UE Logik für Wissensrepräsentation WS 2016/17

Aufgabenblatt 1: Aussagenlogik

Beispiel 1:

Beweise das Replacement-Theorem, welches folgende Eigenschaft darstellt:

> Sei C_A eine Formel die A als Teilformel enthält, und sei C_B das Resultat indem A durch B in C_A ersetzt wird. Dann gilt: Falls $\models A \equiv B$, dann $\models C_A \equiv C_B$.

Der Beweis erfolgt mittels *Induktion über den Aufbau der Formeln*:

- **Induktionsanfang:** Ist C_A eine Formel, welche keine logischen Konnektive enthält (also eine logische Konstante $\top$, $\bot$ oder eine propositionale Konstante), so ist $C_A = A$ und $C_B = B$. Daher ist $\models A \equiv B$ gleichbedeutend zu $\models C_A \equiv C_B$.

- **Induktionsschritt:** Die Induktionsannahme ist, dass $X_A \equiv X_B$ und $Y_A \equiv Y_B$.
  Für Formeln der Form $\neg X_A$ gilt

  $$V^m(\neg X_A) = 1 - V^m(X_A) = 1 - V^m(X_B) = V^m(\neg X_B)$$

  und damit $m \models \neg X_A$ gdw $m \models \neg X_B$.

  Für Formeln der Form $X_A \supset Y_A$ gilt

  $$\begin{aligned} & V^m(X_A \supset Y_A) = 1 \\ \text{gdw } & V^m(X_A) \leq V^m(Y_A) \\ \text{gdw } & V^m(X_B) \leq V^m(Y_B) \\ \text{gdw } & V^m(X_B \supset Y_B) = 1 \end{aligned}$$

  und damit $m \models X_A \supset Y_A$ gdw $m \models X_B \supset Y_B$.
  Daher folgt aus der Induktionsannahme, dass $m \models C_A$ gdw $m \models C_B$, was gleichbedeutend zu $\models C_A \equiv C_B$ ist.

Beispiel 2:

Zeige die syntaktische Form der Schnittregel, d.h. die Eigenschaft

> falls $T \vdash A_i$, für $1 \leq i \leq n$, und $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, dann $T \vdash B$, für eine beliebige Theorie T und beliebige Formeln $A_1, \ldots, A_n, B$,

direkt aus der Definition der Herleitungsrelation $\vdash$.

Aus $T \vdash A_i$, für $1 \leq i \leq n$ folgt, dass es eine Herleitung $(H_i)_{i=1,\ldots,M}$ gibt, in der jedes A_i zumindest einmal vorkommt. Aus $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ folgt, dass es eine Herleitung $(K_i)_{i=1,\ldots,N}$ aus $\{A_1, \ldots, A_n\}$ gibt, wobei $K_N = B$.
Betrachtet man $H_1, \ldots, H_M, K_1, \ldots, K_N$, sieht man, dass dies eine gültige Herleitung von B aus T ist, womit $T \vdash B$ gezeigt ist.

Beispiel 3:

Beweise die Korrektheit des in der VO vorgestellten Hilbertkalküls für die Aussagenlogik.

Im Hilbertkalkül ist jede Herleitung aus einer Theorie T eine endliche Folge $A_1, \dots A_n$ von Formeln, wobei für jede Formel A_i gilt:

- entweder $A_i \in T$, oder
- A_i ist ein Axiom, oder
- es gibt A_j, A_k mit $j, k < i$ und $A_k = A_j \supset A_i$.

Ist $A_i \in T$, so gilt $T \models A_i$.

Ist A_i ein Axiom, so gilt $\models A_i$ und damit auch $T \models A_i$ (Beweis mit zB Wahrheitstafel):

$\mathbf{AX_0}$ $\models \top$

$\mathbf{AX_1}$ $\models A \supset (B \supset A)$

$\mathbf{AX_2}$ $\models (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

$\mathbf{AX_3}$ $\models (\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$

Kommt A_i aufgrund der letzten Regel in der Herleitung vor, so gilt $T \models A_j$ und $T \models A_j \supset A_i$. Aus letzterem folgt $T, A_j \models A_i$. Da wegen $T \models A_j$ jedes Modell m von T auch ein Modell von A_j ist und wegen $T, A_j \models A_i$ jedes solche m A_i erfüllt, gilt $T \models A_i$.

