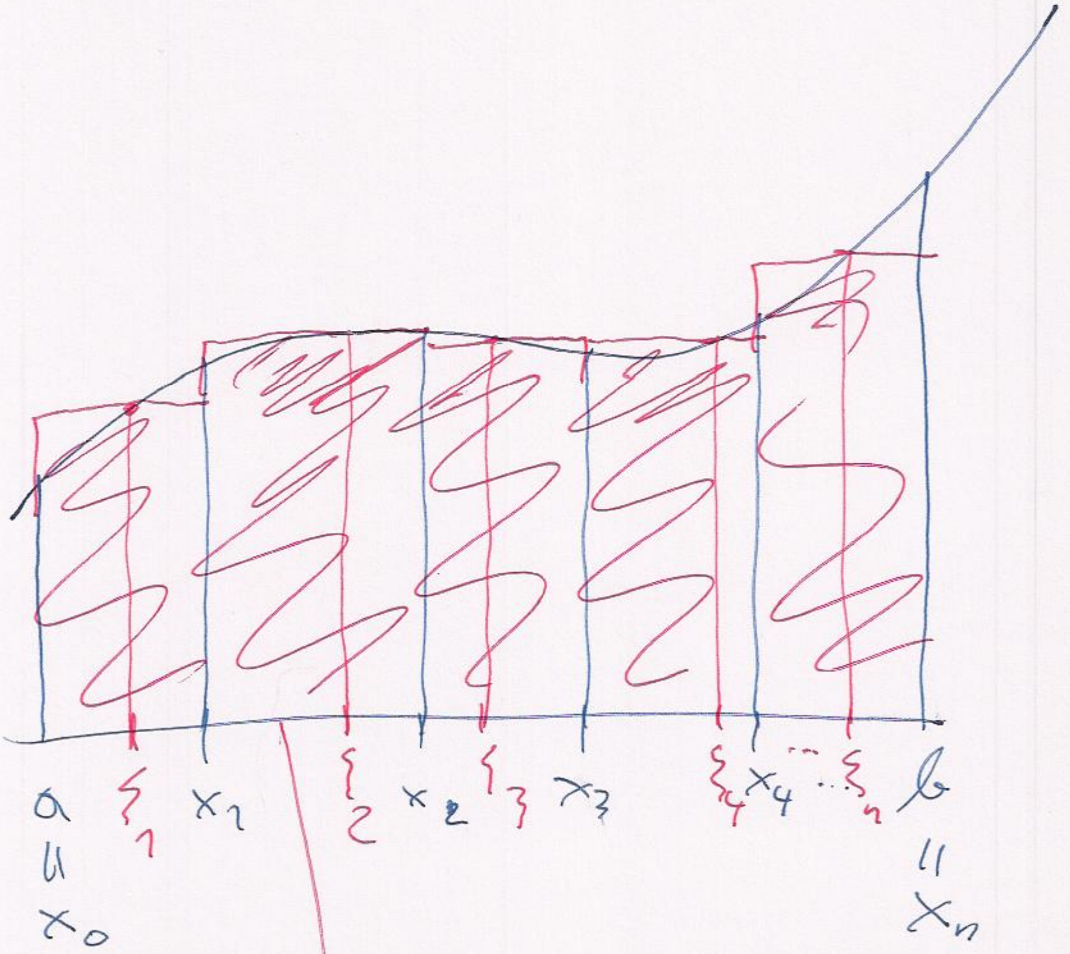


$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$\Big\downarrow \; n \to \infty \quad (\mathcal{F}(Z) \to 0)$$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx$$

Satz: Integrationsregeln

seien f, g integrierbar auf $[a, b]$

(i) Linearität:

$$\int_a^b \underbrace{(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))}_{S_n}\cdot dx = \alpha\cdot\int_a^b f(x)\cdot dx + \beta\cdot\int_a^b g(x)\cdot dx$$

