4 MEHRDIMENSIONALE VERTEILUNGEN

4.14 Stochastische Vektoren

1. Der Merkmalraum des stochastischen Vektors (X, Y) sei $M = \mathbb{R}^2$. Betrachten Sie die folgenden Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{(x,y) : x \le 2, y \le 4\}, \quad W(A_1) = \frac{7}{8} \\
A_2 &= \{(x,y) : x \le 2, y \le 1\}, \quad W(A_2) = \frac{4}{8} \\
A_3 &= \{(x,y) : x \le 0, y \le 4\}, \quad W(A_3) = \frac{3}{8} \\
A_4 &= \{(x,y) : x \le 0, y \le 1\}, \quad W(A_4) = \frac{2}{8}
\end{aligned}
$$

   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit von $A_5 = \{(x,y) : 0 < x \le 2, 1 < y \le 4\}$.

2. Zeigen Sie, daß die folgende Funktion nicht die Verteilungsfunktion eines 2–dimensionalen stochastischen Vektors (X, Y) sein kann:

$$
F(x,y) = \begin{cases} 1 & x + 2y \ge 1 \\ 0 & x + 2y < 1 \end{cases}
$$

3. [R–Aufgabe] Stellen Sie die Funktion $F(x,y) = xy$ im Bereich $0 \le x, y \le 1$ graphisch dar (Handelt es sich um eine Verteilungsfunktion?). Zeichnen Sie auch einen Contourplot (d.h. einen Plot der Höhenschichtlinien). (*Hinweis:* Orientieren Sie sich an den Beispielen im Help–File zu `persp`; Countourplots bekommt man mittels `contour`.)

4.15 Mehrdimensionale diskrete Verteilungen

4. Es gibt einen anfangs leeren Zug mit 6 Waggons; 12 Personen steigen ein. Wenn die Personen unabhängig voneinander willkürlich einen Waggon wählen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß (a) in jedem Waggon 2 Personen sitzen; daß (b) es einen leeren Waggon, einen mit 1, zwei mit 2, einen mit 3 und einen mit 4 Personen gibt?

5. (a) Ein Würfel wird 10 Mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt man 1 Einser, 2 Zweier, 3 Dreier und 4 Vierer?
   (b) Zehn Würfelpaare werden geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt man 4 mit Augensumme 7, 3 mit Summe 8, 2 mit Summe 10 und 1 mit Summe 12 ?
   (c) Vier Würfel werden geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit mit der man gleichviel Zweier und Fünfer bekommt.

6. Angenommen, 12 Karten werden aus einem gewöhnlichen (gut durchmischten) Kartenpaket gezogen. X_1 sei die Zahl der gezogenen Einser (Asse), X_2 die Zahl der Zweier, X_3 die Zahl der Dreier und X_4 die Zahl der Vierer. Bestimmen Sie einen Ausdruck für die gemeinsame Verteilung von (X_1, X_2, X_3, X_4), d.h. bestimmen Sie $p(x_1, x_2, x_3, x_4) = W\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4\}$, wenn die Ziehungen (a) ohne Zurücklegen, (b) mit Zurücklegen erfolgen.

7. Zwei regelmäßige Tetraeder mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4 werden geworfen. Bestimmen Sie – in Tabellenform – die gemeinsame Verteilung von X = untenliegende Augenzahl des 1. Tetraeders und Y = größere der beiden untenliegenden Augenzahlen und die beiden Randverteilungen.

8. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion eines 2–dimensionalen stochastischen Vektors sei gegeben durch:

$$
p(x_1, x_2) = W\{X_1 = x_1, X_2 = x_2\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1 + x_2}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{N}
$$

   (a) Zeigen Sie, daß es sich um eine W–Verteilung handelt.
   (b) Ermitteln Sie die Randverteilungen von X_1 und X_2.

(c) Bestimmen Sie: $W\{X_1 = X_2\}$, $W\{X_1 > X_2\}$, $W\{X_1 \leq X_2\}$.

