkt ist $F = (0, p/2)$, die Leitgerade hat die Gleichung $y + p/2 = 0$. Der quadrierte Abstand eines Punktes (x, y) von F ist $x^2 + (y - p/2)^2$. Setzt man diesen dem quadrierten Abstand zur Leitgeraden, $(y + p/2)^2$ gleich, ergibt sich in Übereinstimmung mit der aus der Schule bekannten Parabeldefinition genau die Gleichung (52) der Parabel.

6.12 Euklidische Normalformen von Quadriken im Raum

Die Einteilung berücksichtigt einerseits den projektiven Typ (oval oder ringartig) und andererseits die Lage der Quadrik zur Fernebene. Letzteres führt auf drei Fälle: Die Quadrik kann keinen reellen Fernpunkt besitzen (und zwar nur, wenn sie oval ist; wir erhalten ein *Ellipsoid*). Ein *Paraboloid* berührt die Fernebene in einem Punkt, während ein *Hyperboloid* die Fernebene in einem Kegelschnitt (mit reellen Punkten) schneidet. Wir geben für die einzelnen Typen wieder Normalformen in speziellen kartesischen Systemen an.

Bemerkung. Was wir oben für die Lage der Fernebene zu einer Quadrik diskutiert haben, gilt für eine beliebige Ebene. Ein ebener Schnitt einer Quadrik ist (über $\mathbb{R}$) von einer der folgenden Typen:

- Es gibt *keinen reellen Schnittpunkt*.
- Es gibt einen *einzigen reellen Schnittpunkt*; in diesem berührt die Ebene die Quadrik und letztere ist dann oval.
- Die Ebene berührt die Quadrik, und die Quadrik ist ringartig; der Schnitt ist ein *Paar von Geraden*.
- Die Schnittkurve ist ein *Kegelschnitt*.

Ellipsoid

Die Normalform ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{53}$$

Die homogene Form lautet also

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Da die Matrix $A_3 = (a_{ij})$ mit $i, j = 1, 2, 3$ offenbar positiv definit ist, gibt es keinen reellen Schnittpunkt der Quadrik mit der Fernebene $x_4 = 0$. Die Koordinatenebenen sind Symmetrieebenen, die Koordinatenachsen Symmetrieachsen der Fläche. Die 6 Scheitel sind $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$. Vermöge der speziellen Affinität $(x, y, z) \mapsto (ax, by, cz)$ geht das Ellipsoid aus der Einheitskugel hervor und hat demnach folgende Parameterdarstellung:

$$x = a \cos u \cos v, \; y = b \sin u \cos v, \; z = c \sin v.$$

Zweischaliges Hyperboloid

Die Normalform ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0, \tag{54}$$

und die homogene Darstellung lautet

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Die Fernebene wird im Kegelschnitt $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0$ geschnitten. Der Berührkegel längs dieses Kegelschnitts (asymptotischer Kegel) hat dieselbe Gleichung,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{55}$$

Die Fläche hat 2 Schalen, auf jeder einen Scheitel $(0, 0, \pm c)$. Eine mögliche Parameterdarstellung ist

$$x = a \cos u \sinh v,\ y = b \sin u \sinh v,\ z = \pm c \cosh v.$$

Einschaliges Hyperboloid

Hier lautet die Normalform

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{56}$$

Da A_3 (Terme mit x, y, z) gegenüber (54) unverändert sind, haben wir denselben Fernkegelschnitt und auch den asymptotischen Kegel (55).
Die Fläche hat nur eine Schale und auf dieser vier reelle Scheitel $(\pm a, 0, 0), (0, \pm b, 0)$. Das einschalige Hyperboloid trägt zwei Scharen von Geraden. Dies sieht man etwa so ein, dass man zuerst den Sonderfall $a = b$ eines einschaligen Drehhyperboloids studiert. Auf diesem findet man durch Schnitt mit der Ebene $x = a$ zwei Geraden, und durch Rotation um die z-Achse sodann 2 Geradenscharen. Das allgemeine einschalige Hyperboloid geht aus dem Drehhyperboloid durch eine Affinität hervor und trägt daher auch zwei Geradenscharen. Eine Parameterdarstellung lautet

$$x = a \cos u \cosh v,\ y = b \sin u \cosh v,\ z = c \sinh v.$$

Elliptisches Paraboloid

Als Normalform kann man

$$z = ax^2 + by^2, \quad a, b > 0, \tag{57}$$

wählen. Der Schnitt mit der Fernebene $x_4 = 0$ führt auf die Gleichung $ax_1^2 + bx_2^2 = 0$, welche wegen $a, b > 0$ nur die reelle Lösung $x_1 = x_2 = 0$ besitzt. Also ist $(0, 0, 1, 0)\mathbb{R}$, der Fernpunkt der z-Achse, der einzige Fernpunkt der Fläche. Schnitte mit Ebenen parallel zur z-Achse sind Parabeln, andere ebene Schnitte sind Ellipsen (sofern die Ebene so liegt, dass eine reelle Schnittkurve auftritt). Eine einfache Parameterdarstellung ist

$$x = u,\ y = v,\ z = au^2 + bv^2.$$

Hyperbolisches Paraboloid

Als Normalform kann man nun

$$z = ax^2 - by^2, \;\; a, b > 0, \tag{58}$$

angeben. Die Bedingung für Fernpunkte ist $ax_1^2 - bx_2^2 = 0$ und stellt zwei Geraden $\sqrt{a}x_1 \pm \sqrt{b}y = 0$ in der Fernebene dar. Ihr Schnittpunkt, $(0, 0, 1, 0)\mathbb{R}$, ist der Berührpunkt der Fläche mit der Fernebene. Schnitte mit Ebenen parallel zur z-Achse sind Parabeln oder Geraden, andere ebene Schnitte sind jetzt Hyperbeln oder Geradenpaare (letztere erhalten wir genau im Fall des Schnitts mit Tangentialebenen).
Die offensichtliche Parameterdarstellung ist

$$x = u, \; y = v, \; z = au^2 - bv^2.$$

Die Parameterlinien $u = const$ und $v = const$ sind Parabeln.
Durch Einführung affiner Koordinaten gemäß

$$\overline{x} = \sqrt{a}x - \sqrt{b}y, \; \overline{y} = \sqrt{a}x + \sqrt{b}y, \; \overline{z} = z,$$

erhalten wir die Parameterdarstellung

$$\overline{x} = u, \; \overline{y} = v, \; \overline{z} = uv.$$

Nun sind die Parameterlinien genau die 2 Scharen von Geraden auf der Fläche.

6.13 Ausgleichsellipse durch $N > 5$ Punkte

Gegeben seien Datenpunkte $P_i = (x_i, y_i), i = 1, ..., N$. Gesucht ist ein Kegelschnitt k,

$$k : ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

der möglichst gut die Datenpunkte P_i beschreibt. Sind die Punkte P_i Messdaten einer Ellipse, so kann man folgendermaßen vorgehen: (siehe Pilu, Fitzgibbon, Fisher: Ellipse-specific direct least-square fitting, IEEE PAMI, 1999, und http://www-uk.hpl.hp.com/people/mp/research/ellipse.htm)

Wir beachten, dass k eine Ellipse ist, wenn $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ keine reellen Lösungen besitzt, also gilt:

$$b^2 - 4ac < 0.$$

Sei

$$G(a, b, c, d, e, f; x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

Eine Lösung des Problems ergibt sich durch Minimierung von

$$F = \sum_{i=1}^{N} G(a, \ldots, f; x_i, y_i)^2, \tag{59}$$

unter der Nebenbedingung

$$b^2 - 4ac < 0.$$

Wir bilden die $(N \times 6)$-Matrix D,

$$D = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i & y_i & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

und können damit die zu minimierende Funktion F in (59) als quadratische Funktion (genauer, quadratische Form) in $a, b, ..., f$ so schreiben,

$$F = (a, b, c, d, e, f) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T \cdot M \cdot \mathbf{x}, \quad \text{mit } M = D^T \cdot D, M \in \mathbb{R}^{(6,6)}.$$

Die Nebenbedingung kann man schreiben als

$$(a, \ldots, f) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ \vdots \\ f \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T \cdot R \cdot \mathbf{x} < 0.$$

Wir wählen im folgenden als Nebenbedingung (Normierung)

$$\mathbf{x}^T \cdot R \cdot \mathbf{x} + 1 = 0. \tag{60}$$

Bemerkung 8: : (59) ist Summe von Ausdrücken, die keine geometrischen Distanzen sind; man nennt $G(a, \ldots, ; x_i y_i)$ algebraische Distanzen. Diese hängen wesentlich von der Normierung der Koeffizienten $a, \ldots, f$ ab.

Wir haben also die Minimierung einer quadratischen Form unter einer quadratischen NB durchzuführen (siehe Anhang). Es folgen nach der Methode von Lagrange über die Lagrange-Funktion $H(\lambda, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot M \cdot \mathbf{x} - \lambda(\mathbf{x}^T \cdot R \cdot \mathbf{x} + 1)$ die Bedingungen für ein Extremum,

$$(M - \lambda R) \cdot \mathbf{x} = 0, \ \mathbf{x}^T \cdot R \cdot \mathbf{x} \ = -1.$$

Erwartungsgemäß erhalten wir ein verallgemeinertes Eigenwertproblem von M bezüglich R (charakteristisches Polynom vom Grad 3).

Ist $\mathbf{v}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ (also $M \cdot \mathbf{v} = \lambda R \cdot \mathbf{v}$), so gilt unter Berücksichtigung der Nebenbedingung:

$$\mathbf{v}^T \cdot M \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}^T \cdot R \cdot \mathbf{v} = \lambda({v_2}^2 - 4v_1 v_3) = \lambda(b^2 - 4ac) = -\lambda.$$

Da $\mathbf{v}^T \cdot M \cdot \mathbf{v}$ als Summe von Quadraten nicht negativ ist, kann obige Gleichung nur für Eigenwerte $\lambda \leq 0$ bestehen; der zugehörige Eigenvektor $\mathbf{v}$ enthält dann die Koeffizienten der Gleichung einer Ellipse. Weiters sehen wir, dass der Eigenwert mit dem kleinsten Betrag zur Lösung führt.

In der oben zitierten Arbeit wird gezeigt, dass das Problem stets genau eine Lösung besitzt.

Bemerkung 9: : Für einen robusten Ausgleich sollte man eine gewichtete Fehlerquadratsumme minimieren, also

$$F_R = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 G(a, \ldots, f; x_i, y_i)^2.$$

Offenbar ändert sich damit am Prinzip nicht viel; man braucht nur die jeweiligen Zeilen der Matrix D mit dem Faktor w_i zu multiplizieren. Die Gewichte w_i können in einem iterativen Algorithmus so verändert werden, dass Ausreißern kleine oder verschwindende Gewichte zugewiesen werden.

7 Kurventheorie

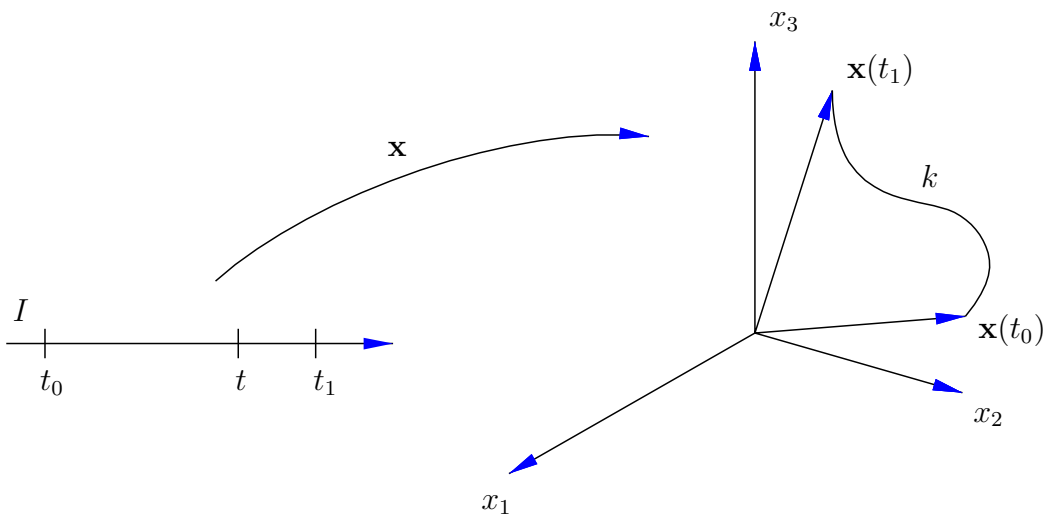
7.1 Parameterdarstellung, Parameterwechsel

Im dreidimensionalen Raum seien kartesische Rechtskoordinaten (x_1, x_2, x_3) gegeben. Wir bezeichnen $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Definition 17: Eine Abbildung

$$\begin{array}{rlcl} \mathbf{x}: & I \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t \in I & \mapsto & \mathbf{x}(t) := (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \in C^r(I) \end{array}$$

erzeugt eine *parametrisierte C^r-Kurve* $k = \mathbf{x}(I) \subset \mathbb{R}^3$. Die Parametrisierung $\mathbf{x}(t)$ heißt *zulässig (regulär)*, wenn für alle $t \in I$ gilt $\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} \neq \mathbf{o}$.

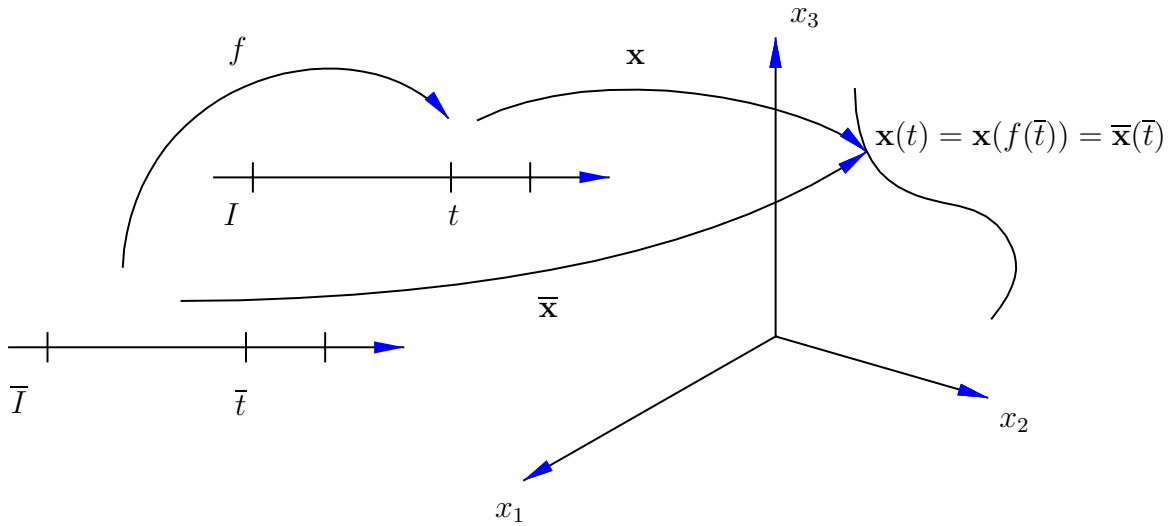


Neben $\mathbf{x}(t)$ gibt es unendlich viele weitere Abbildungen $\overline{\mathbf{x}}$, welche dieselbe Punktmenge k beschreiben. Diese Abbildungen $\overline{\mathbf{x}}$ gehen aus $\mathbf{x}(t)$ durch Parametertransformationen (Parameterwechsel) hervor.

Definition 18: Die Abbildung $f : \overline{I} \to I, \overline{t} \mapsto t$ heißt *zulässige C^r-Parametertransformation*, wenn $f \in C^r$ ist und für alle $\overline{t} \in \overline{I}$ gilt $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\overline{t}} \neq 0$.

Wendet man nun auf $\overline{I}$ zuerst f und dann $\mathbf{x}$ an, so erhält man schließlich dieselbe Kurve k. Der Übergang von $\overline{I}$ zur Kurve k wird beschrieben durch

$$\begin{array}{rccl} \overline{\mathbf{x}}: & \overline{I} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \overline{t} & \mapsto & \mathbf{x}(f(\overline{t})) = \overline{\mathbf{x}}(\overline{t}) \end{array}$$



Wegen

$$\frac{d\overline{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}\overline{t}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\,|_{f(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\overline{t}}\,|_{\overline{t}} \neq \mathbf{o}$$

ist auch $\overline{t}$ ein zulässiger Parameter auf k. Zur Beschreibung von k können somit verschiedene Parametrisierungen herangezogen werden. In der (euklidischen) Differentialgeometrie studiert man Eigenschaften von geometrischen Objekten (Kurven und Flächen), die *parameterinvariant*, d.h. unabhängig von der Wahl der Parametrisierung und *bewegungsinvariant* sind. Solche Eigenschaften heissen *geometrisch*.

