Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 4 (SS 2015)
Lösungen

Aufgabe 4.1 Zeigen Sie, dass folgender Frege-Hilbert-Typ-Kalkül $\mathcal{K}_1$ aussagenlogisch korrekt ist. Dabei interessiert uns nur der Spezialfall der Gültigkeit: Wenn $\vdash_{\mathcal{K}_1} G$, dann $\models_{\mathcal{K}_1} G$.
$\mathcal{K}_1$ hat folgende zwei Axiome (Axiomenschemata):

(A1) $A \supset (B \supset A)$

(A2) $((A \supset B) \wedge (B \supset C)) \supset (A \supset C)$

und die folgenden beiden Ableitungsregeln:

$$\frac{A \qquad A \supset B}{B}\ MP \qquad\qquad \frac{A \qquad B}{A \wedge B}\ KON$$

Lösung Es ist zu zeigen, dass jede Ableitung im Kalkül $\mathcal{K}_1$ in einer gültigen Formel endet. Wir argumentieren induktiv, gemäß der Struktur einer beliebigen $\mathcal{K}_1$-Ableitung:

Induktionsanfang: Kleinste $\mathcal{K}_1$-Ableitungen bestehen aus Instanzen der Axiome $A \supset (B \supset A)$ bzw. $((A \supset B) \wedge (B \supset C)) \supset (A \supset C)$. Folgende Wahrheitstafeln zeigen, dass solche Formeln gültig sind. (Wegen der besseren Lesbarkeit schreiben wir, wie in der Vorlesung, 0/1 statt **f**/**t**.)

A	B	$A \supset$	$(B \supset A)$
0	0	**1**	1
0	1	**1**	0
1	0	**1**	1
1	1	**1**	1

A	B	C	$((A \supset B)$	$\wedge$	$(B \supset C))$	$\supset$	$(A \supset C)$
0	0	0	1	1	1	**1**	1
0	1	0	1	0	0	**1**	1
1	0	0	0	0	1	**1**	0
1	1	0	1	0	0	**1**	0
0	0	1	1	1	1	**1**	1
0	1	1	1	1	1	**1**	1
1	0	1	0	0	1	**1**	1
1	1	1	1	1	1	**1**	1

Beachten Sie, dass A, B und C hier für beliebig komplexe Formeln stehen können (und nicht nur für Aussagenvariablen).

Induktionsschritt: Jede nicht-elementare $\mathcal{K}_1$-Ableitung hat die Form

$$\frac{\begin{matrix}\vdots\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ C \supset D\end{matrix}}{D}\ MP \qquad \text{oder} \qquad \frac{\begin{matrix}\vdots\\ E\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ F\end{matrix}}{E \wedge F}\ KON$$

wobei die Induktionsannahme besagt, dass C und $C \supset D$ bzw. E und F gültige Formeln sind. D ist in jeder Interpretation D wahr, in der auch C und $C \supset D$ wahr sind (in andern Worten: $C,\ C \supset D \models D$. Ebenso gilt $E, F \models E \wedge F$. (Das folgt unmittelbar aus der Definition der Bedeutung der Zeichen '$\supset$' bzw. '$\wedge$'.) von. Damit ist gezeigt, dass aus der Induktionsannahme folgt, dass auch D bzw. $E \wedge F$ gültige Formeln sind.

Aufgabe 4.2 Geben Sie jeweils einen Tableau-Beweis oder ein Gegenbeispiel für folgende Gültigkeits- bzw. Konsequenzbehauptungen an.

a) $\models \forall x \exists y [\forall z P(x,z) \supset P(x,y)]$

b) $\exists x \forall y\, f(x) = y, \exists x\, P(f(x)) \models \forall x (P(f(x)) \wedge P(f(f(x))))$

c) $\exists x\, c = x, \forall x f(x) = a \models \exists y(f(y) = c \vee a = c)$

Hinweis: Achten Sie bei jedem Tableau darauf, dass alle bewerteten Formeln eine eindeutige Nummer tragen und dass alle Regelanwendungen über diese Nummern auf ihre jeweiligen Prämissen verweisen. Außerdem sollen alle γ- und δ-Formeln jeweils auch als solche markiert werden.