(d) Bestimmen Sie die Randverteilung von X_1+X_2, d.h. bestimmen Sie $W\{X_1+X_2 = k\}$ für $k = 2, 3, \ldots$

*9. Der stochastische Vektor $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_m)'$ sei multinomialverteilt, $\underline{X} \sim M_{n;\, \theta_1, \ldots, \theta_m}$. Ermitteln Sie *ohne* Rechnung die Randverteilung von ($1 \leq i,\, j \leq m$):

(a) X_i

(b) $(X_i,\, X_j)$ $(i \neq j)$

(c) $X_i + X_j$ $(i \neq j)$

4.16 Mehrdimensionale kontinuierliche Verteilungen

10. Die Dichte des stochastischen Vektors (X, Y) ist gegeben durch:

$$f(x, y) = cxyI_{(0,x)}(y)I_{(0,2)}(x)$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c.

(b) Berechnen Sie $W\big\{X \leq 1, Y \leq 1\big\}$.

(c) Ermitteln Sie die Randdichten von X und Y.

(*Hinweis:* Eine Skizze des Merkmalraums von (X, Y) ist hilfreich.)

11. Ein Punkt (X, Y) wird zufällig in einem Kreis (in Nullpunktslage) mit Radius 1 gewählt.

(a) Wie lautet die gemeinsame Dichte von X und Y ?

(b) Bestimmen Sie die Randdichten von X und Y.

12. Die gemeinsame Dichte von (X, Y) ist gegeben durch:

$$f(x, y) = ce^{-2x-3y}, \quad x, y > 0$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c.

(b) Berechnen Sie $W\{X > Y\}$.

(c) Ermitteln Sie die Randdichten von X und Y.

13. Für einen bivariat normalverteilten stochastischen Vektor (X, Y) gilt $\mu_x = 26$, $\mu_y = -12$ und die Matrix Σ ist gegeben durch:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 196 & -91 \\ -91 & 169 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Dichte $f(x, y)$ von (X, Y).

(b) Bestimmen Sie die Stelle und den Wert des Maximums von $f(x, y)$.

(c) Ermitteln Sie die Randdichten von X und Y.

14. Die Dichte eines Zufallspunktes (X, Y) in der Ebene ist gegeben durch:

$$f(x, y) = c \exp\Big\{-\big[4(x-5)^2 + 2(x-5)(y-3) + 5(y-3)^2\big]\Big\}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c.

(b) Ermitteln Sie die (Kovarianz–) Matrix Σ.

(c) Ermitteln Sie die Randdichten von X und Y.

*15. Für einen 3–dimensional normalverteilten stochastischen Vektor (X, Y, Z) gilt $\mu_x = \mu_y = \mu_z = 0$ und die (Kovarianz–) Matrix Σ ist gegeben durch:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Dichte $f(x, y, z)$ sowie die Stelle und den Wert ihres Maximums.

4.17 Erwartungswert von Funktionen von stochastischen Vektoren

16. Die Längen der Seiten x, y eines Rechtecks haben eine gemeinsame Dichte wie in **B-10**. Bestimmen Sie den Erwartungswert (a) des Umfangs und (b) der Fläche des Rechtecks. (*Hinweis:* SvuStat.)

17. Betrachten Sie die Situation von **B-11**: $D = \sqrt{X^2 + Y^2}$ ist der Abstand des Punktes vom Nullpunkt.

    (a) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion und die Dichte von D. (*Hinweis:* Argumentieren Sie geometrisch.)

    (b) Bestimmen Sie auf Basis des Ergebnisses von (a) den Erwartungswert von D.

    *(c) Bestimmen Sie mit Hilfe des SvuStat den Erwartungswert von D. (*Hinweis:* Transformieren Sie auf Polarkoordinaten.)

