P4

4.1 Beschreiben Sie die von Ihnen implementierte Reduktion auf SAT und argumentieren Sie informell ihre Korrektheit

Die von mir implementierte Reduktion lehnt sich an den in der Angabe verlinkten Internetressourcen an. Ich vergebe für jeden Knoten des Graphen v und jedes i von 1 bis k eine Variable x_{iv}. Diese Variable besagt, dass v der i-te Knoten einer k-Clique ist.

Mit diesen Variablen erstelle ich folgende Klauseln:

1. Für jedes i von 1 bis k erstelle ich eine Klausel mit der Aussage „Die Clique besitzt einen i-ten Knoten“. Formel der (einzelnen) Klausel: $\bigvee_{v \in V} x_{iv}$.
2. Für jedes i von 1 bis k, jedes j von $i+1$ bis k (ungerichteter Graph) und jeden Knoten v erstelle ich eine Klausel mit der Aussage „Der Knoten v kann nicht gleichzeitig der i-te und j-te Knoten der Clique sein“. Formel der (einzelnen) Klausel: $\neg x_{iv} \vee \neg x_{jv}$.
3. Für alle Knotenpaare u und v, welche nicht verbunden sind, erstelle ich eine Formel mit der Aussage „Die Knoten können nicht beide in der Clique enthalten sein“. Die Formel besteht folgenden Klauseln für jedes i von 1 bis k und jedes $j \neq i$ von 1 bis k: $\neg x_{iu} \vee \neg x_{jv}$.

Alle Variablen innerhalb einer Klausel sind verodert, die Klauseln selbst werden verundet. Daraus ergibt sich eine Formel in CNF mit der Aussage „Die Variablen x_{iv} kodieren eine k-Clique in G“. Diese Aussage ist genau dann wahr, wenn G eine k-Clique enthält.

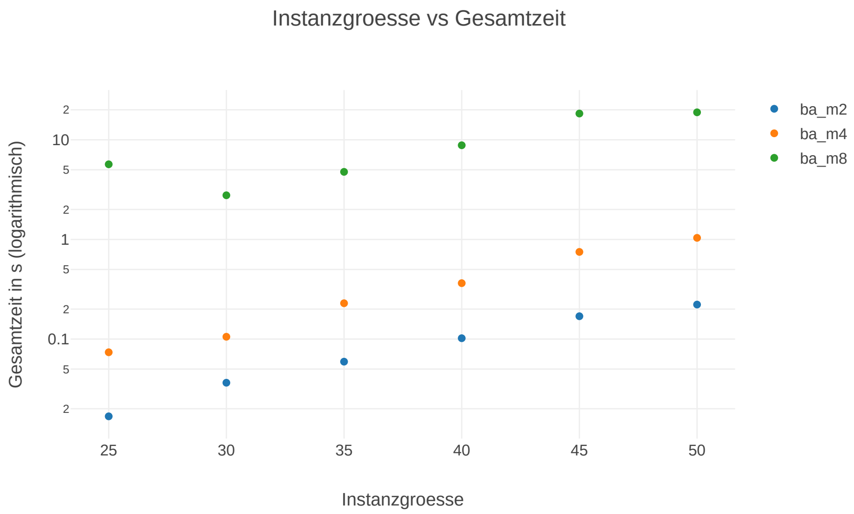
Korrektheit: Die Korrektheit der Reduktion ergibt sich daraus, dass die Klauseln wie in Punkt 1 bis 3 beschrieben genau die Bedingungen für eine k-Clique auf dem Graph G beschreiben.