Lösung

a) Folgendes geschlossene Tableau (=Tableau-Beweis) zeigt die Gültigkeit der Formel:

(1)	$\mathbf{f} : \forall x \exists y[\forall z P(x,z) \supset P(x,y)]$	Annahme, δ-Formel
(2)	$\mathbf{f} : \exists y[\forall z P(a,z) \supset P(a,y)]$	von 1 γ-Formel
(3)	$\mathbf{f} : \forall z P(a,z) \supset P(a,a)$	von 2
(4)	$\mathbf{t} : \forall z P(a,z)$	von 3, γ-Formel
(5)	$\mathbf{f} : P(a,a)$	von 3
(6)	$\mathbf{t} : P(a,a)$	von 4
	$\times$	Wid. (5/6)

b) Folgendes geschlossene Tableau zeigt die Richtigkeit der Konsequenzbehauptung:

(1)	$\mathbf{t} : \exists x \forall y\, f(x) = y$				Annahme – δ-Formel
(2)	$\mathbf{t} : \exists x\, P(f(x))$				Annahme, δ-Formel
(3)	$\mathbf{f} : \forall x(P(f(x)) \wedge P(f(f(x))))$				Annahme – δ-Formel
(4)	$\mathbf{t} : \forall y\, f(a) = y$				von 1, γ-Formel
(5)	$\mathbf{t} : P(f(b))$				von 2
(6)	$\mathbf{t} : f(a) = f(b)$				von 4
(7)	$\mathbf{t} : P(f(a))$				$S^{=}6 \to 5$
(8)	$\mathbf{f} : P(f(c)) \wedge P(f(f(c)))$				von 3
(9)	$\mathbf{f} : P(f(c))$	von 8	(10)	$\mathbf{f} : P(f(f(c)))$	von 8
(11)	$\mathbf{t} : f(a) = f(c)$	von 4	(13)	$\mathbf{t} : f(a) = f(f(c))$	von 4
(12)	$\mathbf{f} : P(f(a))$	$S^{=}11 \to 9$	(14)	$\mathbf{f} : P(f(a))$	$S^{=}13 \to 10$
	$\times$	Wid.: 7/12		$\times$	Wid.: 7/14

Kommentar:
Es gibt auch Lösungen in denen die δ-Formeln in einer anderen Reihenfolge behandelt werden. Beachten Sie, dass die γ-Regel mehr als einmal auf dieselbe Formel anzuwenden ist.

c) Die Konsequenzbehauptung ist nicht richtig, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt: $\mathcal{I} = \langle \omega, \Phi, \xi \rangle$, mit $\Phi(a) = 0$, $\Phi(c) = 1$, $\Phi(f)(n) = 0$, ξ ist beliebig, da hier nur geschlossene Formeln interpretiert werden. Die Formel $\exists x\, c = x$ ist in jeder Interpretation wahr. Unter $\mathcal{I}$ ist auch die zweite Prämisse $\forall x f(x) = a$ wahr. Aber die Konklusion $\exists y(f(y) = c \vee a = c)$ drückt unter $\mathcal{I}$ aus, dass $\Phi(f)$ für mindestens einen Eingabewert 1 als Ergebnis liefert oder $0 = 1$ gilt, was natürlich falsch ist.

Aufgabe 4.3 Zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül, dass jede partiell funktionale und reflexive Relation auch symmetrisch ist. (Siehe Folie 404.)

Lösung
Folgendes geschlossene Tableau zeigt, dass die Konsequenzbehauptung richtig ist:

(1)	$\mathbf{t} : \forall x \forall y \forall z[(P(x,y) \wedge P(x,z)) \supset y = z]$			Annahme, γ-Formel
(2)	$\mathbf{t} : \forall x\, P(x,x)$			Annahme, γ-Formel
(3)	$\mathbf{f} : \forall x \forall y(P(x,y) \supset P(y,x))$			Annahme, δ-Formel
(4)	$\mathbf{f} : \forall y(P(a,y) \supset P(y,a))$			von 3 δ-Formel
(5)	$\mathbf{f} : P(a,b) \supset P(b,a)$			von 4
(6)	$\mathbf{t} : P(a,b)$			von 5
(7)	$\mathbf{f} : P(b,a)$			von 5
(8)	$\mathbf{t} : P(a,a)$			von 2
(9)	$\mathbf{t} : \forall y \forall z[(P(a,y) \wedge P(a,z)) \supset y = z]$			von 1, γ-Formel
(10)	$\mathbf{t} : \forall z[(P(a,a) \wedge P(a,z)) \supset a = z]$			von 9, γ-Formel
(11)	$\mathbf{t} : (P(a,a) \wedge P(a,b)) \supset a = b$			von 10
(12)	$\mathbf{f} : P(a,a) \wedge P(a,b)$ von 11		(13) $\mathbf{t} : a = b$ von 11	
(14)	$\mathbf{f} : P(a,a)$ von 12 $\times$ Wid.: 8/14	(15) $\mathbf{f} : P(a,b)$ von 12 $\times$ Wid.: 6/15	(16) $\mathbf{f} : P(a,a)$ $\times$ Wid.: 8/16	$S^{=}$13$\to$7

Aufgabe 4.4 Erklären Sie die Probleme mit folgenden Varianten der γ- bzw. δ-Regel für Tableaux.

a) Geben Sie eine Formel F an, die zeigt, dass der Tableau-Kalkül *unvollständig* wird, wenn man für die γ-Regel nicht berücksichtigt, dass die Signatur der Formel um neue Parameter anzureichern ist.

b) Geben Sie eine Formel G an, die zeigt, dass der Tableau-Kalkül *inkorrekt* wird, wenn man für die δ-Regel nicht berücksichtigt, dass der einzusetzende Parameter neu sein muss.

Lösung

a) Die Formel $F = \exists x(P(x) \supset P(x))$ ist offensichtlich gültig. Allerdings ist F eine Formel über einer Signatur Σ, die keine Konstantensymbole enthält; daher gibt es *keine geschlossene Terme* über Σ. Das bedeutet aber, dass auf $\mathbf{f} : \exists x(P(x) \supset P(x))$ die modifizierte γ-Regel gar nicht anwendbar ist und folglich trotz der Gültigkeit von F kein geschlossenes Tableau für F existiert.

b) Die Formel $G = \exists x P(x) \supset P(a)$ ist offensichtlich nicht gültig, da wir beispielsweise über dem Gegenstandsbereich der natürlichen Zahlen $\Phi(P) =$ "ist gerade" und $\Phi(a) = 1$ interpretieren können. Jedes Tableau für G muss wie folgt beginnen:

(1)	$\mathbf{f} : \exists x P(x) \supset P(a)$	Annahme
(2)	$\mathbf{t} : \exists x P(x)$	δ-Formel
(3)	$\mathbf{f} : P(a)$	

Wenn wir nun bei der Elimination des Existenzquantors in (2) a anstatt eines neuen Parameters für x einsetzen, so erhalten wir in der nächsten Zeile

$$(4) \quad \mathbf{t} : P(a)$$

und folglich ein geschlossenes Tableau im Gegensatz zur Tatsache, dass G nicht gültig ist.

Aufgabe 4.5
Beweisen Sie folgende partiellen Korrektheitsaussagen über dem Datentyp $\mathbb{Z}$ mit dem Hoare-Kalkül. (Vergessen Sie nicht auf die Begründung der Gültigkeit der verbleibenden Formeln in $\mathbb{Z}$.)

a) $u > v\ \{\underline{\texttt{while}}\ u > v\ \underline{\texttt{do}}\ \underline{\texttt{begin}}\ w \underline{\leftarrow} v + 7\underline{;}\ v \underline{\leftarrow} w - 6\ \underline{\texttt{end}}\}\ u = v$

b) $v > 0\ \{\underline{\texttt{if}}\ u > v\ \underline{\texttt{then}}\ w \underline{\leftarrow} u\ \underline{\texttt{else}}\ \underline{\texttt{begin}}\ w \underline{\leftarrow} v\underline{;}\ v \underline{\leftarrow} v - 2\ \underline{\texttt{end}}\}\ w > v$