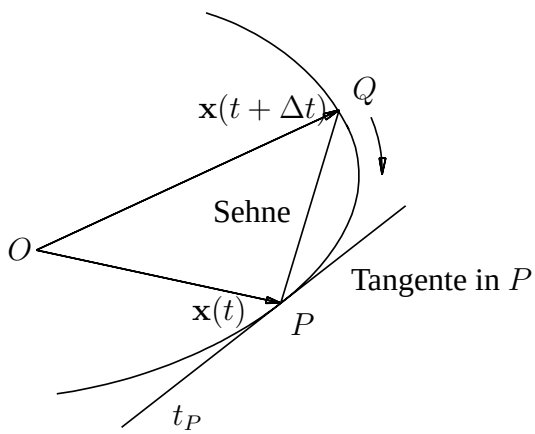
7.2 Tangente, Bogenlänge

Die *Tangente* in P ist definiert als Grenzlage der Sehne PQ, wenn Q auf k nach P läuft. Mit

$$\overrightarrow{PQ} = \Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)$$

ist auch $\Delta\mathbf{x}/\Delta t$ ein Richtungsvektor der Sehne PQ. Der Grenzübergang $\Delta t \to 0$ liefert den ersten Ableitungsvektor in $P = \mathbf{x}(t)$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{x}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{x}}.$$



Der Vektor

$$\mathbf{e}_1 := \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\| \dot{\mathbf{x}} \|}$$

heißt *Tangenteneinheitsvektor* (normierter Tangentenvektor) und $\mathbf{e}_1$ weist in Richtung wachsender t-Werte. Durch wachsende t-Werte wird die Kurve k *orientiert*.

Wir zeigen, daß ein (zulässiger) Parameter s, die *Bogenlänge*, existiert mit $\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} \| = 1$.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} = \dot{\mathbf{x}}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}, \quad \| \dot{\mathbf{x}} \| \left| \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \right| = 1, \quad ds = \pm \| \dot{\mathbf{x}} \| \mathrm{d}t \quad \ldots \text{Bogenelement.}$$

Wegen $\mathrm{d}t/\mathrm{d}s = 1/\| \dot{\mathbf{x}} \| \neq 0$ ist s zulässig.

$$s = \pm \int_{t_0}^{t} \| \dot{\mathbf{x}} \| \mathrm{d}t = \pm \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2} \mathrm{d}t. \tag{61}$$

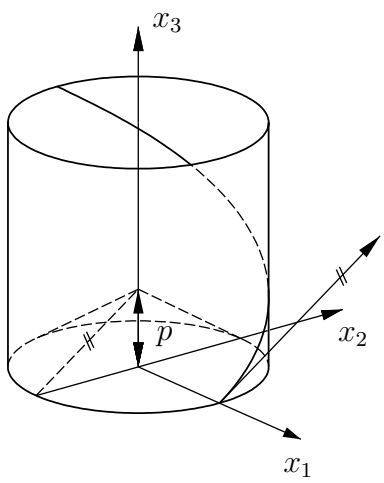
s ist bis auf eine Integrationskonstante und das Vorzeichen, welches die Orientierung der Kurve festlegt, eindeutig bestimmt. In der Analysis zeigt man, daß s die Länge des Kurvenbogens zwischen $\mathbf{x}(t_0)$ und $\mathbf{x}(t)$ ist. s gibt also die Länge des Bogens von einem Anfangspunkt in einem bestimmten Durchlaufsinn an.

Satz 7: Jede C^r-Kurve $(r \geq 1)$ läßt sich nach ihrer Bogenlänge s (zulässig) parametrisieren, wobei gilt

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \pm \| \dot{\mathbf{x}} \|.$$

Beispiel 5: Schraublinie

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (r\cos t, r\sin t, pt), t \in \mathbb{R}, \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= (-r\sin t, r\cos t, p), \\ \| \dot{\mathbf{x}} \| &= \sqrt{r^2 + p^2}, \\ s &= \pm\sqrt{r^2 + p^2}\, t + C. \end{aligned}$$



Wir wählen das positive Vorzeichen, die Integrationskonstante $C = 0$ und erhalten als Bogenlängenparametrisierung der Schraublinie,

$$\mathbf{x}(s) = \left(r\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+p^2}}, r\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+p^2}}, p\frac{s}{\sqrt{r^2+p^2}} \right).$$

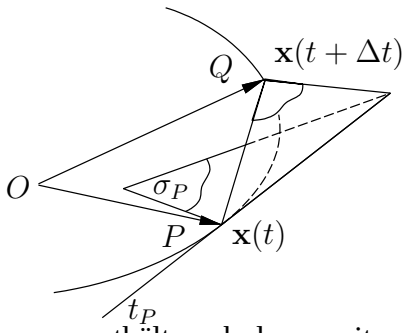
Die Tangenten der Schraublinie bilden mit der xy-Ebene einen konstanten Neigungswinkel α mit $\tan\alpha = p/r$. Daher ist die Bogenlänge s der Schraublinie proportional zur Bogenlänge rt ihres kreisförmigen Grundrisses.

Nur in speziellen Fällen ist das Integral $\int \parallel \dot{\mathbf{x}} \parallel \mathrm{d}t$ elementar berechenbar. Zum Beispiel führt die Berechnung der Bogenlänge einer Ellipse $\mathbf{x}(t) = (a\cos t, b\sin t), a \neq b$, auf ein elliptisches Integral. Zur Berechnung des bestimmten Integrals $\int_{t_0}^{t_1} \parallel \dot{\mathbf{x}} \parallel \mathrm{d}t$ verwendet man numerische Methoden.

Notation: In Hinkunft werden Ableitungen nach s durch Striche $\mathbf{x}', \ldots$, Ableitungen nach einem beliebigen Parameter durch Punkte $\dot{\mathbf{x}}, \ldots$, gekennzeichnet.

7.3 Schmiegebene

Definition 19: Die *Schmiegebene* σ_P in P ist die Grenzlage der Verbindungsebene $[Qt_P]$ eines Punktes Q mit der Tangente t in P, wenn Q nach P läuft.
Die Schmiegebene σ_P enthält daher $\dot{\mathbf{x}}(t)$. Weiters enthält $[Qt_P]$ den Vektor



$$\frac{\mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t)}{(\Delta t)^2} - \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\Delta t} =: \mathbf{v}.$$

Nach dem Grenzübergang $t \to 0$ erkennt man: Die Schmiegebene σ_P enthält auch den zweiten Ableitungsvektor $\ddot{\mathbf{x}}(t)$,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t)\Delta t}{(\Delta t)^2} = (l'Hospital) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) - \dot{\mathbf{x}}(t)}{2\Delta t} = \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{x}}(t).$$

Die Schmiegebene σ_P von k in $P = \mathbf{x}(t)$ wird daher aufgespannt von den Ableitungsvektoren $\dot{\mathbf{x}}(t)$ und $\ddot{\mathbf{x}}(t)$, falls $\{\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}\}$ linear unabhängig sind.

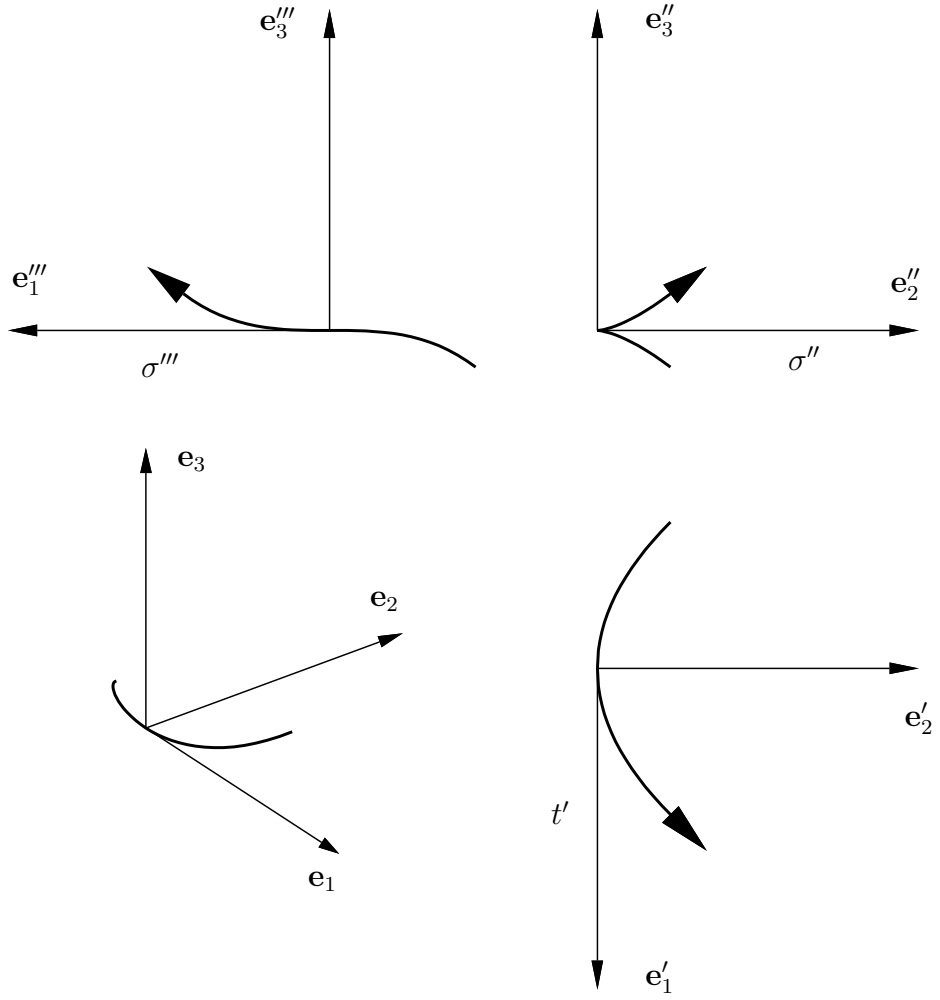
Definition 20: Punkte $\mathbf{x}(t_0)$ mit $\{\dot{\mathbf{x}}(t_0), \ddot{\mathbf{x}}(t_0)\}$ linear abhängig bei $\dot{\mathbf{x}}(t_0) \neq 0$ heißen *Wendepunkte*.

In diesen Wendepunkten ist die Schmiegebene nicht eindeutig bestimmt.

Die Definition der Schmiegebene und der Wendepunkte ist parameterinvariant, denn bei jeder Parametertransformation $t \to \bar{t}$ sind $\mathrm{d}\overline{\mathbf{x}}/\mathrm{d}\bar{t}, \mathrm{d}^2\overline{\mathbf{x}}/\mathrm{d}\bar{t}^2$ Linearkombinationen von $\dot{\mathbf{x}}$ und $\ddot{\mathbf{x}}$. Auf Grund der Bewegungsinvarianz sind Schmiegebene und Wendepunkt geometrische Begriffe.

7.4 Krümmung und Begleitbasis

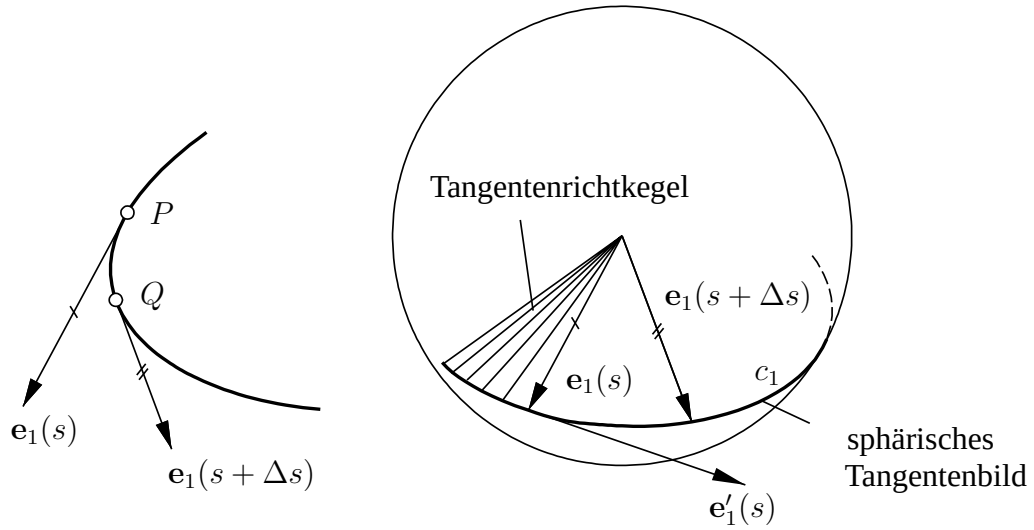
Wir parametrisieren die Kurve $k = \mathbf{x}(s)$ mittels der Bogenlänge s.



Definition 21: Die *Begleitbasis* einer Kurve besteht aus folgenden drei normierten, paarweise orthogonalen Vektoren:

1. *Tangentenvektor* : $\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}'$.
2. *Hauptnormalenvektor* (in der Schmiegebene): $\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|}$.
   Ist $\mathbf{x}'' \neq \mathbf{o}$ so gilt $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$, da aus $(\mathbf{x}')^2 = 1$ folgt $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'' = 0$.
3. *Binormalenvektor* :
$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''}{\| \mathbf{x}'' \|}.$$

Wir wollen die Krümmung der Kurve als Maß für die relative Richtungsänderung der Tangente definieren.



Trägt man die Tangentenvektoren $\mathbf{e}_1(s)$ für alle s vom festen Punkt O aus ab, so erhält man das *sphärische Tangentenbild* von k. Die Spitzen der Vektoren $\mathbf{e}_1(s)$ liegen wegen $\| \mathbf{e}_1 \| = 1$ auf der Kugel um O mit dem Radius 1.

Wir definieren die mittlere Krümmung $\widetilde{\kappa}$ des Bogens PQ als

$$\widetilde{\kappa} = \frac{\| \mathbf{e}_1(s+\Delta s) - \mathbf{e}_1(s) \|}{|\Delta s|},$$

und die *Krümmung* (lokale Krümmung) κ von k in P

$$\kappa = \lim_{P \to Q} \widetilde{\kappa} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\| \mathbf{e}_1(s+\Delta s) - \mathbf{e}_1(s) \|}{\Delta s} = \| \mathbf{e}_1' \| = \| \mathbf{x}'' \|. \tag{62}$$

Der Vektor $\mathbf{e}_1' = \mathbf{x}''$ ist Tangentenvektor an das sphärische Tangentenbild c_1. Aus $\mathbf{e}_2 = \mathbf{x}''/\| \mathbf{x}'' \| = \mathbf{x}''/\kappa$ folgt die wichtige Gleichung

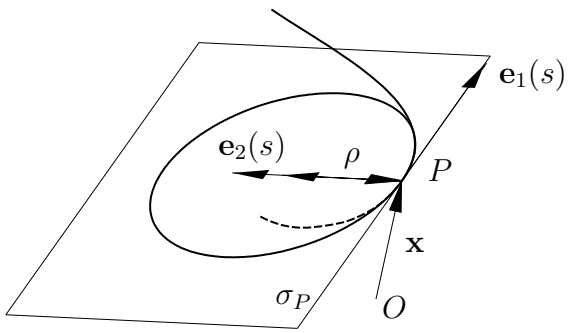
$$\mathbf{e}_1' = \kappa \mathbf{e}_2. \tag{63}$$

Der Kegel mit Spitze O und dem sphärischen Tangentenbild c_1 als Leitkurve heißt *Tangentenrichtkegel*. Die Schmiegebene σ_P ist parallel zu der von $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1'$ aufgespannten Ebene durch O. Das ist die Tangentialebene des Tangentenrichtkegels längs der entsprechenden Erzeugenden parallel zu t_P.

In einem Kurvenpunkt $P = \mathbf{x}(s)$ mit $\kappa \neq 0$ gibt es einen Kreis mit Mittelpunkt

$$\mathbf{m}(s) = \mathbf{x}(s) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{e}_2(s)$$

auf der Hauptnormalen und Radius $\rho = 1/\kappa$, welcher mit k in P das Begleitbein und die Krümmung gemeinsam hat. Dieser Kreis liegt ganz in der Schmiegebene und heißt *Krümmungskreis* der Kurve k im Punkt P. Sein Radius ρ heißt *Krümmungsradius*. Der Krümmungskreis l_P von k in P kann auch als Grenzlage eines Kreises $\bar{l}$ (bestimmt durch Q, P und die Tangente t_P in P) erhalten werden, wenn Q auf k nach P läuft.



