

Jürgen Eichler

**Physik**

**Aus dem Programm**  
**Naturwissenschaftliche Grundlagen**

**Vieweg Handbuch Maschinenbau**

herausgegeben von A. Böge

**Formeln und Tabellen Maschinenbau**

herausgegeben von A. Böge

**Physik**

von A. Böge und J. Eichler

**Technische Berichte**

von H. und L. Hering

**Wutz Handbuch Vakuumtechnik**

herausgegeben von K. Jousten

**Physik-Formelsammlung für Ingenieure**

**und Naturwissenschaftler**

von P. Kurzweil (Hrsg.), B. Frenzel und F. Gebhard (i.V.)

**Physik Aufgabensammlung für Ingenieure**

**und Naturwissenschaftler**

von P. Kurzweil (Hrsg.), J. Eichler, B. Frenzel und B. Schiewe (i.V.)

**Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler**

**in sechs Bänden**

von L. Papula

Jürgen Eichler

# Physik

Grundlagen für das Ingenieurstudium –  
kurz und prägnant

Mit 241 Abbildungen und 54 Tabellen

3., überarbeitete und ergänzte Auflage

Studium Technik



Bibliografische Information Der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der  
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über  
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

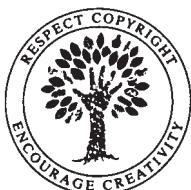
1. Auflage 1993
- 2., vollständig neu bearbeitete Auflage September 2004
- 3., überarbeitete und ergänzte Auflage April 2007

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlag | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2007

Lektorat: Thomas Zipsner / Imke Zander

Der Vieweg Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.  
[www.vieweg.de](http://www.vieweg.de)



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt.  
Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes  
ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt  
insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen  
und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, [www.CorporateDesignGroup.de](http://www.CorporateDesignGroup.de)  
Technische Redaktion: Hartmut Kühn von Burgsdorff, Wiesbaden  
Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin  
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier  
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0223-1

---

## Vorwort

Die 3. Auflage dieses Lehrbuches ist vollständig überarbeitet worden. Es wurden über 250 Übungsaufgaben eingegliedert, die den Text vertiefen und die Anwendungen der Physik aufzeigen. Anhand der Lösungen kann der Leser sein Wissen überprüfen. Dabei ist es hilfreich, dass die wichtigsten Formeln im Buch durch Rahmen hervorgehoben sind.

Das vorliegende Buch zeichnet sich durch seine kurze prägnante Darstellung aus, ohne dabei wesentliche Faktoren wegzulassen. Besonderer Wert wird auf die Anwendung der Physik in der modernen Technik gelegt.

Die Physik ist eine der wichtigen Grundlagen für die Tätigkeit eines Ingenieurs. In diesem Sinne wurde das Basiswissen der klassischen Physik in den Kapiteln der *Mechanik*, *Thermodynamik*, *Akustik*, *Schwingungen und Wellen* und *Elektromagnetismus* anschaulich dargestellt. Daneben dient die Physikvorlesung auch einer naturwissenschaftlichen Allgemeinbildung, die zum Verstehen von Erscheinungen der Umwelt notwendig ist. Dies spiegelt sich in den moderneren Kapiteln der *Optik*, *Atom- und Kernphysik* sowie der *Gravitation* wieder.

Das Buch entstand aus Vorlesungsunterlagen der Kurse „Physik“ für Hörer unterschiedlicher Fachrichtungen an der Technischen Fachhochschule Berlin.

Es wendet sich an Studierende an Fachhochschulen und Universitäten in den Fächern Mechatronik, Maschinenbau, Feinwerktechnik, Mikrosystemtechnik, Elektronik, Elektrotechnik, Energietechnik, Physikalische Technik, Mathematik, Chemie, Biotechnologie, Verfahrenstechnik, Umwelttechnik, Informatik, Patentwesen, Wirtschaftsingenieurwesen, u.a. Neben diesem Hörerkreis eignet es sich auch für Ingenieure in der Praxis als Nachschlagewerk.