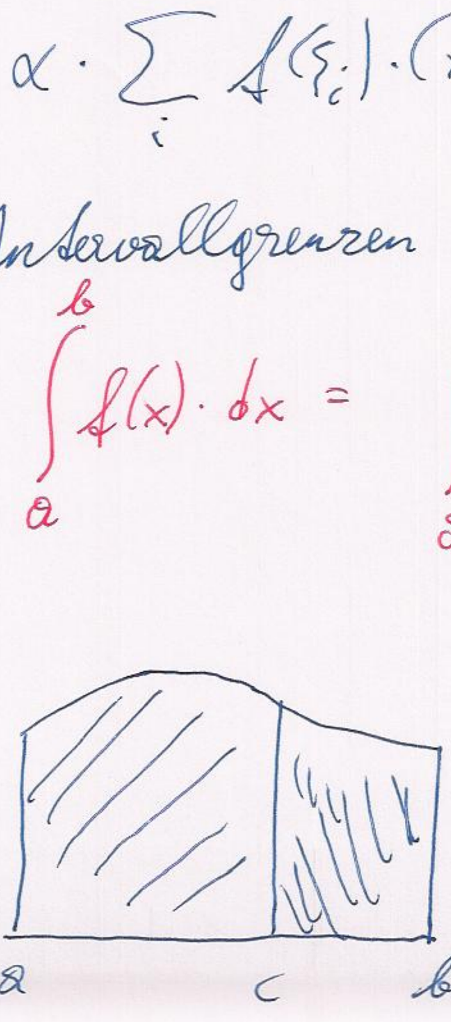
$$\uparrow n\to\infty \qquad\qquad \uparrow n\to\infty$$

$$S_n = \sum_i \left(\alpha\cdot f(\xi_i)+\beta\cdot g(\xi_i)\right)\cdot(x_i-x_{i-1})$$

$$= \alpha\cdot\sum_i f(\xi_i)\cdot(x_i-x_{i-1}) + \beta\cdot\sum_i g(\xi_i)\cdot(x_i-x_{i-1})$$

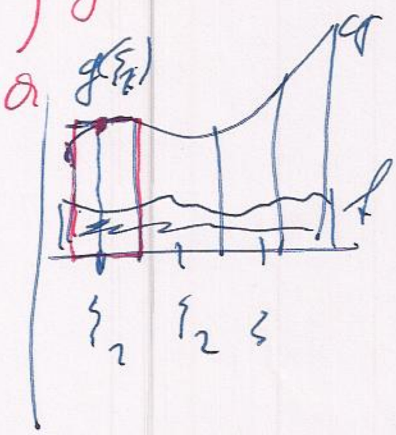
(ii) Intervallgrenzen aufteilen:

$$a<c<b: \quad \int_a^b f(x)\cdot dx = \int_a^c f(x)\cdot dx + \int_c^b f(x)\cdot dx$$



(iii) Monotonie:

$$f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\cdot dx \le \int_a^b g(x)\cdot dx$$



$$\sum_i f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) \le \sum g(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1})$$

$$\int \quad \le \quad \int$$

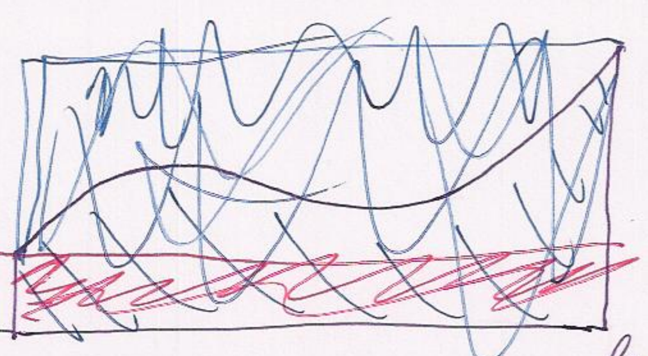
$\le f(\xi_i)$

(iv) Abschätzungen:

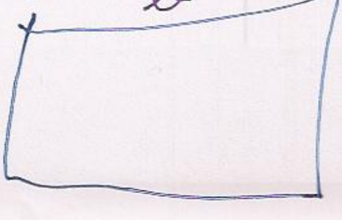
$$\left|\int_a^b f(x)\cdot dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\cdot dx \le (b-a)\cdot \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Folgt aus Δ-UG für Σ_a

$$\boxed{(b-a)\cdot \inf_{x\in[a,b]} f(x) \le \int_a^b f(x)\cdot dx \le (b-a)\cdot \sup_{x\in[a,b]} f(x)}$$