Krümmungsformel bei beliebigem Parameter t

Als Vorbereitung berechnen wir

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\parallel \dot{\mathbf{x}} \parallel}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\parallel \dot{\mathbf{x}} \parallel = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2} = \frac{2\dot{\mathbf{x}}\cdot\ddot{\mathbf{x}}}{2\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}} = \frac{\dot{\mathbf{x}}\cdot\ddot{\mathbf{x}}}{\parallel \dot{\mathbf{x}} \parallel}.$$

Nun gilt

$$\mathbf{x}'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{\mathbf{x}}}{\parallel \dot{\mathbf{x}} \parallel}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\ddot{\mathbf{x}}\parallel \dot{\mathbf{x}} \parallel - \dot{\mathbf{x}}\frac{\dot{\mathbf{x}}\cdot\ddot{\mathbf{x}}}{\parallel\dot{\mathbf{x}}\parallel}}{\parallel \dot{\mathbf{x}} \parallel^2 \parallel \dot{\mathbf{x}} \parallel} = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2\ddot{\mathbf{x}} - (\dot{\mathbf{x}}\cdot\ddot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}}}{\parallel \dot{\mathbf{x}} \parallel^4},$$

und damit

$$\mathbf{x}''^2 = \frac{(\dot{\mathbf{x}}^2)^2\ddot{\mathbf{x}}^2 - 2\dot{\mathbf{x}}^2(\dot{\mathbf{x}}\cdot\ddot{\mathbf{x}})^2 + (\dot{\mathbf{x}}\cdot\ddot{\mathbf{x}})^2\dot{\mathbf{x}}^2}{\parallel \dot{\mathbf{x}} \parallel^8} = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2\ddot{\mathbf{x}}^2 - (\dot{\mathbf{x}}\cdot\ddot{\mathbf{x}})^2}{\parallel \dot{\mathbf{x}} \parallel^6} = \frac{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})^2}{\parallel \dot{\mathbf{x}} \parallel^6}.$$

Hieraus folgt die gewünschte Krümmungsformel bei beliebiger Parametrisierung,

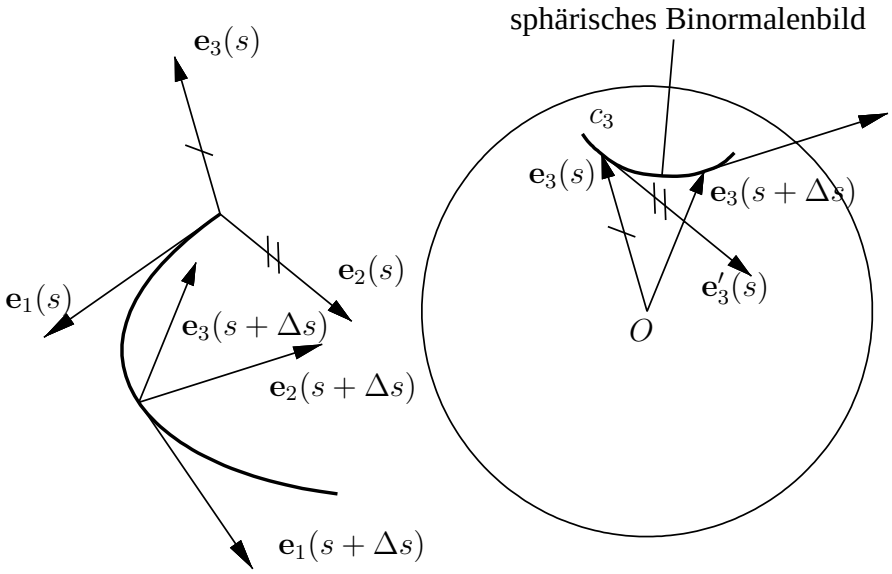
$$\kappa = \parallel \mathbf{x}'' \parallel = \frac{\parallel \dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}} \parallel}{\parallel \dot{\mathbf{x}} \parallel^3}. \tag{64}$$

In Wendepunkten ($\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}$ l.a.) ist $\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{o}$, also $\kappa = 0$. Gilt für alle Punkte der Kurve $\kappa = 0$, so ist k eine Gerade.

7.5 Torsion

Wir definieren die Torsion als Maß für die relative Änderung der Schmiegebene (= Richtungsänderung der Binormalen).

Analog zum sphärischen Tangentenbild entsteht das sphärische Binormalenbild c_3 als Menge der Spitzen der durch einen festen Punkt O parallelverschobenen Binormalenvektoren der Kurve k.



Wir definieren die mittlere Torsion $\widetilde{\tau}$ des Bogens PQ:

$$\pm\tau = \frac{\mathbf{e}_3(s+\Delta s) - \mathbf{e}_3(s)}{|\Delta s|},$$

und die *Torsion* (lokale Torsion) τ von k in P

$$\tau = \lim_{Q\to P} \widetilde{\tau} = \pm \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\mathbf{e}_3(s+\Delta s) - \mathbf{e}_3(s)}{|\Delta s|} = \pm\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_3}{\mathrm{d}s} \| = \pm\| \mathbf{e}_3' \|.$$

Die Tangente an das Binormalenbild in $\mathbf{e}_3(s)$ hat die Richtung $\mathbf{e}_3'$. Der Vektor $\mathbf{e}_3'$ ist parallel zu $\mathbf{e}_2$, denn $\mathbf{e}_3'$ ist normal zu $\mathbf{e}_1$ wegen

$$\mathbf{e}_3 \perp \mathbf{e}_1 \quad \Longleftrightarrow \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \cdot (\kappa \mathbf{e}_2) + \mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{e}_1 = 0,$$

und normal zu $\mathbf{e}_3$ wegen

$$\| \mathbf{e}_3 \| = 1 \quad \leftrightarrow \mathbf{e}_3^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3' = 0.$$

Für den Betrag von τ gilt also $|\tau| = |\mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{e}_2|$; man macht nun folgende *Vorzeichenfestsetzung*:

$$\tau = -\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{e}_3. \tag{65}$$

Wegen $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$ folgt durch Ableiten $\mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3' = 0$ und damit die obige Gleichheit.

Kurven mit $\tau > 0$ heissen rechtsgewundene Kurven und solche mit $\tau < 0$ heissen linksgewundene Kurven.

Definition 22: Ein Kurvenpunkt mit $\tau = 0$ heißt *Henkelpunkt*.

In Henkelpunkten wird die Schmiegebene von der Kurve im allgemeinen nicht durchsetzt. In Punkten mit $\tau \neq 0$ wird die Schmiegebene von der Kurve berührend durchsetzt.

Für die Torsion gilt also bei Benutzung einer Parametrisierung nach der Bogenlänge,

$$\tau = \mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{e}_3.$$

Weiters haben wir

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{x}''}{\kappa} = \rho \mathbf{x}'', \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \rho(\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''), \quad \mathbf{e}_2' = \rho' \mathbf{x}'' + \rho \mathbf{x}'''.$$

Hieraus folgt

$$\tau = \mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{e}_3 = \rho(\rho' \mathbf{x}'' + \rho \mathbf{x}''') \cdot (\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'') = \rho\rho' \det(\mathbf{x}'', \mathbf{x}', \mathbf{x}'') + \rho^2 \det(\mathbf{x}''', \mathbf{x}', \mathbf{x}'') = \rho^2 \det(\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''').$$

Nun wollen wir zu einem allgemeinen Parameter t übergehen. Zuerst beachten wir, dass die Ableitungsvektoren nach t und s in folgender Weise zusammenhängen,

$$\mathbf{x}' = \frac{1}{\| \dot{\mathbf{x}} \|} \dot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x}'' = \frac{1}{\| \dot{\mathbf{x}} \|^2} \ddot{\mathbf{x}} + \lambda_1 \dot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x}''' = \frac{1}{\| \dot{\mathbf{x}} \|^3} \dddot{\mathbf{x}} + \lambda_2 \ddot{\mathbf{x}} + \lambda_3 \dot{\mathbf{x}},$$

wobei die Koeffizienten λ_i im weiteren keine Rolle spielen. Hieraus folgt

$$\det(\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''') = \frac{1}{\| \dot{\mathbf{x}} \|^6} \det(\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dddot{\mathbf{x}}).$$

Durch Ersetzen von $\rho = 1/\kappa$ gemäß (64) folgt damit für die Torsion die Formel

$$\tau = \frac{\det(\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dddot{\mathbf{x}})}{(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}})^2}. \tag{66}$$

7.6 FRENETsche Ableitungsgleichungen

Da $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ eine Basis bilden, lassen sich die Ableitungsvektoren $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ in dieser Basis darstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1' &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' &= a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' &= a_{31}\mathbf{e}_1 + a_{32}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Da die Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ eine orthonormierte Basis bilden, d.h. $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik}$, gilt $a_{ij} = \mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j$. Durch Differenzieren der Gleichungen $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik}$ erhalten wir

$$\mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k' = 0, \text{ also } a_{ik} + a_{ki} = 0.$$

Die Koeffizientenmatrix obiger Ableitungsgleichungen ist somit *schiefsymmetrisch*.

Nach (63) gilt $\mathbf{e}_1' = \kappa \mathbf{e}_2$ und nach (65) folgt $\mathbf{e}_3' = -\tau \mathbf{e}_2$. Damit ergibt sich mit Beachtung der schiefen Symmetrie das folgende System der *Ableitungsgleichungen von* F. FRENET (1852),

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1' &= \qquad\quad \kappa \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_2' &= -\kappa \mathbf{e}_1 \qquad\quad +\tau \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' &= \qquad\quad -\tau \mathbf{e}_2. \end{aligned} \tag{67}$$

Nun sind auch alle höheren Ableitungen der $\mathbf{e}_i$ in der Frenet-Basis darstellbar, wobei als Koeffizienten κ, τ und deren Ableitungen $\kappa', \tau', \ldots$ auftreten. Als Beispiel berechnen wir

$$\mathbf{e}_1'' = (\kappa \mathbf{e}_2)' = \kappa' \mathbf{e}_2 + \kappa \mathbf{e}_2' = \kappa' \mathbf{e}_2 + \kappa(-\kappa \mathbf{e}_1 + \tau \mathbf{e}_3) = -\kappa^2 \mathbf{e}_1 + \kappa' \mathbf{e}_2 + \kappa\tau \mathbf{e}_3.$$

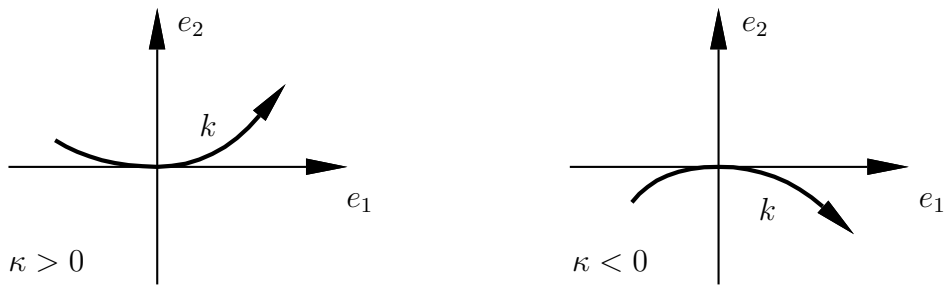
Satz 8: Hauptsatz der Kurventheorie: Kennt man die *natürlichen Gleichungen* $\kappa = \kappa(s)$, $\tau = \tau(s)$ einer Kurve k, d.h. die Krümmung und Torsion in Abhängigkeit von der Bogenlänge s, dann ist die Kurve k bis auf Bewegungen eindeutig bestimmt. Der Beweis beruht auf der Integration der FRENETschen Ableitungsgleichungen und benützt Existenz- und Eindeutigkeitssätze aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

7.7 Ebene Kurven

Bei ebenen Kurven sind $\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dddot{\mathbf{x}}$ sicher linear abhängig und für die Torsion gilt $\tau = 0$.

Wir wählen o.B.d.A. als Trägerebene die Ebene $x_3 = 0$. Dann genügt es, das begleitende Zweibein statt des begleitenden Dreibeins zu betrachten, denn es gilt $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ oder $\mathbf{e}_3 = (0, 0, -1)$.

In der ebenen Kurventheorie soll $\mathbf{e}_2$ stets durch positive Vierteldrehung aus $\mathbf{e}_1$ entstehen. Damit muß in $\mathbf{x}'' = \kappa \mathbf{e}_2$ das Vorzeichen von κ berücksichtigt werden. Im Gegensatz dazu war bei Raumkurven stets $\kappa \geq 0$.



Das Vorzeichen von κ hat geometrische Bedeutung, wenn wir orientierte Kurven betrachten: Eine Umkehrung der Orientierung von k ändert $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ und damit das Vorzeichen von κ.

Die Frenetschen Ableitungsgleichungen lauten nun

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1' &= \qquad\quad \kappa\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_2' &= -\kappa\mathbf{e}_1. \end{aligned} \tag{68}$$

Für die Kurve $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), 0)$ ist

$$\kappa = \frac{\dot{x}_1\ddot{x}_2 - \dot{x}_2\ddot{x}_1}{(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{3/2}}. \tag{69}$$

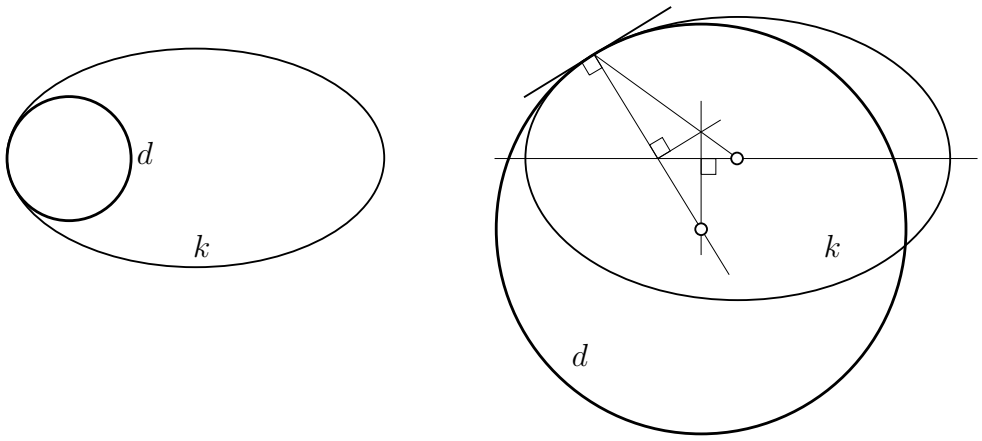


Abbildung 7: Krümmungskreis d einer Ellipse k in einem Scheitel (links) und in einem allgemeinen Punkt (rechts).

Der Krümmungsmittelpunkt der Kurve ist durch $\mathbf{m} = \mathbf{x} + \rho\mathbf{e}_2$ mit $\rho = 1/\kappa$ gegeben. Die Kurve wird vom Krümmungskreis i.a. berührend durchsetzt (Abb. 7, rechts) und es besteht Berührung 2.Ordnung zwischen der Kurve und dem Krümmungskreis.

Definition 23: Zwei Kurven *berühren* einander in einem gemeinsamen Punkt P *von* k*-ter Ordnung*, sofern sie so parametrisiert werden können, dass in P alle Ableitungsvektoren bis zur k-ten Ordnung übereinstimmen.

Man kann zeigen, dass zur Feststellung der Berührordnung die Betrachtung von Bogenlängenparametrisierungen ausreicht. Zwei ebene Kurven oder Raumkurven berühren von 2. Ordnung, wenn im gemeinsamen Punkt die Frenet-Basis und die Krümmung übereinstimmen. Berührung 3. Ordnung erfordert zusätzlich die Übereinstimmung der Torsion τ (ist bei Kurven in derselben Ebene wegen $\tau = 0$ stets erfüllt) und der Ableitung κ' der Krümmung nach der Bogenlänge.

Definition 24: Ein regulärer Punkt einer ebenen Kurve, der kein Wendepunkt ist, heißt *Scheitel*, wenn $\kappa' = 0$.

In einem Scheitel berührt der Krümmungskreis die Kurve von 3.Ordnung und durchsetzt die Kurve i.a. nicht (siehe Abb. 7, links).

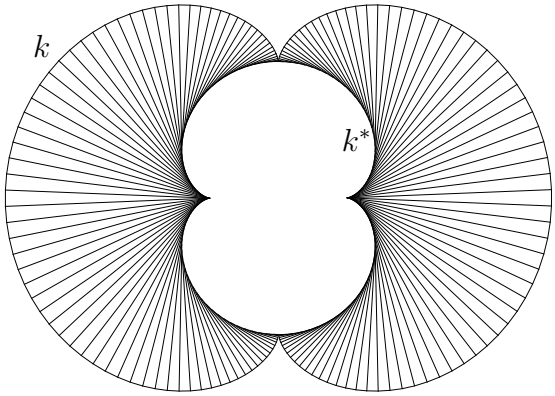


Abbildung 8: Nephroide k and ihre Evolute k^*

Definition 25: Der Ort aller Krümmungsmittelpunkte einer ebenen Kurve k heißt *Evolute* von k.

Satz 9: Die Evolute k^* von k ist Hüllkurve der Normalen von k. Wird das begleitende Zweibein entlang der Kurve bewegt, so rollt die Kurvennormale auf der Evolute ab ohne zu gleiten.

Beim Abrollen einer Geraden auf einer Kurve k^* beschreiben alle Punkte der rollenden Geraden die so genannten *Evolventen* von k^*. Alle Evolventen haben ein gemeinsames Normalensystem und besitzen k^* als gemeinsame Evolute.