Ich danke dem Vieweg Verlag und dem Lektorat Technik für die sehr gute Zusammenarbeit bei der Realisierung und dem Druck der neuen Auflage. Die fachgerechten Hinweise von meinem Lektor Herrn Thomas Zipsner haben zu wichtigen Verbesserungen geführt.

Ich widme dieses Buch Evelyn und Sascha's Familie.

Berlin, Mai 2007

Jürgen Eichler

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Physikalische Größen .....</b>	1
1.1 Basisgrößen und -einheiten .....	1
1.1.1 SI-System .....	1
1.1.2 Naturkonstanten .....	3
<b>2 Mechanik fester Körper .....</b>	4
2.1 Kinematik (Lehre von der Bewegung) .....	4
2.1.1 Geradlinige Bewegung .....	4
2.1.2 Dreidimensionale Bewegung .....	12
2.1.3 Kreisbewegung .....	14
2.2 Dynamik (Lehre von den Kräften) .....	19
2.2.1 Kraft (Newton'sche Axiome) .....	19
2.2.2 Masse und Kraft .....	20
2.2.3 Bewegte Bezugssysteme, Trägheitskraft .....	23
2.2.4 Zentrifugal- und Corioliskraft .....	24
2.3 Arbeit, Energie und Leistung .....	27
2.3.1 Arbeit .....	27
2.3.2 Energie .....	27
2.3.3 Leistung .....	29
2.3.4 Energieerhaltung .....	29
2.4 Impuls .....	30
2.4.1 Impulserhaltung .....	30
2.4.2 Schwerpunkt .....	31
2.4.3 Stoßgesetze .....	31
2.5 Dynamik der Rotation .....	32
2.5.1 Energie und Trägheitsmoment .....	32
2.5.2 Drehmoment .....	35
2.5.3 Drehimpuls .....	37
2.5.4 Vergleich: geradlinige Bewegung und Drehbewegung .....	38
2.5.5 Vektorielle Formulierung .....	39
2.5.6 Kreisel .....	40
<b>3 Mechanik deformierbarer Medien .....</b>	43
3.1 Deformation fester Körper .....	43
3.1.1 Dehnung .....	43
3.1.2 Anwendungen, Belastung .....	46
3.2 Statik der Flüssigkeiten und Gase .....	46
3.2.1 Druck und Kompressibilität .....	47
3.2.2 Druck in Flüssigkeiten .....	48
3.2.3 Druck in Gasen .....	50
3.2.4 Auftrieb .....	52
3.3 Dynamik der Flüssigkeiten und Gase .....	53

3.3.1 Reibungsfreie Strömungen .....	53
3.3.2 Innere Reibung .....	58
3.3.3 Turbulenz .....	61
<b>4 Gravitation .....</b>	<b>63</b>
4.1 Klassische Gravitationstheorie .....	63
4.1.1 Gravitationsgesetz .....	63
4.1.2 Planetensystem .....	64
4.1.3 Potenzielle Energie .....	66
4.1.4 Satellitenbahnen .....	67
4.2 Relativitätstheorie .....	68
4.2.1 Spezielle Relativitätstheorie .....	68
4.2.2 Allgemeine Relativitätstheorie .....	71
<b>5 Thermodynamik .....</b>	<b>72</b>
5.1 Zustandsgleichungen von Gasen .....	72
5.1.1 Temperatur .....	72
5.1.2 Zustandsgleichung idealer Gase .....	76
5.1.3 Molare Größen .....	78
5.1.4 Reale Gase .....	80
5.1.5 Aggregatzustände .....	82
5.2 Kinetische Gastheorie .....	86
5.2.1 Gasdruck .....	86
5.2.2 Thermische Energie .....	86
5.2.3 Geschwindigkeitsverteilung .....	87
5.3 Hauptsätze der Thermodynamik .....	88
5.3.1 Spezifische Wärmekapazität .....	88
5.3.2 Erster Hauptsatz der Wärmelehre .....	93
5.3.3 Zustandsänderungen .....	93
5.3.4 Kreisprozesse .....	95
5.3.5 Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre .....	97
5.4 Thermische Maschinen .....	99
5.4.1 Wärmekraftmaschinen .....	99
5.4.2 Wärmepumpe .....	101
5.5 Wärmetransport .....	103
5.5.1 Wärmeleitung .....	103
5.5.2 Konvektion .....	104
5.5.3 Wärmestrahlung .....	105
<b>6 Schwingungen und Wellen .....</b>	<b>110</b>
6.1 Schwingungen .....	110
6.1.1 Freie ungedämpfte Schwingung .....	110
6.1.2 Freie gedämpfte Schwingung .....	116
6.1.3 Erzwungene Schwingungen .....	118
6.1.4 Überlagerung von Schwingungen .....	119
6.1.5 Fourier-Analyse .....	123
6.1.6 Gekoppelte Schwingungen .....	125