Damit ist gezeigt, dass $T \vdash A \Rightarrow T \models A$.

Beispiel 4:

Zeige mittels Einführungs- und Beseitigungsregeln für die Herleitungsrelation der Aussagenlogik folgende Relationen:

(a) $\vdash A \vee \neg A$

(b) $\vdash (\neg A \vee \neg B) \supset \neg(A \wedge B)$

(c) $(V \supset U), (K \supset F), (\neg U \wedge \neg F) \vdash (\neg V \vee \neg K)$

(d) $(J \vee S) \supset ((\neg A \wedge \neg(T \wedge D)) \vee (V \wedge H)) \vdash (S \wedge \neg V) \supset \neg A$

(a)

$\neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A$	$\vee$-Einführung	(1)
$\neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)$	$\neg(A \vee \neg A) \in \{\neg(A \vee \neg A), A\}$	(2)
$\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$	$\neg$-Einführung aus 1 und 2	(3)
$\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash A \vee \neg A$	$\vee$-Einführung	(4)
$\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash \neg(A \vee \neg A)$	$\neg(A \vee \neg A) \in \{\neg(A \vee \neg A), A\}$	(5)
$\neg(A \vee \neg A) \vdash A$	$\neg$-Einführung aus 4 und 5	(6)
$\vdash A \vee \neg A$	$\neg$-Einführung aus 3 und 6	

(b) Dieses Lemma verkürzt die Herleitung:

Lemma 1. *Lässt sich $T, A \vdash B$ herleiten, so auch $T, \neg B \vdash \neg A$.*

Proof.

$$
\begin{array}{rlr}
T, A \vdash B & \text{Voraussetzung} & (1) \\
T, A, \neg B \vdash B & \text{Monotonie aus 1} & (2) \\
T, A, \neg B \vdash \neg B & \text{Antezedens} & (3) \\
T, \neg B \vdash \neg A & \neg\text{-Einführung aus 2 und 3} &
\end{array}
$$

□

$$
\begin{array}{rlr}
A \wedge B \vdash A & \wedge\text{-Beseitigung} & (1) \\
A \wedge B \vdash B & \wedge\text{-Beseitigung} & (2) \\
\neg A \vdash \neg(A \wedge B) & \text{Lemma 1 aus 1} & (3) \\
\neg B \vdash \neg(A \wedge B) & \text{Lemma 1 aus 2} & (4) \\
(\neg A \vee \neg B) \vdash \neg(A \wedge B) & \vee\text{-Beseitigung aus 3, 4} & (5) \\
\vdash (\neg A \vee \neg B) \supset \neg(A \wedge B) & \supset\text{-Einführung aus 5} &
\end{array}
$$

(c) Dieses Lemma verkürzt die Herleitung:

Lemma 2. *Es gilt* $T, (A \supset B), \neg B \vdash \neg A$.

Proof.

$$
\begin{array}{rlr}
T, (A \supset B), A \vdash B & \supset\text{-Beseitigung} & (1) \\
T, (A \supset B), \neg B \vdash \neg A & \text{Lemma 1 aus 1} &
\end{array}
$$

□

$$
\begin{array}{rlr}
(V \supset U), (K \supset F), \neg U \vdash \neg V & \text{Lemma 2} & (1) \\
(V \supset U), (K \supset F), \neg U \vdash \neg V \vee \neg K & \vee\text{-Einführung, Schnittregel aus 1} & (2) \\
(V \supset U), (K \supset F), \neg F \vdash \neg K & \text{Lemma 2} & (3) \\
(V \supset U), (K \supset F), \neg F \vdash \neg V \vee \neg K & \vee\text{-Einführung, Schnittregel aus 3} & (4) \\
(V \supset U), (K \supset F), (\neg U \vee \neg F) \vdash \neg V \vee \neg K & \vee\text{-Beseitignug aus 2 und 4} &
\end{array}
$$