Man nennt zwei Kurven mit gemeinsamen Normalen auch *Parallelkurven* (Offsets). Sie besitzen konstanten Normalabstand. Eine Parallelkurve einer gegebenen Kurve entsteht also durch Auftragen eines festen Abstandes d auf den Normalen der Ausgangskurve. Mit einer nach der

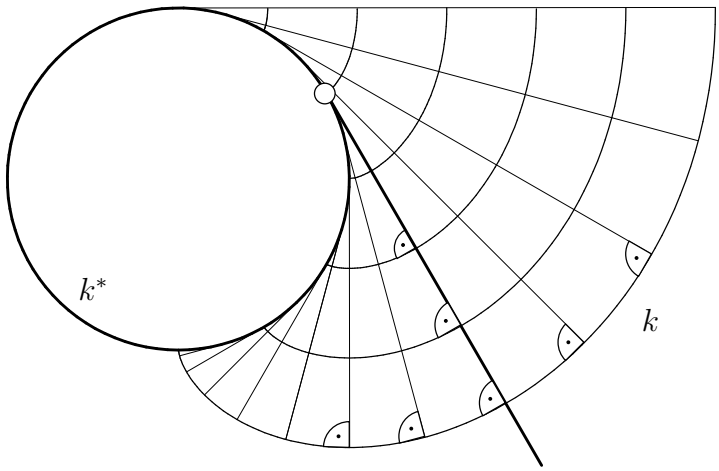


Abbildung 9: Evolventen eines Kreises k^*

Bogenlänge parametrisierten Ausgangskurve $\mathbf{x}(s)$ hat die Parallelkurve im Abstand d (gemessen mit Vorzeichen) die Darstellung

$$\mathbf{x}_d = \mathbf{x}(s) + d\mathbf{e}_2(s).$$

Als Übungsbeispiel wollen wir noch die oben genannten Eigenschaften von Parallelkurven beweisen. Wir betrachten zuerst die Tangenten in entsprechenden Punkten und erkennen aus

$$\mathbf{x}_d' = \mathbf{x}' + d\mathbf{e}_2' = (1 - d\kappa)\mathbf{e}_1,$$

deren Parallelität. Weiters gilt

$$\mathbf{x}_d'' = (1 - d\kappa)'\mathbf{e}_1 + (1 - d\kappa)\kappa\mathbf{e}_2,$$

woraus wir die Krümmung der Parallelkurve $\mathbf{x}_d$ berechnen (beachte, dass s nicht die Bogenlänge von $\mathbf{x}_d$ ist und damit die allgemeine Formel zu verwenden ist),

$$\kappa_d = \frac{\det(\mathbf{x}_d', \mathbf{x}_d'')}{\| \mathbf{x}_d' \|^3} = \frac{\det((1 - d\kappa)\mathbf{e}_1, (1 - d\kappa)\kappa\mathbf{e}_2)}{(1 - d\kappa)^3} = \frac{\kappa}{1 - d\kappa}.$$

Der Krümmungsradius ist daher

$$\rho_d = \frac{1}{\kappa_d} = \frac{1 - d\kappa}{\kappa} = \frac{1}{\kappa} - d = \rho - d,$$

woraus wir schließen, dass die Kurve $\mathbf{x}$ und die Parallelkurve $\mathbf{x}_d$ in entsprechenden Punkten dieselbe Krümmungsmitte besitzen.

7.8 Implizite Darstellung einer ebenen Kurve

Eine ebene Kurve kann auch als Nullstellenmenge einer Funktion $F(x, y)$ beschrieben werden. Man spricht von der *impliziten Darstellung* der Kurve,

$$k = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}.$$

Für gewisse Aufgaben bietet die implizite Darstellung gegenüber einer Parameterdarstellung Vorteile. So kann man etwa mit der impliziten Darstellung in einem Optimierungsalgorithmus, in dem eine Kurve verändert wird (Kurvenevolution), leicht einen Topologiewechsel (Veränderung der Anzahl von Komponenten) erzielen. Ein typisches Anwendungsgebiet ist die Segmentierung in der Bildverarbeitung. Bei einer impliziten Darstellung ist die Kurve k in eine ganze Schar von so genannten Niveaukurven k_c (*level sets*) eingebettet, welche zu konstanten Funktionswerten von F gehören,

$$k_c : \quad F(x, y) = c.$$

Die Evolution von Kurven mittels der impliziten Darstellung wird mathematisch mittels einer partiellen Differentialgleichung für die level set Funktion F beschrieben (level set - Methode von Osher und Sethian).

Wir zeigen im folgenden nur, wie man Tangente und Krümmung direkt aus einer impliziten Darstellung berechnet und wenden uns dann den in vielen Anwendungen wichtigen Distanzfunktionen zu.

Zur Berechnung der Tangente in einem Punkt von k nehmen wir an, dass wir auch eine Parameterdarstellung $(x(t), y(t))$ kennen. Dann muss die Gleichung $F(x(t), y(t)) = 0$ für alle t erfüllt sein. Differenzieren dieser Identität in t nach t liefert dann

$$F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} = 0.$$

Der Vektor $(dx/dt, dy/dt)$ ist ein Richtungsvektor der Tangente. Es ist also der Gradient

$$\nabla F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

ein Normalvektor. Dies gilt für alle Niveaukurven $F = c$: in jedem Punkt (x, y) ist der Gradient $\nabla F(x, y)$ normal zur jeweiligen Niveaukurve von F (∇F zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von F; vgl. Gradientenverfahren in der Optimierung). Falls eine implizit dargestellte Kurve an einer Stelle verschwindenden Gradienten besitzt, liegt eine Singularität der Kurve vor (lokales Extremum oder Sattelpunkt von F).

Ohne Beweis führen wir noch eine Formel für die Krümmung einer Kurve $k : \; F(x, y) = c$ in einem Punkt $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ an. Wir orientieren k so, dass das Normalvektorfeld $\mathbf{e}_2 = \mathbf{n} =$

$(n_1(x,y), n_2(x,y))$ längs der Kurve durch

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = -\nabla F(\mathbf{x})/\|\nabla F(\mathbf{x})\|,$$

gegeben ist. Nun ist die Krümmung gleich der Divergenz des normierten Gradientenfeldes,

$$\kappa = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} \right) = -\frac{\partial n_1}{\partial x} - \frac{\partial n_2}{\partial y}. \tag{70}$$

Durch Einsetzen von $\nabla F = (F_x, F_y)$ in (70) ergibt sich die Formel

$$\kappa = \frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_x^2F_{yy}}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}. \tag{71}$$

Beispiel 1: Das einfachste Beispiel ist eine *Gerade*,

$$F(x,y) = ax + by + c = 0.$$

Der Gradient ist (a,b), und damit ein Normalvektor (vgl. Analytische Geometrie). Wir erhalten $\kappa = 0$.

Beispiel 2: Ein *Kreis* mit Mittelpunkt (m_1, m_2) und Radius r hat die Darstellung

$$(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 - r^2 = 0.$$

Etwas allgemeiner schreiben wir die Gleichung in der Form

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \tag{72}$$

und schließen dadurch mit $A = 0$ die Geraden ein. Wir erhalten

$$\nabla F = \begin{pmatrix} 2Ax + B \\ 2Ay + C \end{pmatrix},$$

und

$$(\nabla F)^2 = 4A[A(x^2 + y^2) + Bx + Cy] + B^2 + C^2.$$

In Punkten der Kurve benutzen wir (72) und sehen, dass die Norm des Gradienten dort konstant ist,

$$(\nabla F)^2 = B^2 + C^2 - 4AD. \tag{73}$$

Die Krümmungsformel liefert das erwartete Ergebnis

$$\kappa = \frac{2A}{\|\nabla F\|} = \frac{2A}{\sqrt{B^2 + C^2 - 4AD}},$$

also Null für eine Gerade ($A = 0$) und $1/r$ für einen Kreis.

7.9 Distanzfunktion einer ebenen Kurve

Die *Distanzfunktion* einer gegebenen ebenen Kurve k bildet jeden Punkt $\mathbf{x} = (x, y)$ der Ebene auf den kürzesten Abstand $d(x, y)$ zu k ab. Bei einer glatten Kurve tritt dieser Abstand längs einer Normalen aus $\mathbf{x}$ auf k auf. Die Niveaukurven der Distanzfunktion sind (getrimmte) Parallelkurven. Dies bedeutet, dass eventuell nur Teile der vollständigen Parallelkurven im früher genannten Sinn auftreten. Die Distanzfunktion ist nicht differenzierbar längs der Ausgangskurve k und in Punkten des sogenannten *Schnittortes*. Letzterer besteht aus allen Punkten, in denen es zwei verschiedene Normalen an k gibt, längs denen der kürzeste Abstand d auftritt. Dort treten Knicke der getrimmten Parallelkurven auf (siehe Abb. 10, rechts). Die Stellen, an denen d nicht differenzierbar ist, sieht man auch gut an Knicken in der Graphenfläche $z = d(x, y)$ (siehe Abb. 10, links). Im Falle einer geschlossenen Kurve k nennt man den im Inneren liegenden Teil des Schnittortes auch *Mittelachse (medial axis)*; siehe Abb. 11.

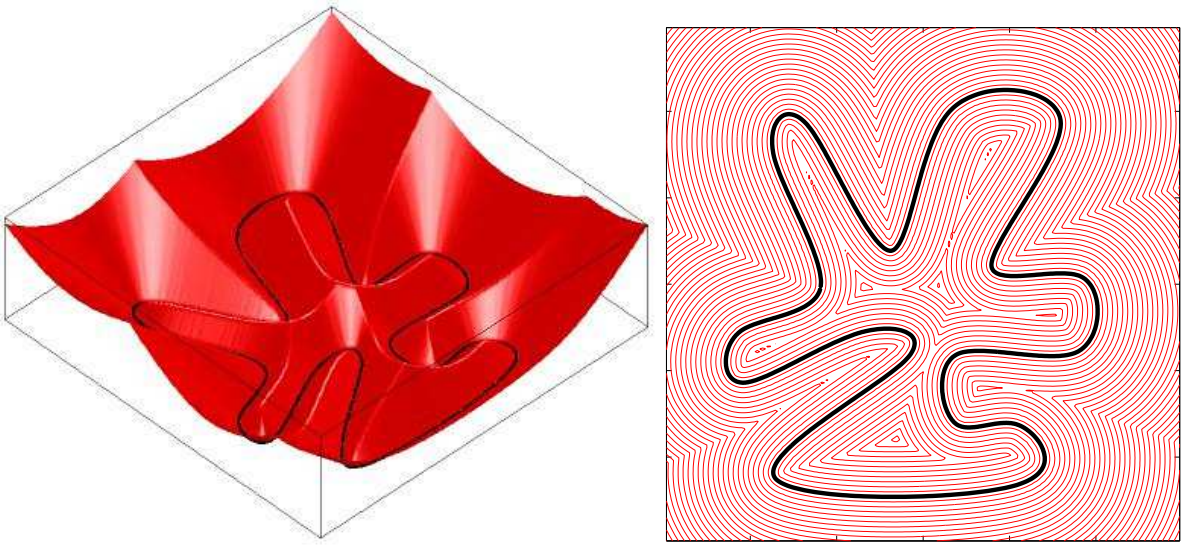


Abbildung 10: Distanzfunktion einer ebenen Kurve: (links) Graphenfläche, (rechts) Niveaukurven.

Gelegentlich betrachtet man für eine geschlossene Kurve k die *vorzeichenbehaftete Distanzfunktion*, welche aus der gewöhnlichen Distanzfunktion dadurch hervorgeht, dass man für alle inneren Punkte das Vorzeichen ändert. Damit erreicht man Differenzierbarkeit längs k.

Die Graphenfläche $z = f(x, y)$ einer Distanzfunktion trägt Geraden(stücke), entsprechend der linearen Veränderung der Distanz d längs der Normalen(stücke) von k. Die Tangentialebene längs einer solchen Geraden ist gegen $z = 0$ unter dem Winkel $\pi/4$ geneigt. Analytisch wird

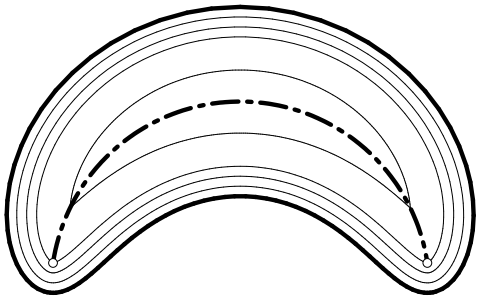


Abbildung 11: Getrimmte innere Parallelkurven und Mittelachse einer geschlossenen Kurve.

dies durch die Gültigkeit der so genannten *eikonalen Gleichung*

$$\| \nabla d(x, y) \| = 1, \tag{74}$$

ausgedrückt.

Beispiel 1a (Fortsetzung von Bsp. 1): Für eine Gerade $F(x, y) = ax + by + c = 0$, ist $\nabla F = (a, b)$. Genau für $(\nabla F)^2 = a^2 + b^2 = 1$ ist die eikonale Gleichung erfüllt, und F ist vorzeichenbehaftete Distanzfunktion. Dies ist die bereits bekannte Hesse'sche Normalform aus der analytischen Geometrie.

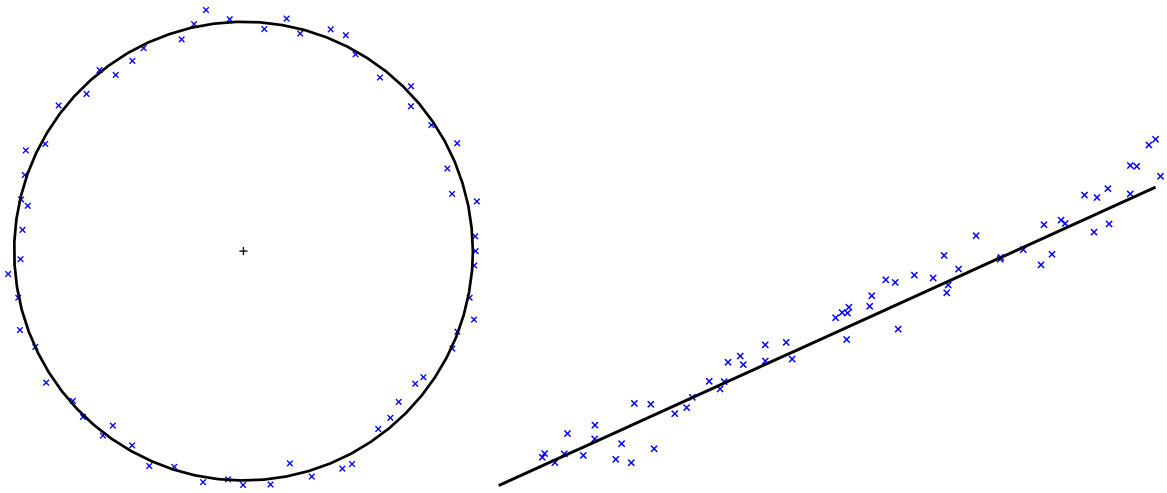
Beispiel 2a (Fortsetzung von Bsp. 2): Beim *Kreis* in der Form $F(x, y) = A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D = 0$ ist der Gradient nicht überall durch eine einfache Bedingung an $A, \ldots, D$ normierbar. Jedoch ist dies gemäß Beispiel 2 längs der Kurve k selbst möglich, wenn wir die Normierung

$$B^2 + C^2 - 4AD = 1, \tag{75}$$

verwenden. In der Nähe des Kreises ist bei dieser Normierung der Koeffizienten der Kreisgleichung der Wert der "algebraischen Distanz" $F(x, y)$ ungefähr der Wert der vorzeichenbehafteten geometrischen Distanz.

Anwendung: (*Berechnung eines Ausgleichskreises*). Gesucht ist ein Kreis, welcher eine gegebene Menge von Punkten $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, N$ der Ebene bestmöglich im Sinne kleinster Fehlerquadrate approximiert. Wir beschreiben den Kreis in der Form (72) und verwenden die Normierung (75). Wenn wir annehmen, dass es einen gut passenden Kreis gibt, ist diese Normierung geometrisch sinnvoll und daher die Funktion

$$f(A, B, C, D) = \sum_{i=1}^{N} F(x_i, y_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} [A(x_i^2 + y_i^2) + Bx_i + Cy_i + D]^2, \tag{76}$$



(**a**) (**b**)

Abbildung 12: Ergebnisse der Minimierung von (76): (**a**) Ausgleichskreis, (**b**) Ausgleichsgerade.

eine gute Approximation der Fehlerquadratsumme. Beachte, dass f eine quadratische Form in den Unbekannten A, B, C, D ist, welche unter der quadratischen Nebenbedingung (75) zu minimieren ist. Wir wissen bereits, dass dies auf die Lösung eines allgemeinen Eigenwertproblems hinausläuft.

Die Matrizen $K = P^T \cdot P$ und L der quadratischen Form (76) und der quadratischen Normierung (75) sind gegeben durch

$$P^T = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_N \\ x_1 & \cdots & x_N \\ y_1 & \cdots & y_N \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & & & -2 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -2 & & & 0 \end{pmatrix} \tag{77}$$

mit $u_i = x_i^2 + y_i^2$ für $i = 1, \ldots, N$. Wir lösen das allgemeine Eigenwertproblem $(K - \lambda L) \cdot \mathbf{x} = 0$. Der Eigenvektor $\mathbf{e} = (A, B, C, D)$ zum kleinsten Eigenwert minimiert die quadratische Form. Daraus ergeben sich Mittelpunkt $\mathbf{m}$ und Radius r des Ausgleichskreises,

$$\mathbf{m} = -\frac{1}{2A}(B, C), \quad r = \frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2}. \tag{78}$$

Beachte, dass mit $A = 0$ die Geraden inkludiert sind. Wenn also der beste Ausgleich mit einer Geraden erfolgt, wird diese auch gefunden (siehe Abb. 12).

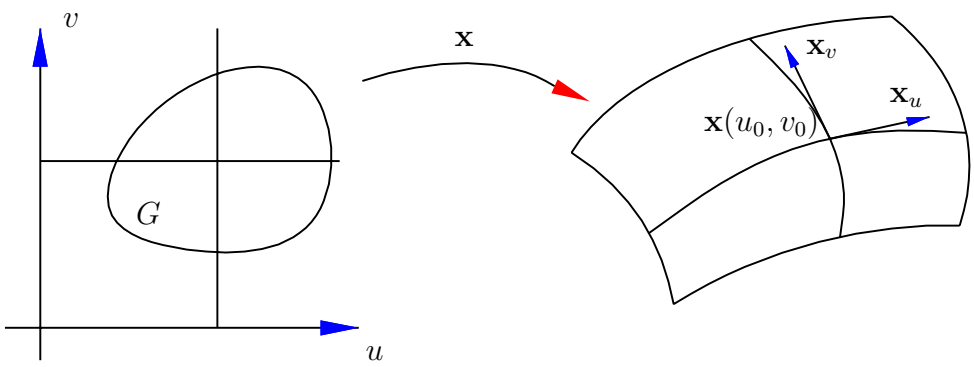
8 Flächentheorie

8.1 Parameterdarstellung

Definition 26: Das Bild des Gebietes G unter der Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}: \quad & G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) \in G \mapsto \mathbf{x}(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)) \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \in C^r \end{aligned}$$

heißt *parametrisierte C^r-Fläche*.