6.2	Wellen .....	126
6.2.1	Wellengleichung .....	126
6.2.2	Ausbreitungsgeschwindigkeit .....	128
6.2.3	Überlagerung von Wellen .....	130
6.2.4	Doppler-Effekt .....	132
<b>7</b>	<b>Akustik .....</b>	<b>134</b>
7.1	Physiologische Akustik .....	134
7.1.1	Schallwellen .....	134
7.1.2	Schallempfindung .....	137
7.2	Technische Akustik .....	141
7.2.1	Messtechnik .....	141
7.2.2	Ultraschall .....	142
<b>8</b>	<b>Elektromagnetismus .....</b>	<b>143</b>
8.1	Elektrisches Feld .....	143
8.1.1	Elektrische Ladung .....	143
8.1.2	Elektrische Feldstärke .....	144
8.1.3	Spannung und Potenzial .....	145
8.1.4	Elektrische Influenz .....	147
8.1.5	Elektrische Polarisation .....	148
8.1.6	Kondensator .....	150
8.1.7	Elektrischer Fluss und Flussdichte .....	152
8.2	Magnetisches Feld .....	153
8.2.1	Magnetische Feldstärke .....	153
8.2.2	Magnetische Flussdichte und Fluss .....	155
8.2.3	Kräfte im Magnetfeld .....	157
8.2.4	Polarisation und Magnetisierung .....	160
8.2.5	Materie im Magnetfeld .....	161
8.3	Elektromagnetische Wechselfelder .....	164
8.3.1	Veränderliche Magnetfelder: Induktion .....	165
8.3.2	Veränderliche elektrische Felder .....	167
8.3.3	Maxwell'sche Gleichung .....	167
8.3.4	Elektromagnetische Wellen .....	168
8.4	Elektrische Ströme .....	171
8.4.1	Gleichstromkreise .....	171
8.4.2	Wechselstromkreise .....	174
8.4.3	Elektromagnetische Schwingungen .....	181
8.4.4	Ströme im Vakuum .....	182
8.4.5	Ströme in Gasen .....	185
8.4.6	Ströme in Flüssigkeiten .....	187
<b>9</b>	<b>Optik .....</b>	<b>190</b>
9.1	Geometrische Optik .....	190
9.1.1	Reflexion und Brechung .....	190
9.1.2	Hohlspiegel .....	194
9.1.3	Linsen .....	197