18. Bestimmen Sie den Erwartungswert der folgenden sGn:

    (a) Die Zahl der Inversionen einer zufälligen Permutation von $1, 2, \ldots, n$ (vgl. **B-1-3**).

    (b) Die Zahl der Läufe in einer zufälligen Binärfolge der Länge n (vgl. **B-1-4**).

    (c) Die Zahl der Titel auf einer CD, die im Shuffle Play an der richtigen Stelle wiedergegeben werden (vgl. **B-2-12**).

    Stützen Sie sich dabei auf die in **B-3-13** diskutierte Darstellung dieser Größen als Summe von alternativverteilten sGn.

4.18 Kovarianz, Korrelation und Unabhängigkeit

19. Bestimmen Sie für den stochastischen Vektor (X, Y) von **B-7**:

    (a) die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$;

    (b) den Korrelationskoeffizienten $\rho_{X,Y}$.

*20. Bestimmen Sie – ausgehend von den Ergebnissen von **B-9** – (a) die Kovarianz $\text{Cov}(X_i, X_j)$, (b) den Korrelationskoeffizienten ρ_{X_i,X_j} von zwei Größen X_i und X_j $(i \neq j)$ aus einem multinomialverteilten stochastischen Vektor $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_m)'$.

21. Bestimmen Sie für den stochastischen Vektor (X, Y) von **B-10**:

    (a) die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$;

    (b) den Korrelationskoeffizienten $\rho_{X,Y}$.

22. Bestimmen Sie für den stochastischen Vektor (X, Y) von **B-11**:

    (a) die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$;

    (b) den Korrelationskoeffizienten $\rho_{X,Y}$.

23. Bestimmen Sie für den bivariat normalverteilten stochastischen Vektor von **B-13**:

    (a) $\text{Var}(X)$ und $\text{Var}(Y)$;

    (b) $\text{Cov}(X, Y)$ und $\rho_{X,Y}$;

    (c) Mittelwert und Varianz von $X + Y$ und $X - Y$.

24. Bestimmen Sie mit Hilfe von Satz 18.3 (VO) die Varianz der Zahl der Titel auf einer CD, die im Shuffle Play an der richtigen Stelle wiedergegeben werden. (*Hinweis:* Vgl. **B-18**.)

25. Für welche der stochastischen Vektoren (X, Y) von **B-7**, **B-10**, **B-11** und **B-12** sind X und Y stochastisch unabhängig?

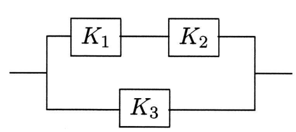
26. Angenommen, jemand verläßt die Wohnung zwischen 8:00 und 8:30 und benötigt zwischen 40 und 50 Minuten Fahrzeit, um ins Büro zu gelangen. Wenn man annimmt, daß der Zeitpunkt des Aufbruchs und die Fahrzeit unabhängige und auf dem jeweiligen Bereich uniform verteilte stochastische Größen sind, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Person vor 9:00 im Büro eintrifft?