Die Parameter u, v heißen *zulässig*, wenn für jedes $(u,v) \in G$ die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \mathbf{x}_u, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \mathbf{x}_v$$

linear unabhängig sind.

Die Flächenkurven v = const = v_0 (u variiert) heißen *u-Linien*, die Flächenkurven u = const = u_0 (v variiert) nennt man *v-Linien*. Die Kurven dieser beiden Scharen heißen *Parameterlinien* und bilden auf der Fläche ein Kurvennetz.

Definition 27: Die Abbildung $f : \overline{G} \to G$, $(\overline{u}, \overline{v}) \mapsto (u,v)$ heißt zulässige C^r-Parametertransformation, wenn gilt:

1. f ist bijektiv,
2. $u = u(\overline{u}, \overline{v}), v = v(\overline{u}, \overline{v}) \in C^r$,

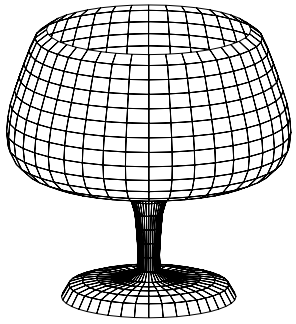
3. $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \overline{u}} & \frac{\partial v}{\partial \overline{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \overline{v}} & \frac{\partial v}{\partial \overline{v}} \end{vmatrix} \neq 0$ für alle $\overline{u}, \overline{v} \in \overline{G}$.

$\overline{\mathbf{x}} : \overline{G} \to \mathbb{R}^3$, $(\overline{u}, \overline{v}) \mapsto \mathbf{x}(u(\overline{u}, \overline{v}), v(\overline{u}, \overline{v}))$ beschreibt dieselbe Fläche wie $\mathbf{x}$. $(\overline{u}, \overline{v})$ sind zulässige Parameter, denn es gilt mit $\overline{\mathbf{x}}_{\overline{u}} = \frac{\partial \overline{\mathbf{x}}}{\partial \overline{u}}$, $\overline{\mathbf{x}}_{\overline{v}} = \frac{\partial \overline{\mathbf{x}}}{\partial \overline{v}}$,

$$\begin{pmatrix} \overline{\mathbf{x}}_{\overline{u}} \\ \overline{\mathbf{x}}_{\overline{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \overline{u}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \overline{u}} \\ \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \overline{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \overline{v}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \overline{u}} & \frac{\partial v}{\partial \overline{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \overline{v}} & \frac{\partial v}{\partial \overline{v}} \end{pmatrix}}_{\det \neq 0} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \end{pmatrix}. \tag{79}$$

Es sind also $\overline{\mathbf{x}}_{\overline{u}}, \overline{\mathbf{x}}_{\overline{v}}$ stets linear unabhängig, wenn $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ linear unabhängig sind, d.h. wenn u, v zulässige Parameter sind.

Beispiel 6: Eine Fläche Φ, die durch Drehung einer Kurve c um eine Achse entsteht, heißt *Drehfläche*. Wir wählen im folgenden die Drehachse als x_3-Achse eines kartesischen Koordinatensystems. Jeder Punkt von c beschreibt einen der Fläche angehörenden Kreis, der Parallelkreis von Φ heißt, weil die Bahnkreise verschiedener Punkte in untereinander parallelen, zur Achse normalen Ebenen liegen. Die Schnittkurven einer Drehfläche mit Ebenen durch die Achse heißen Meridiane. Alle Meridiane sind zueinander kongruent, weil sie durch Drehung um die Achse ineinander übergehen.



Wir geben nun eine Parameterdarstellung einer Drehfläche an, in der die Parallekreise die u-Linien und die Meridiane die v-Linien sind. Ein Meridian habe die Parameterdarstellung

$$r = r(v),\ x_3 = x_3(v),$$

wobei r der Abstand eines Punktes von der Drehachse ist. Damit lautet die Parameterdarstellung der Drehfläche

$$x_1 = r(v)\cos u,\ x_2 = r(v)\sin u,\ x_3 = x_3(v).$$

Speziell erhält man eine Kugel mit Radius R durch

$$r = R\cos v, x_3 = R\sin v.$$

Man nennt u die geographische Länge und v die geographische Breite. Die u-Linien sind dann die Breitenkreise der Kugel.

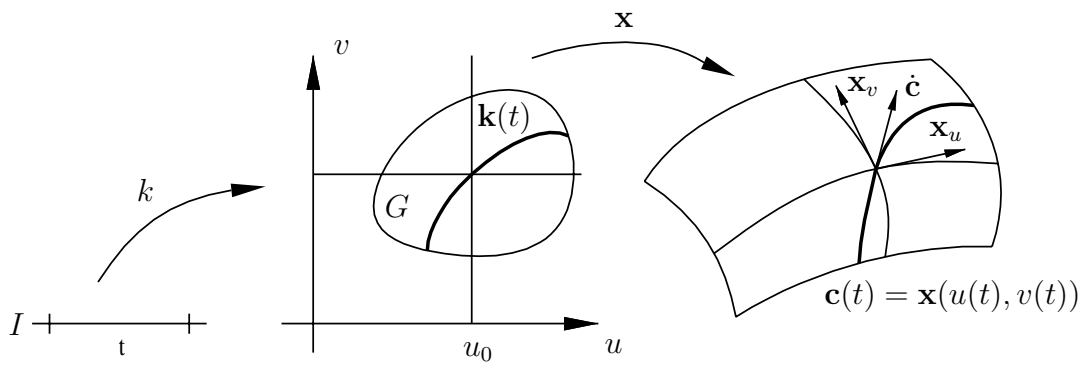
8.2 Flächenkurven

Eine Flächenkurve $\mathbf{c}$ auf der durch eine Parameterdarstellung $\mathbf{x}(u,v)$ gegebenen Fläche Φ ist das Bild einer Kurve des Parametergebietes unter der Abbildung $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$. Die Kurve im Parametergebiet kann entweder in impliziter Form $f(u,v) = 0$ oder in Parameterdarstellung $\mathbf{k}(t) = (u(t), v(t))$ gegeben sein. Für die folgenden Betrachtungen nehmen wir den letztgenannten Fall an. Die Kurve lautet also

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)). \tag{80}$$

Nach der Kettenregel finden wir einen Tangentenvektor an die Flächenkurve durch

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{c}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \mathbf{x}_u \dot{u} + \mathbf{x}_v \dot{v}. \tag{81}$$



Da der Tangentenvektor $\dot{\mathbf{c}}(t)$ an die Flächenkurve eine Linearkombination von $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ ist, liegen die Tangenten aller regulären Flächenkurven durch einen Punkt $P = \mathbf{x}(u,v)$ der Fläche Φ in der von den Tangentenvektoren $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ an die Parameterlinien aufgespannten Ebene (falls $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ linear unabhänging sind), der *Tangentialebene* von Φ in P. Bei einer zulässigen Parametrisierung einer Fläche sind $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ stets linear unabhängig.

Ein Normalvektor der Fläche in einem Punkt $\mathbf{x}(u,v)$ steht normal auf der Tangentialebene und ist daher parallel zu $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$.

8.3 Innere Flächenmetrik

8.3.1 Längenmessung

Die Bogenlänge einer Flächenkurve, festgelegt durch $u = u(t), v = v(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ auf der Fläche Φ mit der Darstellung $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ wird nach (61) berechnet durch

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt.$$

Mit (81) erhalten wir für das Quadrat des Integranden,

$$\dot{\mathbf{c}}(t)^2 = (\mathbf{x}_u \dot{u} + \mathbf{x}_v \dot{v})^2 = \mathbf{x}_u^2 \dot{u}^2 + 2\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \dot{u}\dot{v} + \mathbf{x}_v^2 \dot{v}^2.$$

Man führt nun die bivariaten Funktionen (Koeffizienten der ersten Fundamentalform)

$$E(u, v) := \mathbf{x}_u^2,\ F(u, v) := \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v,\ G(u, v) := \mathbf{x}_v^2, \tag{82}$$

ein, welche für jedes (u, v) die Koeffizienten des Euklidischen Skalarproduktes bezüglich der Basis $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$ sind. Die Länge s einer Flächenkurve $\mathbf{c}(t)$ erfüllt damit

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \dot{\mathbf{c}}^2 = E(u, v)\dot{u}^2 + 2F(u, v)\dot{u}\dot{v} + G(u, v)\dot{v}^2. \tag{83}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung nennt man *erste Fundamentalform* (erste Grundform, metrische Grundform). Die erste Grundform der Flächentheorie regelt die *innere Geometrie* der Fläche. Wenn diese Grundform bekannt ist, können Längen von Flächenkurven, Schnittwinkel zwischen Flächenkurven und Oberflächeninhalte berechnet werden.

Bemerkung 10: : Um übersichtlichere Formeln zu erhalten, schreibt man oft u^1, u^2 anstelle von u, v, setzt $\mathbf{x}_{,i}$ für die partielle Ableitung von $\mathbf{x}$ nach u^i, und benutzt die *Einstein'sche Summenkonvention*: Falls ein Index i als unterer und oberer Index auftritt, wird summiert für $i = 1, 2$. Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform schreibt man als

$$g_{ij} = \mathbf{x}_{,i} \cdot \mathbf{x}_{,j}. \tag{84}$$

Das Skalarprodukt zweier Tangentenvektoren $\mathbf{v} = v^i \mathbf{x}_{,i}$ und $\mathbf{w} = w^j \mathbf{x}_{,j}$ lautet damit

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v^i w^j g_{ij}, \tag{85}$$

und die erste Grundform schreibt sich einfach als

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{ik}\dot{u}^i \dot{u}^k. \tag{86}$$

8.3.2 Winkelmessung

Ein Tangentialvektor (an eine Flächenkurve) in einem Flächenpunkt ist durch die Koordinaten (u_1, v_1) bezüglich des durch $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ bestimmten affinen Koordinatensystems festgelegt. Zur Festlegung einer Richtung kommt es nur auf das Verhältnis

$$u_1 : v_1 = \dot{u}(t) : \dot{v}(t)$$

an.

Seien nun zwei Richtungen in der Tangentialebene eines Punktes festgelegt durch die normierten Tangentialvektoren $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$,

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{x}_u u_1 + \mathbf{x}_v v_1}{\sqrt{Eu_1^2 + 2Fu_1v_1 + Gv_1^2}},\ \mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{x}_u u_2 + \mathbf{x}_v v_2}{\sqrt{Eu_2^2 + 2Fu_2v_2 + Gv_2^2}}.$$

Für den Winkel ω zwischen $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ gilt dann

$$\cos\omega = \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 = \frac{Eu_1u_2 + F(u_1v_2 + v_1u_2) + Gv_1v_2}{\sqrt{Eu_1^2 + 2Fu_1v_1 + Gv_1^2}\sqrt{Eu_2^2 + 2Fu_2v_2 + Gv_2^2}}. \tag{87}$$

Speziell gilt für den Winkel zwischen u-Linie und v-Linie

$$cos\omega = \frac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}}.$$

Die Parameterlinien bilden daher genau dann eine orthogonales Netz wenn $F = 0$ für alle $(u, v) \in G$.

Beispiel 7: Wir betrachten wieder die Drehfläche $\mathbf{x}(u, v) = (r(v)\cos u, r(v)\sin u, x_3(v))$. Wegen

$$\mathbf{x}_u = (-r\sin u, r\cos u, 0),\ \mathbf{x}_v = (\dot{r}\cos u, \dot{r}\sin u, \dot{x}_3), \quad \text{mit } \dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}v}, \dot{x}_3 = \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}v},$$

erhalten wir als Koeffizienten der ersten Grundform,

$$E = \mathbf{x}_u^2 = r^2, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0, \quad G = \mathbf{x}_v^2 = \dot{r}^2 + \dot{x}_3^2.$$

Wegen $F = 0$ bilden die Meridiane und Breitenkreise ein orthogonales Netz, was auch rein geometrisch unmittelbar ersichtlich ist.

8.3.3 Flächenmessung

Sei Φ erfasst durch $\mathbf{x}(u,v)$ und variieren die Parameter $(u,v) \in G \subset \mathbb{R}^2$ in einem Gebiet $G_1 \subset G$.

Dann definiert man das so genannte Oberflächenelement als

$$\mathrm{d}O = \| \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Für den Flächeninhalt (Oberfläche) des über G_1 parametrisierten Flächenstücks $\Phi_1 \subset \Phi$ kann man folgende Formel herleiten,

$$O = \int\int_{G_1} \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{88}$$

8.4 Abbildungen von Flächen

Wir studieren hier Abbildungen von Flächen, weil sie in einer Reihe von Anwendungen benötigt werden: In der Computergraphik und der geometrischen Modellierung spielt die Abbildung zwischen einem ebenen Bereich und einem Flächenstück eine wichtige Rolle, etwa bei der Parametrisierung von Dreiecksnetzen oder beim Anbringen von Texturen auf gekrümmten Oberflächen. Abbildungen zwischen Flächen sind für die Beschreibung von Deformationen mit speziellen Eigenschaften wichtig. Sie wurden auch im Computer Vision zur Gesichtserkennung verwendet. In der Bildverarbeitung kommt die Differentialgeometrie dadurch ins Spiel, dass man einem Punkt (u, v) eines 2D Bildes mit g als Grauwert den Punkt $(u, v, g(u, v))$ des $\mathbb{R}^3$ zuornet; man erhält eine zugeordnete Fläche $(u, v, g(u, v))$, welche oft als Bildmannigfaltigkeit bezeichnet wird. Bei Farbbildern liegt die analoge 2-dimensionale Bildmannigfaltigkeit, etwa $(u, v, r(u, v), g(u, v), b(u, v))$, im $\mathbb{R}^5$. Eine Reihe von Problemen der Bildverarbeitung lassen sich so mit Methoden der Differentialgeometrie behandeln (siehe R. Kimmel, Numerical Geometry of Images, Springer, 2003).

Eine Abbildung einer Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ auf eine andere Fläche $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$ beschreiben wir durch eine zulässige Abbildung $(u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v})$ der Parameterbereiche.

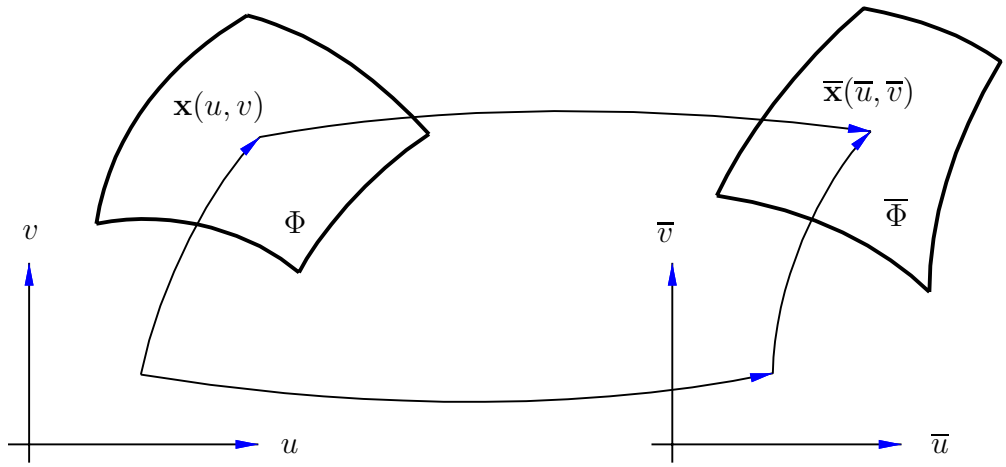


Abbildung 13: Abbildung zwischen Flächen

Die Umkehrung dieser Abbildung beschreibt auch einen zulässigen Parameterwechsel der Fläche $\bar{\Phi}$. Nach dem Parameterwechsel verwenden wir für die Parametrisierung wieder die ursprünglichen Bezeichnungen. Die Abbildung wird dann durch gleiche Parameter beschrieben, d.h. einem Punkt $\mathbf{x}(u, v)$ auf Φ entspricht jener Punkt $\bar{\mathbf{x}}(u, v)$ auf $\bar{\Phi}$, der zu denselben Werten u, v gehört.

Jeder (zulässig parametrisierten) Flächenkurve $\mathbf{c}$ auf Φ entspricht eine Flächenkurve $\bar{\mathbf{c}}$ auf $\bar{\Phi}$.