9.1.4	Auge .....	201
9.1.5	Photoapparat.....	204
9.1.6	Projektor.....	205
9.1.7	Fernrohr.....	206
9.1.8	Mikroskop .....	209
9.2	Wellenoptik .....	211
9.2.1	Polarisation von Licht .....	211
9.2.2	Eigenschaften der Kohärenz.....	215
9.2.3	Erscheinungen der Interferenz.....	217
9.2.4	Beugung von Licht.....	221
9.2.5	Holographie.....	225
9.3	Quantenoptik .....	227
9.3.1	Prinzipien des Lasers.....	227
9.3.2	Lasertypen .....	232
9.3.3	Nichtlineare Optik .....	233
9.4	Photometrie.....	234
9.4.1	Farbmehrheit .....	235
9.4.2	Grundbegriffe der Lichttechnik.....	236
<b>10</b>	<b>Atomphysik .....</b>	<b>239</b>
10.1	Bestandteile der Atome.....	239
10.1.1	Schematischer Aufbau der Atome.....	239
10.1.2	Lichtwellen und Photonen.....	240
10.1.3	Materiewellen und -strahlen .....	244
10.2	Aufbau der Atome .....	248
10.2.1	Wasserstoffatom.....	248
10.2.2	Quantenzahlen.....	252
10.2.3	Deutung des Periodensystems .....	255
10.3	Licht, Röntgenstrahlung und Spinresonanz.....	257
10.3.1	Emission und Absorption von Licht.....	257
10.3.2	Röntgenstrahlung .....	260
10.3.3	Spinresonanz .....	265
10.3.4	Moleküle.....	267
<b>11</b>	<b>Festkörper .....</b>	<b>269</b>
11.1	Struktur der Festkörper .....	269
11.1.1	Bindung in Kristallen .....	269
11.1.2	Kristallstrukturen.....	270
11.1.3	Nichtkristalline Festkörper .....	273
11.1.4	Flüssigkristalle .....	273
11.2	Elektronen in Festkörpern .....	275
11.2.1	Energiebänder.....	275
11.2.2	Metallische Leitung.....	276
11.2.3	Supraleitung .....	279
11.2.4	Halbleiter.....	281
11.2.5	pn-Übergang.....	286
11.3	Halbleiterbauelemente .....	289

11.3.1 Transistoren.....	289
11.3.2 Integrierte Schaltungen .....	293
11.3.3 Optoelektronik.....	294
<b>12 Kernphysik.....</b>	<b>300</b>
12.1 Struktur der Atomkerne.....	300
12.1.1 Kernteilchen .....	300
12.1.2 Kernniveaus .....	303
12.2 Radioaktive Kernumwandlungen .....	304
12.2.1 $\alpha$ -, $\beta$ - und $\gamma$ -Strahlung .....	304
12.2.2 Radioaktives Zerfallsgesetz.....	306
12.2.3 Natürliche Radioaktivität .....	308
12.2.4 Künstliche Kernreaktionen.....	310
12.3 Kernspaltung und Kernfusion .....	312
12.3.1 Spaltung mit Neutronen .....	312
12.3.2 Kernreaktoren.....	314
12.3.3 Kernfusion.....	316
12.3.4 Fusionsreaktoren .....	319
12.4 Strahlenschutz .....	320
12.4.1 Wechselwirkung von Strahlung und Materie.....	320
12.4.2 Messung radioaktiver Strahlung.....	323
12.4.3 Dosimetrie.....	325
12.5 Physik der Elementarteilchen .....	328
12.5.1 Fundamentale Wechselwirkungen .....	328
12.5.2 Beschreibung der Elementarteilchen.....	329
12.5.3 Quarks und Hadronen .....	331
<b>Sachwortverzeichnis .....</b>	<b>332</b>

# 1 Physikalische Größen

Die Physik, vom griechischen 'physis = Natur' stammend, beschäftigt sich mit der Erforschung und dem Verstehen der unbelebten Natur. Sie bildet ein unentbehrliches Fundament für andere Naturwissenschaften, wie die Chemie und die Biologie. Es ist ein Ziel der Physik, die Vielfalt der Erscheinungen einheitlich durch Naturgesetze zu beschreiben. Die Naturvorgänge werden gezielt durch Experimente studiert und nach einer gedanklichen Durchdringung in der Sprache der Mathematik formuliert. Die Aussagen und Ergebnisse einer physikalischen Beschreibung sollen in messbaren, zahlenmäßig erfassbaren Werten gemacht werden.

Die moderne Technik ist ohne die Physik nicht denk- und verstehbar, die Naturwissenschaft von heute ist die Grundlage der Technik von morgen. Beispiele dafür sind die Mikroelektronik, die Lasertechnik und die sich stürmisch entwickelnde Photonik. Bedauerlicherweise zählen dazu auch einige 10.000 Atombomben und andere Waffensysteme. Die Frage, ob die Auswirkungen der Physik zum Wohl der Menschheit dienen, bleibt damit gegenwärtig noch unbeantwortet – es hängt von uns ab.