(d) Sei $T = \{(J \vee S) \supset ((\neg A \wedge \neg(T \wedge D)) \vee (V \wedge H)), (S \wedge \neg V)\}$.
Es reicht zu zeigen, dass $T \vdash \neg A$, dann folgt die Aussage aus der $\supset$-Einführung.

$$
\begin{array}{rlr}
(S \wedge \neg V), (V \wedge H), A \vdash V & \wedge\text{-Beseitigung} & (1) \\
(S \wedge \neg V), (V \wedge H), A \vdash \neg V & \wedge\text{-Beseitigung} & (2) \\
(S \wedge \neg V), (V \wedge H) \vdash \neg A & \neg\text{-Einführung, 1,2} & (3) \\
(S \wedge \neg V), (\neg A \wedge (\neg T \wedge D)) \vdash \neg A & \wedge\text{-Beseitigung} & (4) \\
(S \wedge \neg V), ((\neg A \wedge (\neg T \wedge D)) \vee (V \wedge H)) \vdash \neg A & \vee\text{-Beseitigung, 3,4} & (5) \\
T \vdash (J \vee S) & \vee\text{-Einführung} & (6) \\
T \vdash (J \vee S) \supset ((\neg A \wedge (\neg T \wedge D)) \vee (V \wedge H)) & \text{Antezedens} & (7) \\
T \vdash ((\neg A \wedge (\neg T \wedge D)) \vee (V \wedge H)) & \supset\text{-Beseitigung, Schnittregel, 6,7} & (8) \\
T \vdash (S \wedge \neg V) & \text{Antezedens} & (9) \\
T \vdash \neg A & \text{Schnittregel, 5,8,9} &
\end{array}
$$

Beispiel 5:

Beweise, dass der deduktive Abschlussoperator der Aussagenlogik die Eigenschaften der Inflationierung, Idempotenz und Monotonie erfüllt.

- **Inflationierung** $T \subseteq \mathrm{Th}(T)$
  Jedes $\varphi \in T$ erfüllt $T \vdash \varphi$ und damit auch $\varphi \in \{A|T \vdash A\} = \mathrm{Th}(T)$.

- **Idempotenz** $\mathrm{Th}(T) = \mathrm{Th}(\mathrm{Th}(T))$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Th}(T) \vdash B \\
\Rightarrow\ &\exists n : A_1, \ldots, A_n \vdash B \text{ und } T \vdash A_i,\ i = 1, \ldots, n \\
\Rightarrow\ &T \vdash B \qquad \text{syntaktische Schnittregel (Beispiel 2)}
\end{aligned}$$

  Daher gilt $\mathrm{Th}(\mathrm{Th}(T)) = \{B|\mathrm{Th}(T) \vdash B\} \subseteq \{B|T \vdash B\} = \mathrm{Th}(T)$. Wegen der Inflationierung gilt zusätzlich noch $\mathrm{Th}(T) \subseteq \mathrm{Th}(\mathrm{Th}(T))$ und damit insgesamt $\mathrm{Th}(T) = \mathrm{Th}(\mathrm{Th}(T))$.

- **Monotonie** $T \subseteq T' \Rightarrow \mathrm{Th}(T) \subseteq \mathrm{Th}(T')$
  Jede Herleitung aus T ist auch eine Herleitung aus T'. Was gleichbedeutend zu $T \vdash A \Rightarrow T' \vdash A$ ist. Daraus folgt wiederum $\{A|T \vdash A\} \subseteq \{A|T' \vdash A\}$.

Beispiel 6:

Welche der folgenden Eigenschaften gelten und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten (d.h., beweisen Sie die geltenden Eigenschaften und geben Sie ein Gegenbeispiel für die falschen)! "$\nvdash A$" bedeutet wie üblich "nicht $\vdash A$".