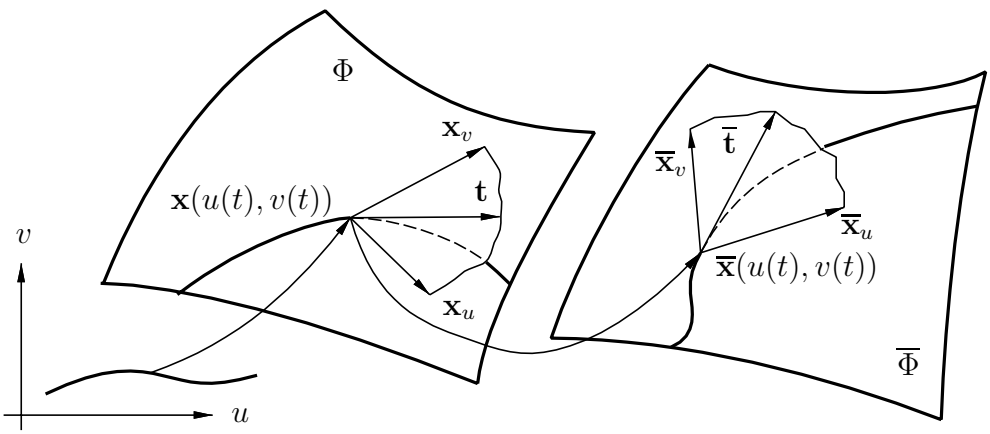


Abbildung 14: Lokale Eigenschaften der Abbildung zwischen Flächen

Die Abbildung

$$\mathbf{t} = \dot{u}\mathbf{x}_u + \dot{v}\mathbf{x}_v \mapsto \bar{\mathbf{t}} = \dot{u}\bar{\mathbf{x}}_u + \dot{v}\bar{\mathbf{x}}_v,$$

der Tangentenvektoren $\mathbf{t}$ von Flächenkurven durch $\mathbf{x}$ auf die Tangentenvektoren $\bar{\mathbf{t}}$ der Bildkurven $\bar{\mathbf{c}}$ durch $\bar{\mathbf{x}}$ heißt derivierte Abbildung ("berührende Affinität") und ist eine affine Abbildung der Tangentialebene in $\mathbf{x}$ auf die Tangentialebene in $\bar{\mathbf{x}}$, welche durch gleiche Koordinaten bezüglich der Basen $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ bzw. $\bar{\mathbf{x}_u}, \bar{\mathbf{x}_v}$ beschrieben wird.

Wir betrachten nun, wie Längen, Winkel und Flächen unter der Abbildung geändert werden.

Die zur Richtung $(\dot{u} : \dot{v})$ im Punkt $\mathbf{x}(u, v)$ gehörige *Längenverzerrung* ist definiert als

$$\lambda(u, v; \dot{u}, \dot{v}) := \frac{\| \bar{\mathbf{t}} \|}{\| \mathbf{t} \|}. \tag{89}$$

Für das Quadrat gilt damit

$$\lambda^2 = \frac{\bar{\mathbf{t}}^2}{\mathbf{t}^2} = \frac{\bar{E}\dot{u}^2 + 2\bar{F}\dot{u}\dot{v} + \bar{G}\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}.$$

Man betrachtet nun spezielle Eigenschaften der berührenden Affinität:

Winkeltreue: Die Längenverzerrung hat für alle Punktepaare einen von der Richtung $\dot{u} : \dot{v}$ unabhängigen Wert genau dann, wenn gilt

$$E : F : G = \bar{E} : \bar{F} : \bar{G}.$$

Die berührende Affinität ist dann eine Ähnlichkeit; die Abbildung ist winkeltreu (*konform*).

Längentreue: Die berührende Affinität muss eine Ähnlichkeit mit Ähnlichkeitsfaktor 1 sein. Kennzeichnend ist also

$$E = \bar{E}, F = \bar{F}, G = \bar{G}.$$

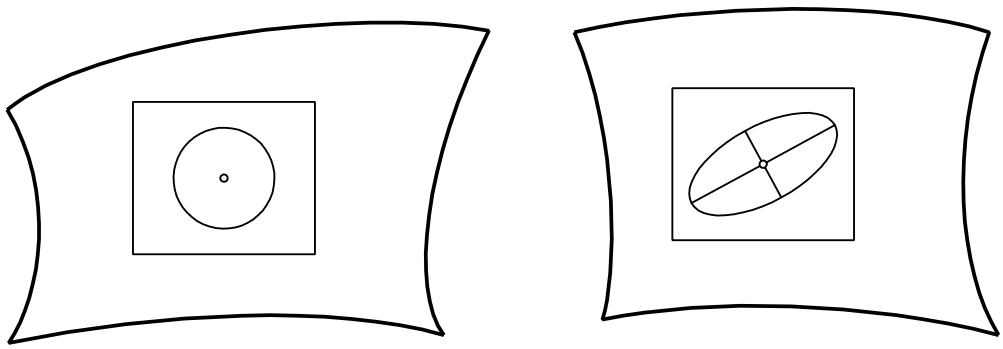
Die berührende Affinität ist eine Kongruenz; die Abbildung ist längentreu (*isometrisch*).

Flächentreue: Flächentreue liegt genau bei

$$EG - F^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2$$

vor. Aus der Formel (88) folgt unmittelbar, dass damit die Oberflächeninhalte entsprechender Flächenstücke $\Phi_1 \subset \Phi$ und $\bar{\Phi}_1 \subset \bar{\Phi}$ übereinstimmen.

Hauptverzerrungsrichtungen



An einer festen Stelle (u_0, v_0) fragen wir nach jenen Richtungen $(\dot{u} : \dot{v})$, für welche die Längenverzerrung $\lambda(u_0, v_0; \dot{u}, \dot{v})$ extremal wird. Dazu normieren wir $\mathbf{t} = \dot{u}\mathbf{x}_u + \dot{v}\mathbf{x}_v$ durch $\mathbf{t}^2 = 1$ und suchen die Extrema von $\bar{\mathbf{t}}^2$. Mathematisch bedeutet dies die Bestimmung der Extrema der quadratischen Form $\bar{E}\dot{u}^2 + 2\bar{F}\dot{u}\dot{v} + \bar{G}\dot{v}^2$ unter der quadratischen Nebenbedingung $E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2 = 1$. Wir haben also ein allgemeines Eigenwertproblem in 2 Dimensionen. Es gibt daher i.a. zwei extremale Richtungen. Rein geometrisch sieht man das so ein: Die im festen Punkt $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ von Φ angehefteten normierten Tangentenvektoren $\mathbf{t}$ beschreiben einen Einheitskreis k in der Tangentialebene dieses Punktes. Die berührende Affinität bildet diesen Kreis auf jene Ellipse $\bar{k}$ ab, welche von den entsprechenden Vektoren $\bar{\mathbf{t}}$ in $\bar{\mathbf{x}}(u_0, v_0)$ gebildet wird. Die extremalen Verzerrungen gehören zu den beiden Achsenrichtungen dieser Ellipse und stehen damit aufeinander normal. Ebenso sind die entsprechenden Richtungen auf Φ orthogonal. Man nennt die Ellipse $\bar{k}$ auch *Tissot'sche Indikatrix*. Sie ist ein Kreis bei lokaler Winkeltreue und der Einheitskreis bei lokaler Isometrie; genau in diesen Fällen ist das Paar der Hauptverzerrungsrichtungen nicht eindeutig bestimmt.

8.4.1 Stereographische Projektion

Anwendungsbeispiele für Abbildungen von Flächen sind Abbildungen der Kugel in die Ebene, auf denen die *Kartographie* beruht. Als Beispiel geben wir hier die stereographische Projektion an.

Die Projektion der Punkte einer Kugel Σ aus einem Punkt P der Kugel auf eine Ebene, welche nicht durch P geht und parallel zur Tangentialebene in P ist, bezeichnet man als *stereographische Projektion* σ. Wir verwenden als Projektionszentrum den Nordpol $N = (0, 0, 1)$ der Einheitskugel und als Bildebene die Äquatorebene $\pi : \ x_3 = 0$.

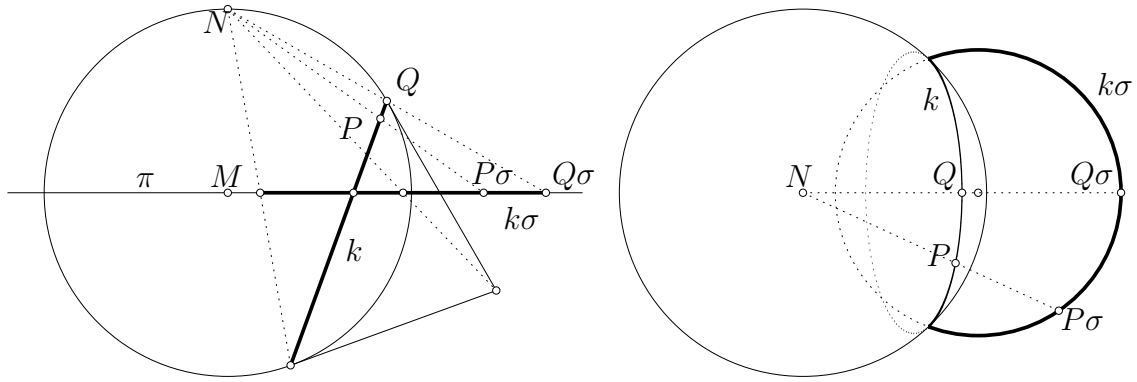


Abbildung 15: Stereographische Projektion σ aus dem Nordpol N auf die Äquatorebene π. Das Bild des Kreises k ist ein Kreis $k\sigma$. Links: Aufriss. Rechts: Grundriss in π.

Zur Herleitung der Abbildungsgleichungen von σ schneiden wir einen Sehstrahl durch den Punkt (x, y, z) mit der Bildebene:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich für den Bildpunkt (ξ, η),

$$\xi = \frac{x}{1-z}, \ \eta = \frac{y}{1-z}.$$

Diese Abbildung ist jetzt nur auf Punkte (x, y, z) der Einheitskugel anzuwenden. Wir setzen daher die Parameterdarstellung der Kugel,

$$(x, y, z) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v),$$

ein und erhalten als Abbildungsgleichungen der stereographischen Projektion,

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \mapsto \bar{\mathbf{x}}(u, v) = (\frac{\cos u \cos v}{1 - \sin v}, \frac{\sin u \cos v}{1 - \sin v}, 0). \qquad (90)$$

Zum Studium der Abbildung $\mathbf{x} \mapsto \bar{\mathbf{x}}$ berechnen wir mittels

$$\mathbf{x}_u = (-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0),\ \mathbf{x}_v = (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v),$$

die Koeffizienten der ersten Grundform der Kugel,

$$E = \cos^2 v,\ F = 0,\ G = 1.$$

Mit

$$\bar{\mathbf{x}}_u = (\frac{-\sin u \cos v}{1 - \sin v}, \frac{\cos u \cos v}{1 - \sin v}, 0),\ \bar{\mathbf{x}}_v = (\frac{\cos u}{1 - \sin v}, \frac{\sin u}{1 - \sin v}, 0),$$

gilt für die erste Grundform der ebenen Bildfläche,

$$\bar{E} = \frac{\cos^2 v}{(1 - \sin v)^2},\ \bar{F} = 0,\ \bar{G} = \frac{1}{(1 - \sin v)^2}.$$

Es gilt also,

$$\bar{E} : \bar{F} : \bar{G} = \cos^2 v : 0 : 1 = E : F : G,$$

und damit ist die Abbildung *winkeltreu*. Nebenbei sei bemerkt, dass die stereographische Projektion Kreise auf Kreise (oder Geraden) abbildet (siehe Fig. 15).

8.4.2 Abwickelbare Flächen

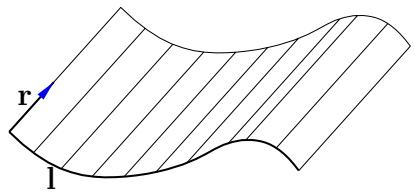
Abwickelbare Flächen sind solche, welche sich verzerrungsfrei, also isometrisch in die Ebene abbilden lassen. Solche Flächen spielen in verschiedenen Anwendungen (Blechbearbeitung, Architektur, Modellbau, Schiffbau, . . .) eine wichtige Rolle. Man kann zeigen, dass bei hinreichender Differenzierbarkeit eine abwickelbare Fläche lokal einem der folgenden drei Grundtypen angehört: Zylinderflächen, Kegelflächen und Tangentenflächen von Raumkurven. In der Folge werden diese näher studiert und jeweils eine isometrische Abbildung in die Ebene angegeben.

Zylinderflächen

Eine Zylinderfläche wird von einer stetigen Schar paralleler Geraden gebildet. Mit $\mathbf{r}$ als Richtungsvektor dieser Geraden (Erzeugenden) hat die Parameterdarstellung die Form

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{l}(u) + v\mathbf{r}. \tag{91}$$

Hier ist $\mathbf{l}(u)$ eine beliebige Kurve (Leitkurve) auf der Fläche. Zur einfacheren Beschreibung der isometrischen Abbildung in die Ebene (Abwicklung) nehmen wir die Leitkurve $\mathbf{l}(u)$ als Schnittkurve mit einer Ebene normal zu $\mathbf{r}$ (Normalschnitt) an. Ferner sei u Bogenlängenparameter dieser Leitkurve und $\mathbf{r}$ sei normiert. Damit haben wir die Bedingungen



$$\mathbf{r}^2 = 1,\ \dot{\mathbf{l}}^2 = 1,\ \dot{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{r} = 0.$$

Wir zeigen, dass die Abwicklung durch

$$\mathbf{x}(u,v) = \mathbf{l}(u) + v\mathbf{r} \ \mapsto\ \bar{\mathbf{x}}(u,v) = (u,v) \tag{92}$$

gegeben ist. Dies folgt unmittelbar aus

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \dot{\mathbf{l}}^2 = 1,\ F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \dot{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{r} = 0,\ G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{r}^2 = 1,$$

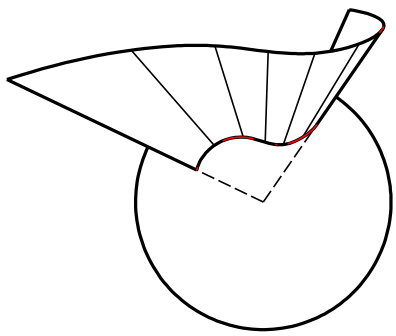
und

$$\bar{\mathbf{x}}_u = (1,0), \bar{\mathbf{x}}_v = (0,1),\ \ \bar{E} = 1,\ \bar{F} = 0,\ \bar{G} = 1.$$

Beachte, dass die Erzeugenden unter der Abwicklung in ein Büschel paralleler Geraden (Richtung $(0,1)$) abgebildet werden und dass jeder Normalschnitt in der Abwicklung als Gerade normal zu den verebneten Erzeugenden erscheint.

Kegelflächen

Eine Kegelfläche trägt eine stetige Schar von Geraden, welche alle durch einen fest Punkt, die Kegelspitze, gehen.
Wir legen die Kegelspitze in den Ursprung und die Leitkurve $\mathbf{l}(u)$ sei die auf ihre Bogenlänge bezogene Schnittkurve mit der Einheitskugel. Daher lautet die Darstellung der Fläche



$$\mathbf{x}(u,v) = v\mathbf{r}(u), \tag{93}$$

mit

$$\mathbf{r}^2 = 1,\ \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0,\ \dot{\mathbf{r}}^2 = 1.$$

Die Abwicklung ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(u,v) = v\mathbf{r}(u) \ \mapsto\ \bar{\mathbf{x}}(u,v) = (v\cos u, v\sin u). \tag{94}$$

Der Beweis erfolgt durch Vergleich der ersten Grundformen: Mit

$$\mathbf{x}_u = v\dot{\mathbf{r}},\ \mathbf{x}_v = \mathbf{r}, \quad \bar{\mathbf{x}}_u = (-v\sin u, v\cos u),\ \bar{\mathbf{x}}_v = (\cos u, \sin u),$$

haben wir

$$E = v^2,\ F = 0,\ G = 1; \quad \bar{E} = v^2, \bar{F} = 0, \bar{G} = 1.$$

Daher ist die Abbildung isometrisch. Natürlich erscheinen die Kegelerzeugenden in der Abwicklung als Geraden durch das Bild der Kegelspitze (Ursprung) und die Normalschnitte als dazu orthogonale konzentrische Kreise.

Tangentenflächen

Die allgemeinste Form der abwickelbaren Flächen sind die Tangentenflächen. Eine *Tangentenfläche* besteht aus den Tangenten einer Raumkurve $\mathbf{c}(u)$, hat also die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{c}(u) + v\dot{\mathbf{c}}(u). \tag{95}$$

Die Kurve $\mathbf{c}(u)$ ist eine singuläre Kurve auf der Tangentenfläche. Ein Schnitt mit einer Ebene hat dort i.a. eine Spitze; man nennt daher $\mathbf{c}$ auch *Gratlinie*. Dies zeigt Abb. 16 ebenso wie ein stückweise ebenes Modell, welches ausgehend von einem Polygon konstruiert wird: die Kanten des Modells sind die Seitengeraden des Polygons, die ebenen Flächen werden von aufeinanderfolgenden Kanten begrenzt. Auch dieses Modell zeigt das singuläre Verhalten des Ausgangspolygons und legt die Abwickelbarkeit der Tangentenfläche nahe.

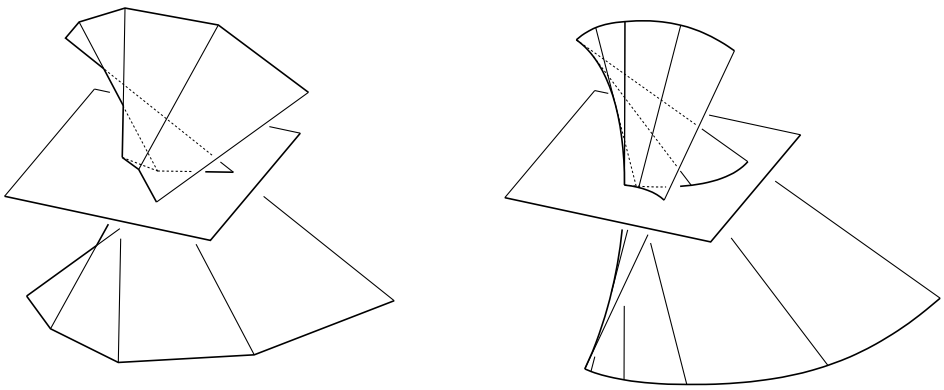


Abbildung 16: Polyhedral model (left) of tangent surface (right) with planar sections.