## 1.1 Basisgrößen und -einheiten

### 1.1.1 SI-System

#### Zahlenwert und Einheit

Zur Formulierung von Zusammenhängen und Gesetzen werden mathematische Gleichungen aufgestellt. In diesen erscheinen physikalische Größen  $G$ , die in der Regel messbar sind. Sie bestehen aus einem Zahlenwert  $\{G\}$  und der Einheit  $[G]$ :

$$G = \{G\} \cdot [G]. \quad (1.1)$$

**Beispiel 1.1.1 (a)** Die Größe eines Kindes beträgt  $H = 1,1$  m. Damit gilt:  $\{H\} = 1,1$  und  $[H] = \text{m}$ .

#### Vektoren

Physikalische Größen, welche die Angabe einer Richtung erfordern, werden durch Vektoren dargestellt. Vektorielle Größen werden durch Pfeil über den Buchstaben hervorgehoben, die entsprechenden Buchstaben ohne Pfeil symbolisieren die Beträge. Beispiele sind der Weg  $\vec{s}$ , die Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , die Beschleunigung  $\vec{a}$  oder die Kraft  $\vec{F}$  und deren Beträge  $s$ ,  $v$ ,  $a$  und  $F$ .

#### Internationales Einheitensystem SI

Im deutschen und internationalen Bereich haben sich die SI-Einheiten durchgesetzt. Das internationale System beruht auf sieben Basisgrößen: Länge in m, Zeit in s, Masse in kg, elektrische Stromstärke in A, Temperatur in K, Lichtstärke in cd und Stoffmenge in mol. Die entsprechenden Basiseinheiten und deren Definitionen sind in Tabelle 1.1 zusammengestellt. Daneben wurden zahlreiche abgeleitete Größen eingeführt (Tabelle 1.2).

**Tabelle 1.1** SI-System: Basisgrößen, Basiseinheiten, Definitionen

Basisgröße	Basiseinheit		Definition
Zeit	Sekunde	s	1 s ist das 9.192.631.770-fache der Periodendauer der Strahlung zwischen den Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von $^{133}\text{Cs}$ .
Länge	Meter	m	1 m ist die Weglänge, die Licht im Vakuum in $1/299.792.458$ s durchläuft.
Masse	Kilogramm	kg	1 kg ist die Masse des Internationalen Kilogrammprototyps.
Elektrische Stromstärke	Ampere	A	1 A ist die Stärke eines Stromes, der durch zwei parallele Leiter im Abstand von 1 m fließt und die Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N hervorruft.
Temperatur	Kelvin	K	1 K ist der 271,16-te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes von Wasser.
Lichtstärke	Candela	cd	1 cd ist die Lichtstärke in einer Richtung einer mono-chromatischen Strahlungsquelle ( $540 \cdot 10^{12}$ Hz) mit einer Strahlstärke von $1/683$ W/sr.
Stoffmenge	Mol	mol	1 mol ist die Stoffmenge eines Elementes oder einer Verbindung, die eben so viele Teilchen enthält wie $12 \text{ g } ^{12}\text{C}$ ( $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}/\text{mol}$ ).

**Tabelle 1.2** Einige physikalische Größen, die von den Basisgrößen abgeleitet werden

Größe	Definition	Einheit	
Winkel	$\varphi = \frac{\text{Bogen}}{\text{Radius}}$	$\frac{\text{m}}{\text{m}} = \text{rad}$	Radian
Raumwinkel	$\Omega = \frac{\text{Fläche}}{\text{Radius}^2}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{m}^2} = \text{sr}$	Steradian
Kraft	$F = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}$	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$	Newton
Energie, Arbeit	$W = \text{Kraft} \cdot \text{Weg}$	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{J}$	Joule
Leistung	$P = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeitintervall}}$	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3} = \text{W}$	Watt
Ladung	$Q = \text{Strom} \cdot \text{Zeit}$	$\text{A} \cdot \text{s} = \text{C}$	Coulomb
Spannung	$U = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Ladung}}$	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^3} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \text{V}$	Volt
Widerstand	$R = \frac{\text{Spannung}}{\text{Strom}}$	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^3} = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega$	Ohm
Magnetischer Fluss	$\Phi = \text{ind. Spannung} \cdot \text{Zeit}$	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^2} = \text{V} \cdot \text{s} = \text{Wb}$	Weber
Magn. Induktion	$B = \frac{\text{magn. Fluss}}{\text{Fläche}}$	$\frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}^2} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \text{T}$	Tesla
Beleuchtungsstärke	$E = \frac{\text{Lichtst.} \cdot \text{Raumw.}}{\text{Fläche}}$	$\frac{\text{cd} \cdot \text{sr}}{\text{m}^2} = \text{lx}$	Lux