4.19 Bedingte Verteilungen

27. Bestimmen Sie für die Situation von **B-7** (a) die bedingte Verteilung von Y, wenn $X = 2$; (b) die bedingte Verteilung von X, wenn $Y = 2$.
28. Jemand wirft eine nach P_μ verteilte Anzahl X von Münzen und zählt anschließend die Zahl Y der geworfenen Köpfe. Bestimmen Sie die Verteilung von Y. (*Hinweis:* Bestimmen Sie zuerst die gemeinsame Verteilung von (X, Y) und anschließend die Randverteilung von Y.)
29. Bestimmen Sie für den stochastischen Vektor von **B-10**:
    (a) die bedingten Dichten $f(y|x)$, $f(x|y)$;
    (b) die beiden Regressionsfunktionen $\mathbb{E}(Y|X = x)$, $\mathbb{E}(X|Y = y)$ und stellen Sie sie graphisch dar.
30. Der Input eines Programms ist eine stochastische Größe X mit Dichte $f_X(x) = xe^{-x}I_{(0,\infty)}(x)$. Bedingt durch $X = x$ ist die Ausführungszeit des Programms eine exponentialverteilte stochastische Größe mit Mittel $1/x$. Ermitteln Sie die Dichte für die Ausführungszeit Y des Programms. (*Hinweis:* Bestimmen Sie zuerst die gemeinsame Dichte von (X, Y) und anschließend die Randdichte von Y.)
31. X und Y seien bivariat normalverteilt mit den Parametern $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 1$, $\sigma_1^2 = 16$, $\sigma_2^2 = 25$ und $\rho = \frac{3}{5}$. Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
    (a) $W\{3 < Y < 8\}$
    (b) $W\{3 < Y < 8 \,|\, X = 7\}$
    (c) $W\{-3 < X < 3\}$
    (d) $W\{-3 < X < 3 \,|\, Y = -4\}$
32. Bestimmen Sie für die Situation des vorigen Beispiels die beiden Regressionsfunktionen $\mathbb{E}(Y|X = x)$, $\mathbb{E}(X|Y = y)$ und stellen Sie sie graphisch dar.

4.20 Verteilung von Funktionen von stochastischen Vektoren

33. Bestimmen Sie für die 3–dimensionale Normalverteilung von **B-15** die Verteilung von $X + Y + Z$.
34. Ein System bestehe aus fünf Komponenten mit unabhängigen und identisch nach $U_{(0,100)}$ verteilten Lebensdauern. Bestimmen Sie die Verteilung (Verteilungsfunktion und Dichte) der Lebensdauer des Systems, wenn die Komponenten (a) parallel; (b) in Serie angeordnet sind.
35. Ein Seriensystem bestehe aus drei Komponenten mit unabhängigen und identisch exponentialverteilten Lebensdauern (Mittelwert τ). Bestimmen Sie die Verteilung (Verteilungsfunktion und Dichte) der Lebensdauer des Systems sowie den Mittelwert und die Streuung.
36. Die logische Struktur eines Systems bestehend aus drei Komponenten sei gegeben wie folgt:



    Die Lebensdauern der Komponenten seien unabhängig und identisch verteilt mit Dichte $f(x) = e^{-x}\, I_{(0,\infty)}(x)$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und die Dichte der Lebensdauer des Systems sowie den Mittelwert.
37. Die (diskrete) Lebensdauer einer Komponente folge einer G_p–Verteilung. Fällt die Komponente aus, wird sie sofort durch eine gleichartige Reservekomponente ersetzt. Bestimmen Sie die Verteilung der Gesamtlebensdauer.
38. Die Lebensdauer X einer Komponente folge einer uniformen Verteilung auf dem Intervall $(0, 3)$. Fällt die Komponente aus, wird sie sofort durch eine Reservekomponente mit auf dem Intervall $(0, 5)$ uniform verteilter Lebensdauer Y ersetzt.
    (a) Bestimmen (und zeichnen) Sie die Dichte der Gesamtlebensdauer, d.h. bestimmen Sie die Dichte von $S = X + Y$. (*Hinweis:* Faltung; orientieren Sie sich am Beispiel der Vorlesung.)
    (b) Bestimmen Sie Mittelwert und Streuung von S.

39. Eine Abfüllvorrichtung füllt Mengen ab, die normalverteilt mit $\mu = 1000$ g und $\sigma = 10$ g sind. Durch mehrfache Betätigung können auch Vielfache von 1 kg – Packungen abgefüllt werden. Bestimmen Sie die Verteilung der Menge von 2, 3, 5 und 10 kg – Packungen. Wie groß ist jeweils die Standardabweichung der Füllmenge?

40. An einem Schalter folgen die Servicezeiten einer Exponentialverteilung mit Mittelwert 5 Minuten. Wie ist Ihre Wartezeit verteilt, wenn sich bereits drei Personen vor diesem Schalter angestellt haben? (Mittelwert? Streuung?)