Zur einfacheren Beschreibung der Abwicklung sei $\mathbf{c}(u)$ nach der Bogenlänge u parametrisiert,

$$\dot{\mathbf{c}}^2 = 1,\ \dot{\mathbf{c}} \cdot \ddot{\mathbf{c}} = 0,\ \| \ddot{\mathbf{c}} \| = \kappa.$$

Hierin ist κ die Krümmung von $\mathbf{c}$. Auf der Suche nach dem Bild der Gratlinie $\mathbf{c}$ in der Abwicklung definieren wir eine ebene Kurve $\bar{\mathbf{c}}$, welche dieselbe Krümmungsfunktion $\kappa(u)$ mit Bogenlänge u wie die Raumkurve besitzt. Diese Kurve kann beschrieben werden als

$$\bar{\mathbf{x}}(u) = (\int_{u_0}^{u} \cos\phi(x)dx, \int_{u_0}^{u} \sin\phi(x)dx), \;\; \phi(u) = \int_{u_0}^{u} \kappa(x)dx.$$

Die Abwicklung lautet nun

$$\mathbf{x}(u,v) = \mathbf{c}(u) + v\dot{\mathbf{c}}(u) \;\mapsto\; \bar{\mathbf{x}}(u,v) = \bar{\mathbf{c}}(u) + v\dot{\bar{\mathbf{c}}}(u). \tag{96}$$

Zum Nachweis berechnen wir

$$\mathbf{x}_u = \dot{\mathbf{c}} + v\ddot{\mathbf{c}}, \; \mathbf{x}_v = \dot{\mathbf{c}},$$

und

$$\bar{\mathbf{x}}_u = (\cos\phi(u), \sin\phi(u)) + v\dot{\phi}(u)(-\sin\phi(u), \cos\phi(u)), \;\; \dot{\phi}(u) = \kappa(u), \; \bar{\mathbf{x}}_v = (\cos\phi(u), \sin\phi(u)).$$

Wegen

$$E = \dot{\mathbf{c}}^2 + 2v\dot{\mathbf{c}}\cdot\ddot{\mathbf{c}} + v^2\ddot{\mathbf{c}}^2 = 1 + v^2\kappa^2, \; F = 1, \; G = 1,$$

und

$$\bar{E} = 1 + v^2\kappa^2, \; \bar{F} = 1, \; \bar{G} = 1,$$

ist die Abbildung isometrisch.

Bemerkung: Alle Typen abwickelbarer Flächen sind *Regelflächen*, da sie eine stetige Schar von Geraden tragen. Es ist aber nicht jede Regelfläche abwickelbar! Unter den Regelflächen sind die abwickelbaren Flächen dadurch gekennzeichnet, dass jede Tangentialebene längs einer ganzen Erzeugenden berührt (bei den Tangentenflächen ist diese Tangentialebene die Schmiegebene an die Gratlinie im jeweiligen Gratpunkt). Bei einer anderen Regelfläche, z.B. bei einem einschaligen Drehhyperboloid, hat man in verschiedenen Punkten derselben Erzeugenden verschiedene Tangentialebenen.

8.5 Krümmungstheorie der Flächen

8.5.1 Normalkrümmung einer Flächenkurve

Auf der Fläche $\mathbf{x}(u,v)$ betrachten wir eine Kurve $\mathbf{c}(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$, mit s als Bogenlänge von $\mathbf{c}$. Dann lauten die Ableitungsvektoren

$$\mathbf{c}' = \mathbf{e}_1 = u'\mathbf{x}_u + v'\mathbf{x}_v,$$

und

$$\mathbf{c}'' = \kappa\mathbf{e}_2 = u'^2\mathbf{x}_{uu} + 2u'v'\mathbf{x}_{uv} + v'^2\mathbf{x}_{vv} + u''\mathbf{x}_u + v''\mathbf{x}_v.$$

Wir interessieren uns für die Normalkomponente des Krümmungsvektors $\mathbf{c}''$. Daher berechnen wir das innere Produkt mit dem Normalvektor $\mathbf{n}$,

$$\mathbf{c}'' \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n})u'^2 + 2(\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n})u'v' + (\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{n})v'^2.$$

Es ist üblich, die *Koeffizienten der zweiten Grundform* einzuführen,

$$L = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n},\ M = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n},\ N = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{n}, \tag{97}$$

oder in kompakter Notation,

$$h_{ij} = \mathbf{x}_{,ij} \cdot \mathbf{n}. \tag{98}$$

Damit lautet die Normalkomponente des Krümmungsvektors

$$\mathbf{c}'' \cdot \mathbf{n} = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2,\ \text{bzw. } \mathbf{c}'' \cdot \mathbf{n} = h_{ij}(u^i)'(u^j)'.$$

Um dies mittels eines allgemeinen Kurvenparameters t anstelle von s zu formulieren, benutzen wir die Kettenregel,

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{du^i}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\dot{u}^i}{\dot{s}} = \frac{\dot{u}^i}{\|\dot{\mathbf{c}}\|}.$$

Mittels (86) erhalten wir schließlich

$$\mathbf{c}'' \cdot \mathbf{n} = \frac{h_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j} = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}. \tag{99}$$

Das Skalarprodukt $\mathbf{c}'' \cdot \mathbf{n}$ hat die geometrische Bedeutung

$$\mathbf{c}'' \cdot \mathbf{n} = \kappa\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n} = \kappa\cos\phi. \tag{100}$$

Hierin ist ϕ der Winkel zwischen der Hauptnormalen $\mathbf{e}_2$ der Kurve und der Flächennormalen. Äquivalent dazu ist ϕ auch der Winkel zwischen der Schmiegebene von $\mathbf{c}$ und der Flächennormalen. Aus den angegebenen Formeln folgt:

Satz 10: Alle Flächenkurven durch einen festen Punkt $\mathbf{p}$, welche dort dieselbe Tangente und Schmiegebene besitzen, haben in $\mathbf{p}$ dieselbe Krümmung (sofern die Schmiegebene von der Tangentialebene der Fläche verschieden ist).

Beweis: Die Annahmen des Satzes bewirken, dass in

$$\kappa \cos \phi = \frac{h_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j} \tag{101}$$

der Winkel ϕ sowie die Größen auf der rechten Seite für alle betrachteten Flächenkurven gleich sind: Ein fester Punkt bewirkt nämlich festes (u, v) und damit konstante Werte der Fundamentalgrößen, eine feste Tangente bedingt ein festes Verhältnis $\dot{u}^1 : \dot{u}^2$. Daher ist auch die Krümmung κ konstant, weil $\cos \phi \neq 0$ gilt.

Für eine Kurve, deren Schmiegebene die Flächennormale enthält, insbesondere für einen Schnitt mit einer Ebene durch die Normale gilt $\phi = 0$. Daher bezeichnet man die zugehörige Krümmung $\kappa_n = \mathbf{c}'' \cdot \mathbf{n}$ als *Normalkrümmung*. Beachte, dass die Normalkrümmung nur noch von der Tangentenrichtung $\dot{u}^1 : \dot{u}^2$ abhängt. Wir haben bereits folgenden Satz bewiesen.

Satz 11: Die Normalkrümmung in einem Flächenpunkt in Richtung $\dot{u}^1 : \dot{u}^2$ berechnet sich als Quotient von zweiter und erster Grundform,

$$\kappa_n = \frac{h_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}. \tag{102}$$

In der anderen Notation haben wir

$$\kappa_n = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}. \tag{103}$$

Beispiel: Wir betrachten das Paraboloid Γ,

$$2z = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2,$$

und berechnen die Normalkrümmungen im Punkt $(0, 0, 0)$. Eine Parameterdarstellung von Γ lautet

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, \frac{1}{2}(a_0u^2 + 2a_1uv + a_2v^2)).$$

Mit

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, a_0u + a_1v),\ \mathbf{x}_v = (0, 1, a_1u + a_2v),$$

und

$$\mathbf{x}_{uu} = (0, 0, a_0),\ \mathbf{x}_{uv} = (0, 0, a_1),\ \mathbf{x}_{vv} = (0, 0, a_2),$$

erhalten wir in $(u, v) = (0, 0)$ die Einheitsnormale $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ und

$$E = 1,\ F = 0,\ G = 1,\ L = a_0,\ M = a_1,\ N = a_2.$$

Daher ist die Normalkrümmung κ_n des Paraboloids im Ursprung und zur Richtung $(\xi : \eta)$ gegeben durch

$$\kappa_n = \frac{a_0\xi^2 + 2a_1\xi\eta + a_2\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}. \tag{104}$$

Rufen wir die Bedeutung in Erinnerung: κ_n ist die Krümmung des Normalschnitts von Γ in der gewählten Richtung. In unserem Fall ist dies die Krümmung des Schnitts von Γ mit der Ebene $(x : y = \xi : \eta \Leftrightarrow \eta x - \xi y = 0)$, ausgewertet im Ursprung.

8.5.2 Der Satz von Meusnier

Wir studieren das Krümmungsverhalten von Flächenkurven durch einen festen Punkt $\mathbf{x}(u, v)$ mit einer festen Tangente, aber mit variabler Schmiegebene. Die obigen Betrachtungen zeigen, dass die Krümmung κ einer solchen Kurve, die Normalkrümmung κ_n und der Winkel ϕ zwischen Schmiegebene und Flächennormale die *Formel von Meusnier* erfüllen,

$$\kappa_n = \kappa \cos\phi. \tag{105}$$

Ein Wechsel zu den entsprechenden Krümmungsradien, $\rho = 1/\kappa, \rho_n = 1/\kappa_n$, liefert die äquivalente Form

$$\rho = \rho_n \cos\phi. \tag{106}$$

Die Krümmungsmitte des Normalschnitts in der gewählten Richtung ist

$$\mathbf{m}(u, v) = \mathbf{x}(u, v) + \rho_n \mathbf{n}.$$

Gleichung (106) drückt aus, dass die Drehachse des Krümmungskreises der allgemeinen Flächenkurve in der gewählten Richtung durch $\mathbf{m}(u, v)$ geht. Dies beweist den folgenden Satz.

Satz 12: (J.P.M. Meusnier de la Place, 1776) Wir betrachten alle Flächenkurven $\mathbf{c}$ durch einen festen Flächenpunkt $\mathbf{p}$, welche dort eine feste Tangente besitzen sowie eine von der Tangentialebene verschiedene Schmiegebene. Dann liegen die in $\mathbf{p}$ bestimmten Krümmungskreise aller dieser Kurven auf einer Kugel, welche die Fläche in $\mathbf{p}$ berührt.

8.5.3 Oskulierendes Paraboloid und Dupin'sche Indikatrix

In einem regulären Flächenpunkt können wir die Tangentialebene berechnen und die Fläche lokal als Graph einer Funktion über der Tangentialebene schreiben. Wir benutzen ein lokales

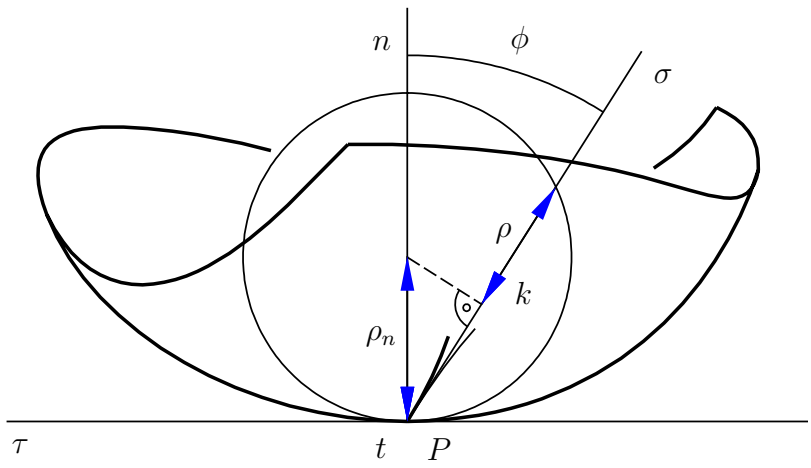


Abbildung 17: Kugel von Meusnier

Koordinatensystem mit der Tangentialebene $z = 0$ und dem Berührpunkt im Ursprung. Die lokale Darstellung als Graph, $z = f(x, y)$, erfüllt also $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Daher lautet die Entwicklung nach Taylor an der Stelle $(0, 0)$,

$$z = \frac{1}{2}[f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2] + (*). \tag{107}$$

Hierin bezeichnet (*) Terme von mindestens dritter Ordnung. Da die Terme höherer Ordnung nicht zur Krümmung beitragen, können wir sie weglassen und nur die Taylor–Näherung zweiter Ordnung betrachten. Sofern a_i die zweiten partiellen Ableitungen von f in $(0, 0)$ bezeichnet, lautet diese Fläche Γ,

$$z = \frac{1}{2}(a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2). \tag{108}$$

Sie heißt *oskulierendes Paraboloid*, obwohl sie auch ein parabolischer Zylinder (bei $a_0a_2 - a_1^2 = 0$) oder eine Ebene (falls $a_0 = a_1 = a_2 = 0$) sein kann. Das Paraboloid Γ hat dieselben Krümmungen im Ursprung (Scheitel von Γ) wie die ursprüngliche Fläche Φ. Zum Verständnis des Krümmungsverhaltens einer Fläche in einem Punkt genügt daher das Studium des Paraboloids (108) im Ursprung. Einen Teil dieses Studiums haben wir vorhin in einem Beispiel durchgeführt.

Zur weiteren Vereinfachung drehen wir das Koordinatensystem so um die z-Achse, dass x- und y-Achse mit den Hauptachsen des Paraboloids Γ zusammenfallen. Dadurch eliminieren wir den gemischten quadratischen Term und erhalten folgende Darstellung von Γ,

$$z = \frac{1}{2}(\kappa_1x^2 + \kappa_2y^2). \tag{109}$$

Der Einfachheit halber wurden die neuen Koordinaten wieder mit (x, y, z) bezeichnet. Die Bezeichnung der Koeffizienten mit κ_i deutet bereits ihre Interpretation an. Entsprechend der Formel

(104) ist die Normalkrümmung in der Richtung $x : y = \xi : \eta$ gegeben durch

$$\kappa_n = \frac{\kappa_1 \xi^2 + \kappa_2 \eta^2}{\xi^2 + \eta^2}. \tag{110}$$

Daher ist κ_1 die Normalkrümmung in Richtung $(1, 0)$ und κ_2 die Normalkrümmung in Richtung $(0, 1)$. Wir nennen diese orthogonalen Richtungen (Achsenrichtungen von Γ) die *Hauptkrümmungsrichtungen* und κ_i die zugehörigen *Hauptkrümmungen* von Γ und Φ. Wenn wir die Richtung (ξ, η) mittels des Winkels ϕ gegen die erste Hauptrichtung als $(\xi, \eta) = (\cos\phi, \sin\phi)$ anschreiben, erhalten wir unmittelbar folgendes Resultat.

Satz 13: (L. Euler, 1760) Die Normalkrümmung κ_n in einer Richtung, welche mit der ersten Hauptkrümmungsrichtung den Winkel ϕ bildet, hängt mit den Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 vermöge

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2\phi + \kappa_2 \sin^2\phi, \tag{111}$$

zusammen.

Die Euler'sche Formel zeigt auch schön, dass die Hauptkrümmungen Extrema der Normalkrümmung in einem Flächenpunkt sind.

Bevor wir mit der Berechnung der Hauptkrümmungen aus einer Parameterdarstellung fortfahren, sei noch auf eine *Visualisierung der Verteilung der Normalkrümmungen* hingewiesen.