(a) "Für jede Formel A, falls $\vdash \neg A$, dann $\nvdash A$."

(b) "Für jede Formel A, falls $\nvdash A$, dann $\vdash \neg A$."

(c) "Für alle Formeln A, B, falls $\vdash A \vee B$", dann $\vdash A$ oder $\vdash B$."

(d) "Für alle Formeln A, B, falls $\vdash A$ oder $\vdash B$, dann $\vdash A \vee B$."

(a) Angenommen es gäbe eine Formel A mit $\vdash \neg A$ und $\vdash A$. Aufgrund der Korrektheit, der Ableitungsrelation, gälte für diese Formel dann $\models \neg A$ und $\models A$. Daher kann es eine solche Formel nicht geben. Diese Aussage ist daher *wahr*.

(b) Betrachte eine propositionale Konstante P und zwei Modelle m_1, m_2 mit $m_1 \models P$ und $m_2 \models \neg P$. Sei jetzt die Formel A gleich P, dann gilt wegen der Korrektheit $\nvdash A$ und $\nvdash \neg A$. Diese Aussage ist daher *falsch*.

(c) Sei P eine propositionale Konstante. Wähle $A = P$ und $B = \neg P$. Dann gilt $\vdash A \vee B$, aber auch $\nvdash A$ und $\nvdash B$ (wieder wegen der Korrektheit und zwei Modellen, wobei eines P und das andere $\neg P$ erfüllt). Diese Aussage ist daher *falsch*.

(d) Wegen der $\vee$-Einführung gilt $A \vdash A \vee B$ und $B \vdash A \vee B$. Gilt $\vdash A$ oder $\vdash B$, so folgt wegen der syntaktischen Schnittregel $\vdash A \vee B$. Diese Aussage ist daher *wahr*.

Beispiel 7:

Zeige die Äquivalenz der folgenden zwei Aussagen:

(i) $B \vdash C$

(ii) Für jede Liste $A_1, \ldots, A_n$ von Formeln:
wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, dann $A_1, \ldots, A_n \vdash C$

(i)$\Rightarrow$(ii) Folgt aus der syntaktischen Schnittregel (Beispiel 2, mit T als $A_1, \ldots, A_n$ und B als A_1 und C als B)

(ii)$\Rightarrow$(i) Wegen (ii) gilt: wenn $B \vdash B$, dann $B \vdash C$. Da $B \vdash B$ gilt, folgt (i).

Beispiel 8:

(a) Übersetzen Sie folgenden Satz in Aussagenlogik. Wie würden Sie den Satz umändern um Zweideutigkeiten zu vermeiden?

> Falls Commodore Schmidlapp anwesend ist [S] oder der Chef des Generalstabs unseren Vorschlag annimmt [C] und der Verteidigungsminister nichts dagegen hat [$\neg V$], wird unser Vorschlag angenommen [A].

(b) Analysieren Sie folgendes Argument mittels Aussagenlogik. Ist es stichhaltig? Begründen Sie Ihre Antwort!

> Der geplante Angriff wird nur dann erfolgreich sein, wenn der Gegner überrascht wird oder die Stellung schwach verteidigt wird. Der Gegner wird nicht überrascht werden außer er ist siegessicher. Er wird allerdings nicht siegessicher sein falls die Stellung schwach verteidigt wird. Also wird der Angriff nicht erfolgreich sein.

(a) Es gibt zwei Interpretationen:

$$((S \vee C) \wedge \neg V) \Rightarrow A$$

und

$$(S \vee (C \wedge \neg V)) \Rightarrow A$$

Da $A \supset (B \supset C) = \neg A \vee \neg B \vee C = \neg(A \wedge B) \vee C = (A \wedge B) \supset C$ und man daher $((S \vee C) \wedge \neg V) \Rightarrow A$ schreiben kann als $(S \vee C) \supset (\neg V \supset A)$, kann man, falls man die erste Interpretation meint, die Aussage umformulieren zu:

> Wenn Commodore Schmidlapp anwesend ist [S] oder der Chef des Generalstabs unseren Vorschlag annimmt [C] dann gilt, dass wenn der Verteidigungsminister nichts dagegen hat [$\neg V$], unser Vorschlag angenommen wird [A].