Lösung

a) Unter Verwendung der Hilfsregel T2 und den Abkürzungen $P = B = u > v$ bzw. $Q = (u = v)$ kann man folgendes ableiten:

$$\text{(H4)}\ \dfrac{\overset{(1)}{P \supset I} \qquad \text{(T2)}\ \dfrac{\text{(H1)}\ \dfrac{\overset{(2)}{(I \wedge B) \supset I\left[{w - 6 \atop v}\right]\left[{v + 7 \atop w}\right]}}{(I \wedge B)\ \{w \underline{\leftarrow} v + 7\}\ I\left[{w - 6 \atop v}\right]}}{(I \wedge B)\ \{\underline{\texttt{begin}}\ w \underline{\leftarrow} v + 7\underline{;}\ v \underline{\leftarrow} w - 6\ \underline{\texttt{end}}\}\ I} \qquad \overset{(3)}{(I \wedge \neg B) \supset Q}}{P\ \{\underline{\texttt{while}}\ B\ \underline{\texttt{do}}\ \underline{\texttt{begin}}\ w \underline{\leftarrow} v + 7\underline{;}\ v \underline{\leftarrow} w - 6\ \underline{\texttt{end}}\}\ Q}$$

Da Precondition (P) und Schleifenbedingung (B) identisch sind, eignet sich $P \vee Q$ als Invariante I, wobei Q die Postcondition ist. Also $I = (u > v \vee u = v)$, was sich zu $I = u \geq v$ vereinfacht.

Es bleibt folgendes festzustellen:

(1): $P \supset I = P \supset (P \vee Q)$ ist eine Tautologie, also bereits aussagenlogisch gültig.

(2): $I\left[{w + 6 \atop v}\right]\left[{v - 7 \atop w}\right] = u \geq v\left[{w - 6 \atop v}\right]\left[{v + 7 \atop w}\right] = u \geq w - 6\left[{v + 7 \atop w}\right] = u \geq v - 6 + 7 = u \geq v + 1$.
Da in $\mathbb{Z}$ $u \geq v + 1$ aus $B = u > v$ folgt, gilt die Implikation (2) im Datentyp $\mathbb{Z}$.

(3): $(I \wedge \neg B) \supset Q = ((P \vee Q) \wedge \neg P) \supset Q$ ist wiederum eine Tautologie.

b) Mit den Abkürzungen $P\colon v > 0$, $B\colon u > v$ und $Q\colon w > v$ ergibt sich folgende Ableitung:

$$\text{(H3)}\ \dfrac{\text{(H1)}\ \dfrac{\overset{(1)}{(P \wedge B) \supset Q\left[{u \atop w}\right]}}{(P \wedge B)\ \{w \underline{\leftarrow} u\}\ Q} \qquad \text{(T2)}\ \dfrac{\text{(H1)}\ \dfrac{\overset{(2)}{(P \wedge \neg B) \supset Q\left[{v - 2 \atop v}\right]\left[{v \atop w}\right]}}{(P \wedge \neg B)\ \{w \underline{\leftarrow} v\}\ Q\left[{v - 2 \atop v}\right]}}{(P \wedge \neg B)\ \{\underline{\texttt{begin}}\ w \underline{\leftarrow} v\underline{;}\ v \underline{\leftarrow} v - 2\ \underline{\texttt{end}}\}\ Q}}{P\ \{\underline{\texttt{if}}\ B\ \underline{\texttt{then}}\ w \underline{\leftarrow} u\ \underline{\texttt{else}}\ \underline{\texttt{begin}}\ w \underline{\leftarrow} v\underline{;}\ v \underline{\leftarrow} v - 2\ \underline{\texttt{end}}\}\ Q}$$

Nachweis der Gültigkeit der Formeln (1) und (2):

(1) $(\,(P \wedge B\,) \supset Q\left[{u \atop w}\right]\,) =$
$(\,(\,v > 0 \wedge u > v\,) \supset u > v\,)$ ist gültig in $\mathbb{Z}$, da diese Formel eine Tautologie ist.

(2) $(\,(P \wedge \neg B\,) \supset Q\left[{v - 2 \atop v}\right]\left[{v \atop w}\right]\,) =$
$(\,v > 0 \wedge \neg\,(u > v)\,) \supset (v > v - 2)$ ist gültig in $\mathbb{Z}$: Der Ausdruck $v > v - 2$ wertet in jeder Umgebung zu $\mathbf{t}$ aus. Daher ist die gesamte Implikation wahr.