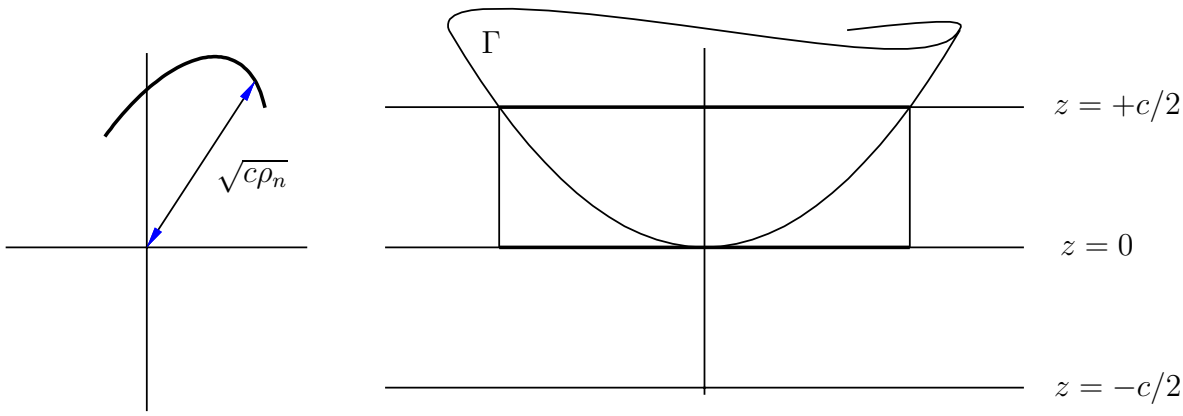


Abbildung 18: Konstruktion der Dupin'schen Indikatrix

Die Euler'sche Formel (111) kann mittels des Normalkrümmungsradius $\rho_n = 1/\kappa_n$ als

$$\kappa_1(\rho_n \cos^2\phi) + \kappa_2(\rho_n \sin^2\phi) = 1, \tag{112}$$

geschrieben werden. Wir betrachten nun die Punkte

$$(\sqrt{c\rho_n}\cos\phi, \sqrt{c\rho_n}\sin\phi).$$

Hierbei soll die Konstante c dasselbe Vorzeichen wie ρ_n haben, damit die Quadratwurzel reell ist. Diese Punkte bilden ein *radiales Diagramm* der Verteilung der Normalkrümmungen: die Diagrammpunkte in der entsprechenden Tangentenrichtung haben den Ursprungsabstand $\sqrt{c\rho_n}$. Die Gleichung (112) zeigt, dass die Diagrammpunkte auf der Kurve

$$\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2 = \pm c, \tag{113}$$

liegen, welche *Dupin'sche Indikatrix* genannt wird. Die Indikatrix wird auch erhalten, wenn man das Paraboloid Γ (109) mit den Ebenen $z = \pm c/2$ schneidet und die Schnittkurve(n) in die Tangentialebene $z = 0$ projiziert (Fig. 18). Hieraus folgt auch, dass die Dupin'sche Indikatrix im ursprünglichen System (vor der Hauptachsentransformation) die Darstellung

$$a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2 = \pm c,$$

besitzt. Überdies deutet (104) an (Beweis wird dem Leser überlassen), dass die Indikatrix im affinen System $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$ in der Tangentialebene der parametrisierten Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ folgende Gleichung hat,

$$L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 = \pm c. \tag{114}$$

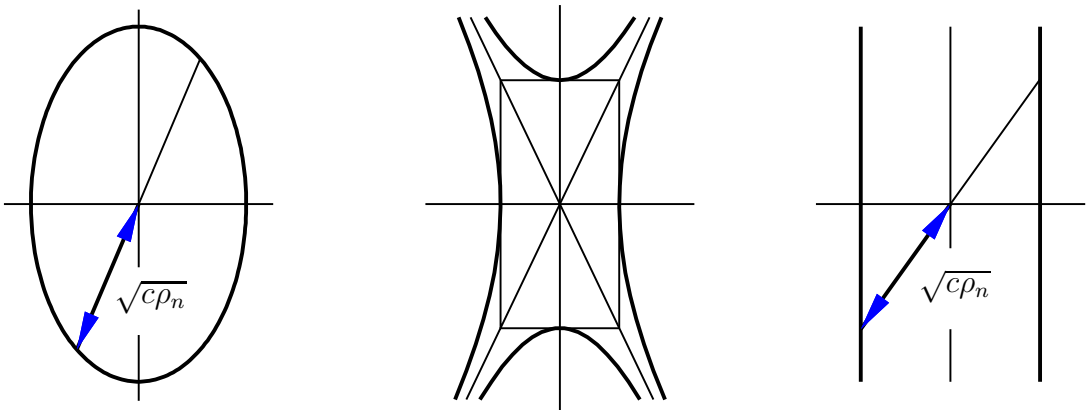


Abbildung 19: Dupinsche Indikatrix in einem elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Flächenpunkt

Eine genaue Diskussion erfordert eine Fallunterscheidung.

1. Falls κ_1 und κ_2 dasselbe Vorzeichen besitzen, $\kappa_1\kappa_2 > 0$, brauchen wir nur eine Konstante c. Bei einer geeigneten Orientierung des Normalvektors $\mathbf{n}$ sind beide κ_i's positiv, und wir setzen $c = 1$. Nun ist die Dupin'sche Indikatrix eine Ellipse, deren Achsen in den Hauptkrümmungsrichtungen liegen. Γ ist ein elliptisches Paraboloid. We nennen einen solchen Flächenpunkt einen *elliptischen Flächenpunkt*. Alle Normalkrümmungen haben dasselbe

Vorzeichen und daher liegt die Fläche lokal auf derselben Seite der Tangentialebene (lokale Konvexität). Eine Kennzeichnung mittels der zweiten Grundform benutzt (102) oder (103): Da der Nenner, die erste Grundform, stets positiv ist, ist ein konstantes Vorzeichen von κ_n äquivalent zu einer (positiv oder negativ) definiten zweiten Grundform. Daher ist ein elliptischer Flächenpunkt gekennzeichnet durch

$$LN - M^2 > 0 \qquad (\Longleftrightarrow \det(h_{ik}) > 0). \tag{115}$$

Ein elliptischer Punkt mit $\kappa_1 = \kappa_2$ heißt *Nabelpunkt*. Hier stimmen alle Normalkrümmungen überein, und jede Richtung kann als Hauptkrümmungsrichtung interpretiert werden. Die Indikatrix ist ein Kreis. Die einzige Fläche, welche nur Nabelpunkte besitzt, ist die Kugel.

2. Bei $\kappa_1\kappa_2 < 0$, also bei

$$LN - M^2 < 0 \qquad (\Longleftrightarrow \det(h_{ik}) < 0), \tag{116}$$

gibt es zwei verschiedene Richtungen mit verschwindender Normalkrümmung. Die zugehörigen Flächentangenten heißen *Schmiegtangenten*. Sie trennen Bereiche mit positivem κ_n von solchen mit negativem κ_n. Dem entsprechend benötigen wir zwei Konstanten für die Dupin'sche Indikatrix, z.B. $c = \pm 1$. Die Indikatrix besteht aus zwei Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten (Schmiegtangenten). Das oskulierende Paraboloid Γ ist ein hyperbolisches Paraboloid. Die Fläche liegt lokal auf beiden Seiten der Tangentialebene (sattelförmig). Wir sprechen von einem *hyperbolischen Flächenpunkt*.

3. Falls es genau eine verschwindende Hauptkrümmung gibt, etwa $\kappa_2 = 0$, besitzen die restlichen Normalkrümmungen dasselbe Vorzeichen. Wir nehmen o.B.d.A. $\kappa_1 > 0$ an. Die Dupin'sche Indikatrix (113) zu $c = 1$ ist $\kappa_1 x^2 = 1$, and daher ein Paar paralleler Geraden $x = \pm\sqrt{1/\kappa_1}$. Die oskulierende Fläche Γ ist ein parabolischer Zylinder. Der betrachtete Flächenpunkt heißt *parabolischer Punkt*. Er ist auch durch

$$LN - M^2 = \det(h_{ik}) = 0, \;\; (L, M, N) \neq (0, 0, 0), \tag{117}$$

gekennzeichnet. Ob die Fläche die Tangentialebene lokal durchsetzt oder nicht, kann nur durch eine Betrachtung der Ableitungen höherer Ordnung entschieden werden.

4. Schließlich kennzeichnet

$$L = M = N = 0, \tag{118}$$

einen *Flachpunkt* mit durchwegs verschwindenden Normalkrümmungen. Γ stimmt mit der Tangentialebene überein; die Indikatrix ist leer.

8.6 Gauß'sche Krümmung und mittlere Krümmung

Wir fahren fort mit der Berechnung der Hauptkrümmung bei einer allgemeinen Parametrisierung. Im Hinblick auf Gleichung (102) haben wir die Extrema von

$$\kappa_n = \frac{\mathbf{u}^T \cdot II \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \cdot I \cdot \mathbf{u}},$$

zu bestimmen. Hierin bestimmt der Vektor $\mathbf{u} = (\xi, \eta)$ die Richtung und $I = (g_{ik})$, $II = (h_{ik})$ sind die symmetrischen 2×2 Matrizen der ersten bzw. zweiten Grundform. Die Extrema des Quotienten der beiden quadratischen Formen sind auch die Extrema der zweiten Grundform $\mathbf{u}^T \cdot II \cdot \mathbf{u}$ unter der Normierungsbedingung $\mathbf{u}^T \cdot I \cdot \mathbf{u} = 1$. Wie wir bereits wissen, führt dies auf ein allgemeines Eigenwertproblem. Im vorliegenden Fall hat man die charakteristische Gleichung

$$\det(II - \lambda I) = 0. \tag{119}$$

Ausführlich lautet diese quadratische Gleichung in λ,

$$(EG - F^2)\lambda^2 + (2MF - EN - LG)\lambda + LN - M^2 = 0. \tag{120}$$

Die Lösungen sind die Hauptkrümmungen κ_1, κ_2. Die Hauptkrümmungsrichtung $\mathbf{u}_i$ (für $i = 1, 2$) ist durch den zugehörigen Eigenvektor gegeben, also durch eine Lösung der linearen Gleichung

$$(II - \kappa_i I) \cdot \mathbf{x} = 0.$$

Anwendung der Formeln von Vieta auf (120) liefert für das Produkt der Hauptkrümmungen,

$$K := \kappa_1 \kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\det(h_{ik})}{\det(g_{ik})}, \tag{121}$$

and für das arithmetische Mittel,

$$H := \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}. \tag{122}$$

K heißt *Gauß'sche Krümmung*, H wird als *mittlere Kruümmung* bezeichnet. Beide Krümmungsmaße haben eine Reihe wichtiger Eigenschaften. Es würde zu weit führen, diese näher zu studieren. Wir geben nur einige wichtige Resultate in den folgenden Bemerkungen an.

Ergänzende Bemerkungen

Die Gauß'sche Krümmung kann sehr anschaulich mittels der *Gauß'schen Abbildung* γ erklärt werden. Die Abbildung γ bildet jeden Flächenpunkt $\mathbf{x}(u, v)$ auf seinen Einheitsnormalvektor

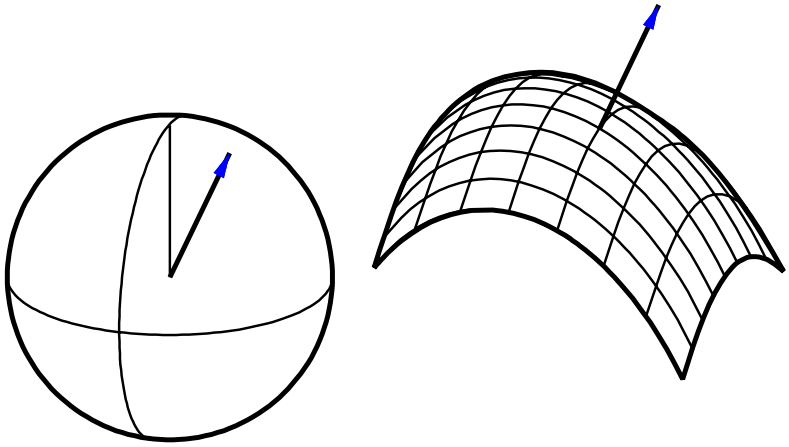


Abbildung 20: Gauß'sche Abbildung

$\mathbf{n}(u, v)$, interpretiert als Punkt der Einheitskugel, ab. Eine Umgebung U eines festen Flächenpunktes $\mathbf{x}_0$ wird dabei auf eine Umgebung $\gamma(U)$ seines Gauß'schen Bildpunktes $\gamma(\mathbf{x}_0)$ abgebildet. Wir betrachten das Verhältnis $A(\gamma(U))/A(U)$ der Flächeninhalte dieser Bereiche. Falls sich nun U auf den Punkt $\mathbf{x}_0$ zusammenzieht, strebt der Flächenquotient gegen die Gauß'sche Krümmung im Punkt $\mathbf{x}_0$. Dies stimmt gut mit unserer Anschauung überein: eine stark gekrümmte Region U besitzt ein flächenmässig großes Gauß'sches Bild $\gamma(U)$ und hat so auch eine große Gauß'sche Krümmung. Eine elegante Behandlung der Krümmungstheorie beruht auf der derivierten Abbildung der Gauß'schen Abbildung; hierzu verweisen wir auf Lehrbücher der Differentialgeometrie (z.B. M. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice Hall, 1976).

Das so genannte *Theorema egregium* von C. F. Gauß (1828) besagt, dass die Gauß'sche Krümmung K auch nur mittels der ersten Fundamentalgrößen g_{ik} und ihrer ersten und zweiten Ableitungen ausgedrückt werden kann. Daher ist *die Gauß'sche Krümmung eine Größe der inneren Geometrie*. Sie hängt nur von der Metrik in der Fläche ab. Dies ist sehr überraschend: ohne Benutzung des Einbettungsraums kann man zu einem Krümmungsbegriff kommmen. Aus dem Theorema egregium folgt auch, dass eine isometrische Abbildung die Gauß'sche Krümmung K erhalten muss. Insbesondere muss für eine Fläche, welche isometrisch in die Ebene abbildbar ist (eine abwickelbare Fläche), $K = 0$ gelten; das Gauß'sche Bild einer solchen Fläche ist nur eine Kurve (vgl. die Betrachtungen in Abschnitt 8.4). Ein anderes Anwendungsbeispiel zeigt, dass es keine verzerrungsfreien Abbildungen der Kugel in die Ebene gibt.

Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung $H = 0$ treten als Lösungen des Plateau'schen Problems auf: In eine geschlossene Raumkurve $\mathbf{c}$ ist ein Flächenstück minimalen Oberflächeninhaltes einzuspannen. Diese sogenannten *Minimalflächen* kann man in Form von Seifenhäutchen,

welche über einen geschlossenen Drahtrahmen gespannt sind, beobachten (aufgrund der Oberflächenspannung und bei Vernachlässigung der Schwerkraft).

8.7 Numerische Abschätzung von Tangentialebene und Krümmungen

8.7.1 Abschätzung der Tangentialebene

In vielen Anwendungen ist eine Fläche nur durch diskrete Datenpunkte, eventuell in Form einer Triangulierung, gegeben. Die Abschätzung differentialgeometrischer Invarianten ist dann keine ganz einfache Aufgabe und soll daher im folgenden kurz beschrieben werden.

Wir beginnen mit der Abschätzung der Tangentialebene in einem Punkt und geben hierfür einige der vielen in der Literatur zu findenden Methoden an.

1. Methode: *Mittelbildung der Normalenvektoren*.

   Dabei werden die Normalenvektoren aller $\mathbf{p}$ enthaltenden Dreiecke einer Triangulierung gemittelt, eventuell mittels Gewichtung durch die Flächeninhalte der jeweiligen Dreiecke. Dies ist eine eher grobe Abschätzung.

2. Methode: *lokale Ausgleichsebene*.

   Berechne die Ausgleichsebene des betrachteten Punktes $\mathbf{p}$ und seiner "Nachbarpunkte", eventuell mit Gewichtung der Punkte, wobei die Gewichte mit der Entfernung vom Datenpunkt $\mathbf{p}$ abnehmen. Die Tangentialebene wird parallel zur Ausgleichsebene gewählt.

3. Methode: *lokale Ausgleichsquadrik*.

   Wir wählen $\mathbf{p}$ als Ursprung des Koordinatensystems. Eine Quadrik durch $\mathbf{p}$ hat eine Gleichung der Form
   $$f(x, y, z) = \mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{x} = 0. \tag{123}$$
   Der Normalvektor in $\mathbf{p}$ lautet
   $$\nabla f = 2A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d},\ \nabla f\ |_{(0,0,0)} = \mathbf{d}.$$
   Wir normieren die Gleichung (123) mit $\| \mathbf{d} \| = 1$.

   Nun ist folgendes Ausgleichsproblem zu lösen: Minimiere
   $$\sum_i (\mathbf{x}_i^T A \mathbf{x}_i + \mathbf{d}^T \mathbf{x}_i)^2$$
   unter der Nebenbedingung $\| \mathbf{d} \| = 1$. Dabei ist über alle Datenpunkte $\mathbf{x}_i$ der Umgebung von $\mathbf{p}$ zu summieren. Unbekannte sind die Koeffzienten der symmetrischen Matrix A und die Koordinaten des Vektors $\mathbf{d}$, das sind 9 skalare Unbekannte. Wie viele andere geometrische Ausgleichsprobleme führt dieses auch auf eine allgemeine Eigenwertaufgabe. Der Vektor $\mathbf{d}$ definiert nun die abgeschätzte Flächennormale in $\mathbf{p}$.

8.7.2 Abschätzung der Krümmungen

1. Methode: Berechne *Krümmungen einer Ausgleichsquadrik*.

2. Methode: *Abschätzung des oskulierenden Paraboloids*.

   Diese Methode berechnet auch eine Ausgleichsquadrik, aber eine spezielle, nämlich ein Paraboloid. Die Motivation entstammt Abschnitt 8.5.3. Wir benützen ein lokales Koordinatensystem mit dem betrachteten Punkt $\mathbf{p}$ als Ursprung und der abgeschätzten Tangentialebene als xy-Ebene. In diesem System haben die Datenpunkte die lokalen Koordinaten (x_i, y_i, z_i). Wir suchen ein Paraboloid

   $$z = \frac{1}{2}(a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2),$$

   welches die Datenpunkte approximiert. Dazu minimieren wir

   $$\sum_i [\frac{1}{2}(a_0x_i^2 + 2a_1x_iy_i + a_2y_i^2) - z_i]^2. \tag{124}$$

   Die Zielfunktion ist quadratisch in den Unbekannten a_0, a_1, a_2, die Mininmierung erfolgt daher über die Lösung eines linearen Gleichungssystems.

   Eine Variante dieser Methode verbessert auch die Tangentialebene durch Betrachtung der lokal approximierenden Funktion

   $$z = b_0x + b_1y + \frac{1}{2}(a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2).$$

   Auch hier liegt ein Paraboloid vor, aber man setzt die Tangentialebene nicht vorher fest, sondern erlaubt eine Korrektur mittels eines Ausgleichs analog zu (124).