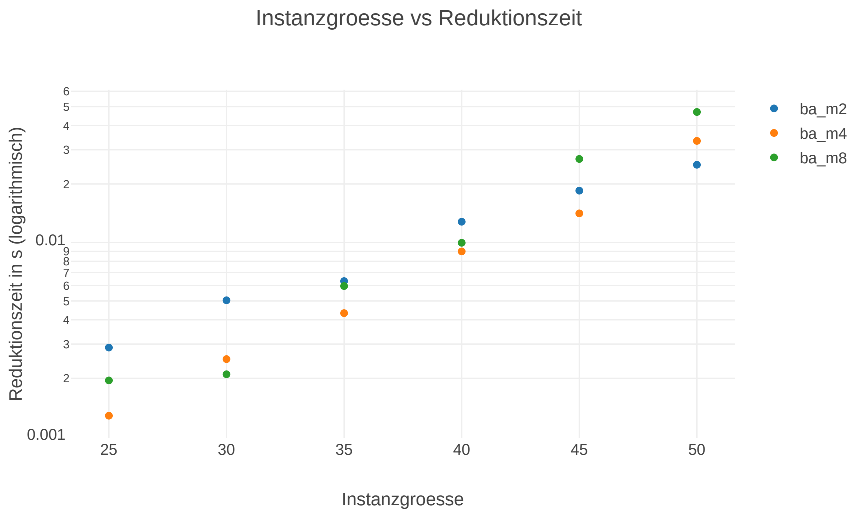
4.2 Wie viele Klauseln und wie viele Variablen entstehen in Ihrer aussagenlogischen Formel in Abhängigkeit von $|V|$, $|E|$ und k? Sind diese Abhängigkeiten wie gewünscht polynomiell?

	Exakter Wert	$\boldsymbol{\Theta}(\cdot)$
Variablen	$\lvert V\rvert \cdot k$	$\Theta(\lvert V\rvert \cdot k)$
Klauseln	$k + \frac{k\cdot(k-1)}{2} \cdot \lvert V\rvert + k \cdot (k-1) \cdot (\frac{\lvert V\rvert\cdot(\lvert V\rvert-1)}{2} - \lvert E\rvert)$	$\Theta(k^2 \cdot (\lvert V\rvert^2 - \lvert E\rvert))$

Die Abhängigkeiten sind wie gewünscht polynomiell.

4.3 Betrachten Sie die Plots sämtlicher Gruppen, wobei jeweils auch getrennt die reinen Reduktionszeiten ohne die des SAT-Solvers visualisiert werden. Von welchen Faktoren scheint die Laufzeit abhängig zu sein? Diskutieren Sie auch mögliche Gründe. Erstellen Sie im Anschluss Screenshots der Plots





Die Gesamtlaufzeit scheint sowohl von der Eingabegröße n als auch von dem BA-Modell Parameter m abzuhängen, je kleiner m und n, desto schneller kann die Instanz gelöst werden. Das scheint auf den ersten Blick eher unintuitiv zu sein, da ein größeres m mehr Kanten bedeutet, welche negativ in die Anzahl der Klauseln und damit in die Instanzgröße für den SAT-Solver eingehen. Jedoch vermute ich, dass weniger Klauseln tatsächlich ein Nachteil ist und sich Formeln mit mehr Klauseln leichter lösen lassen.

Die Reduktionszeit wiederum scheint interessanterweise hauptsächlich von der Eingabegröße und kaum von m abzuhängen. Als Grund vermute ich, dass für die Laufzeit der quadratische Faktor der Eingabegröße den linearen Faktor der Knotenzahl klar dominiert.

4.4 Um welchen Faktor haben wir die Anzahl der gültigen Lösungen für den SAT-Solver, und somit den Suchraum, durch unsere polynomielle Reduktion künstlich aufgeblasen?

Da wir nun statt einer gültigen Lösungsmenge (Reihenfolge spielt keine Rolle) nach einem Lösungstupel (Reihenfolge spielt eine Rolle) suchen wird der Suchraum um den Faktor $n!$ aufgeblasen, wobei n die ursprüngliche Größe des Suchraums ist. Wenn der Lösungsraum für $k = 3$ beispielsweise die Menge $\{\{1, 5, 7\}\}$ wäre, wäre der Lösungsraum für den SAT-Solver $\{(1, 5, 7), (1, 7, 5), (7, 5, 1), (7, 1, 5), (5, 7, 1), (5, 1, 7)\}$.