a b

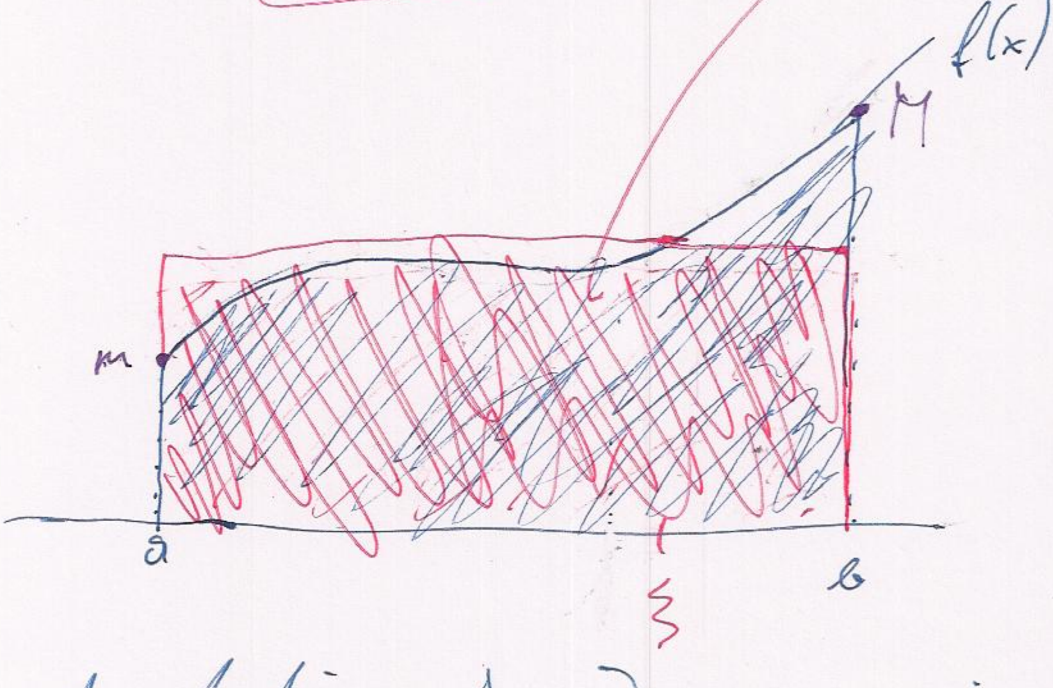
 $\le \int \le$ 

Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung):

Sei $f(x)$ stetig auf Intervall $[a,b]$.

$\Rightarrow$ es gibt $\xi \in [a,b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\cdot dx = f(\xi)\cdot(b-a)}$$



f stetig $\Rightarrow$ $\exists\, m \ldots \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

$\exists\, M \ldots \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

$$(b-a)\cdot m \leq \int_a^b f(x)\cdot dx \leq (b-a)\cdot M$$

$$\boxed{m \leq \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\cdot dx \leq M} \overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \exists\,\xi \in [a,b]: f(\xi)$$

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f(x)$ eine auf Intervall $[a,b]$ stetige Fkt.

$\Rightarrow$ (i) $$F(x) := \int_a^x f(t) \cdot dt$$

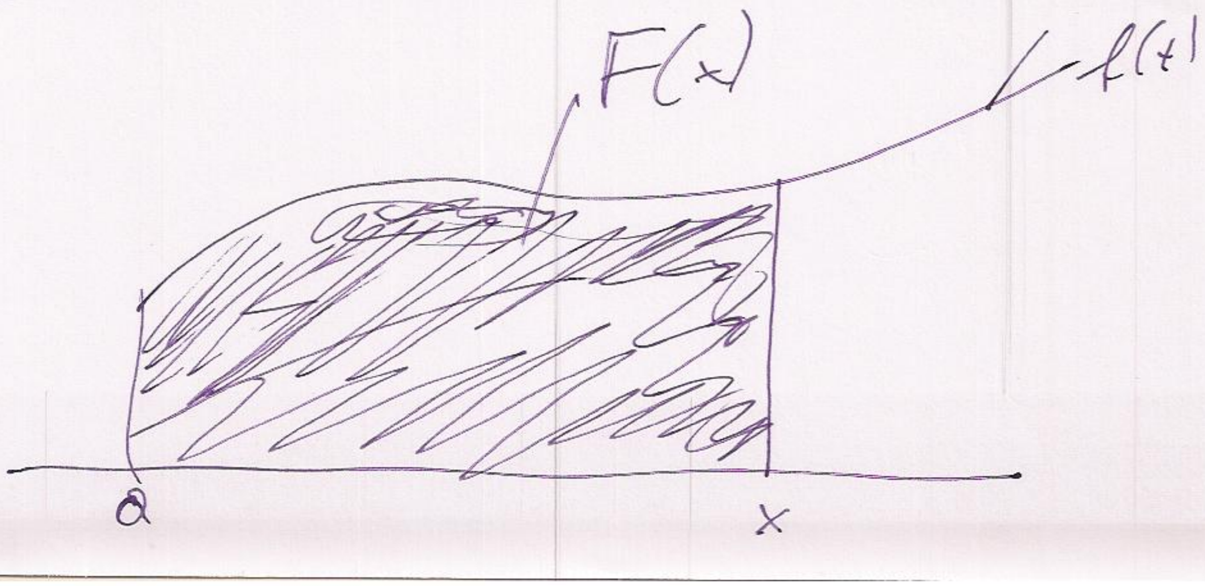
(= unbest. Integral)

ist **Stammfkt.** von $f(x)$.