(b)

A	Der Angriff ist erfolgreich
GUe	Der Gegner wird überrascht
SV	Die Stellung wird schwach verteidigt
GS	Der Gegner ist siegessicher

$$[(GUe \vee SV \equiv A) \wedge (\neg GUe \vee GS) \wedge (SV \supset \neg GS)] \supset \neg A$$

Der Angriff ist erfolgreich, wenn GUe, GS und $\neg SV$. Also wenn der Gegner überrascht wird, siegessicher ist und seine Stellung stark verteidigt wird.
Der Angriff ist auch erfolgreich wenn SV, $\neg GS$ und $\neg GUe$. Also wenn der Gegner nicht überrascht wird, nicht siegessicher ist und seine Stellung schwach verteidigt wird.

Beispiel 9:

(Adaptiert nach Keisler.)
Meischberger, Hochegger und Grasser werden der Steuerhinterziehung verdächtigt. Sie machen folgende Aussagen unter Eid:

MEISCHBERGER: Hochegger ist schuldig und Grasser ist unschuldig.

HOCHEGGER: Falls Meischberger schuldig ist, dann ist es auch Grasser.

GRASSER: Ich bin unschuldig aber mindestens einer der anderen ist schuldig.

Seien M, H, G Atomformeln die jeweils für "Meischberger ist unschuldig", "Hochegger ist unschuldig" und "Grasser ist unschuldig" stehen.

Repräsentieren Sie die Aussagen der drei Verdächtigten als Formeln der Aussagenlogik. Beantworten Sie folgende Fragen mittels entsprechender Repräsentation in Aussagenlogik:

(i) Sind die Aussagen der drei konsistent?

(ii) Die Aussagen eines Verdächtigten folgt aus der Aussage eines anderen. Welche aus welcher?

(iii) Angenommen jeder ist unschuldig, wer beging eine falsche Zeugenaussage?

(iv) Angenommen die Aussagen jedes Zeugen sind wahr, wer ist schuldig und wer unschuldig?

(v) Angenommen die Unschuldigen sagen die Wahrheit und die Schuldigen lügen, wer ist unschuldig und wer schuldig?

Hinweis: Verwenden Sie Wahrheitstafeln der involvierten Formeln zur Beantwortung der Fragen.

MEISCHBERGERs Aussage lautet:

$$\neg H \land G$$

HOCHEGGERs Aussage lautet:

$$\neg M \supset \neg G$$

GRASSERs Aussage lautet:

$$G \land (\neg M \lor \neg H)$$

(i) $M \land \neg H \land G$ erfüllt alle Aussagen. Daher sind die Aussagen konsistent.

(ii) GRASSERs Aussage folgt aus MEISCHBERGERs

(iii) MEISCHBERGER und GRASSER

(iv) siehe (i): $M, \neg H, G$ ist das einzige Modell, welches alle Aussagen wahr macht.

(v) Unter diesen Voraussetzungen gilt:

$$[M \equiv (\neg H \land G)] \land [H \equiv (\neg M \supset \neg G)] \land [G \equiv (G \land (\neg M \lor \neg H))] \tag{1}$$

Gilt M, so auch $\neg H$ und G. Wenn $\neg H$, dann gilt aber $\neg M \land G$. Da nicht gleichzeitig M und $\neg M$ gelten kann muss $\underline{\text{auf jeden Fall } \neg M}$ gelten.

Gilt $\neg H$, so muss wegen MEISCHBERGERs Lüge $\neg G$ gelten, womit HOCHEGGER aber die Wahrheit gesagt hätte, daher gilt $\underline{\text{auf jeden Fall } H}$.

Gilt H, so muss wegen $\neg M$ $\neg G$ gelten. $\underline{\neg M \land H \land \neg G}$ ist konsistent mit (1).