(ii) Jede beliebige Stammfkt. F von f erfüllt:

$$\boxed{\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a).}$$

Notation: $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$



Beweis: $F(x) := \int_a^x f(t)\cdot dt$

$F(x)$ Stammfkt

$\Updownarrow$

$$F'(x_0) = f(x_0) \quad \forall x_0$$

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \right.$$

$$= \frac{1}{x - x_0} \cdot \left(\int_a^x f(t)\cdot dt - \int_a^{x_0} f(t)\cdot dt \right) =$$

$$= \frac{1}{x - x_0} \cdot \int_{x_0}^{x} f(t)\cdot dt =$$

$$= \frac{1}{x - x_0} \cdot \left(f(\xi) \cdot (x - x_0) \right) = f(\xi),$$

$$\xi \in (x_0, x]$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(\xi) = f(x_0)$$

Beweis:

jede Stammfkt. von f:

$$G(x) = F(x) + C =$$

$$= \int_a^x f(t)\cdot dt + C$$

$$G(b) - G(a) =$$

$$\left(\int_a^b f(t)\cdot dt + C\right) - \left(\int_a^a f(t)\cdot dt + C\right) =$$

$$= \int_a^b f(t)\cdot dt + \cancel{C} - \underbrace{\int_a^a f(t)\cdot dt}_{0} - \cancel{C}$$

$$= \int_a^b f(t)\cdot dt$$

Satz (Substitutionsregel für best. Integrale):

f stetig auf $[a,b]$,

$g : [c,d] \to [a,b]$ stetig differenzierbar

mit $g(c) = a$

$g(d) = b$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(u)\cdot du = \int_c^d f(\overbrace{g(x)}^{g(x)=:u})\cdot g'(x)\cdot dx}$$

$\Rightarrow$ **auch Grenzen substituieren**

Bsp.: Fkt. $f(x) = \frac{1}{x}$

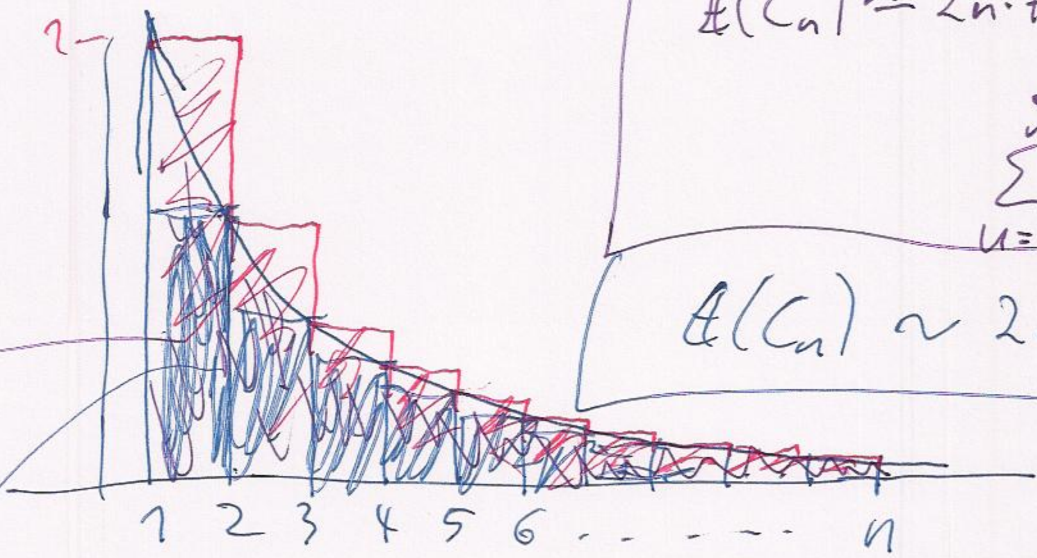
QS:

$E(C_n) \simeq 2n \cdot H_n + \ldots$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$E(C_n) \sim 2n \cdot \ln n$

$\int_1^n \frac{1}{x} dx$



$$\int_1^n \frac{1}{x} \cdot dx = \ln x \Big|_1^n = \ln n - \ln 1 = \ln n - 0 = \ln n$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

Untersum. Obersum.

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{x} \cdot dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$H_n - 1 \leq \ln n \leq H_n - \frac{1}{n} \leq H_n$$

$$\ln n \leq H_n \leq \ln n + 1$$

$$H_n \sim \ln n$$

$$0 \le H_n - \ln n \le 1$$

es lässt sich zeigen

Folge: $H_n - \ln n \searrow$ mon. fallend

$\Downarrow$ beschr.

$\Rightarrow \exists$ Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} (H_n - \ln n) =: \gamma \approx 0.577\ldots$$

Euler-Mascheroni-Konst.

$$\Rightarrow H_n = \ln n + \gamma + o(1)$$