**Umrechnung von eV in J:**

$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad (1.2)$$

**Beispiel 1.1.1 (b)** Bestätigen Sie:

- a) Kraft:  $[F] = \text{N} = \text{kg m/s}^2$ ,
- b) Energie:  $[W] = \text{J} = \text{kg m}^2/\text{s}^2$ ,
- c) Leistung:  $[P] = \text{W} = \text{kg m}^2/\text{s}^3$ .

**1.1.2 Naturkonstanten**

In den physikalischen Gesetzen treten eine Reihe universeller Proportionalitätsfaktoren auf, die man Naturkonstanten nennt. Da sie nicht theoretisch berechenbar sind, ist man zur Bestimmung auf möglichst genaue Messungen angewiesen. Die wichtigsten Naturkonstanten sind in Tabelle 1.3 zusammengestellt.

**Tabelle 1.3** Wichtige Naturkonstanten

Bezeichnung		Wert
<i>Fundamentalkonstanten:</i>		
Vakuum-Lichtgeschwindigkeit	$c_0$	$2,997\ 924\ 58 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
elektrische Feldkonstante	$\varepsilon_0$	$8,854\ 187\ 817 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$
magnetische Feldkonstante	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}$
Gravitationskonstante	$\gamma$	$6,672\ 59 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
Planck'sches Wirkungsquantum	$h$	$6,626\ 075\ 5 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Elementarladung	$e$	$1,602\ 177\ 33 \cdot 10^{-19} \text{ As}$
<i>Ruhemassen:</i>		
Masse des Elektrons	$m_e$	$9,109\ 534 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masse des Protons	$m_p$	$1,672\ 623\ 1 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masse des Neutrons	$m_n$	$1,674\ 928\ 6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Atommassenkonstante $m(^{12}\text{C})/12$	$m_u$	$1,660\ 540\ 2 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
<i>Thermodynamische Größen:</i>		
Avogadro'sche Konstante	$N_A$	$6,022\ 136\ 7 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$
Faraday'sche Konstante	$F$	$9,648\ 530\ 9 \cdot 10^4 \text{ As/mol}$
Universelle Gaskonstante	$R$	$8,314\ 510 \text{ J/(mol K)}$
Boltzmann'sche Konstante $R/N_A$	$k$	$1,380\ 658 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	$\sigma$	$5,670\ 51 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2\text{K}^4\text{)}$

## 2 Mechanik fester Körper

### 2.1 Kinematik (Lehre von der Bewegung)

Die Kinematik beschreibt den Ablauf von Bewegungen, ohne auf deren Ursachen einzugehen. Dabei werden die Begriffe Geschwindigkeit  $v$  und  $a$  Beschleunigung benutzt. Besondere Bedeutung hat die geradlinige und kreisförmige Bewegung.

#### 2.1.1 Geradlinige Bewegung

Die Beschreibung der Kinematik wird einfach, wenn die Bewegung auf einer Geraden abläuft.

##### 2.1.1.1 Geschwindigkeit

###### Konstante Geschwindigkeit

Bei *konstanter Geschwindigkeit*  $v$  ist der zurückgelegte Weg  $s$  der verstrichenen Zeit  $t$  direkt proportional:

$$s = vt \quad \text{und}$$

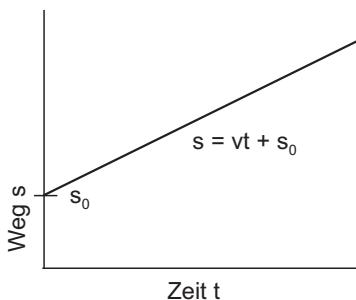
$$v = \frac{s}{t} \quad (v = \text{const.}) \quad [v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Geschwindigkeit  $v$  (2.1a)

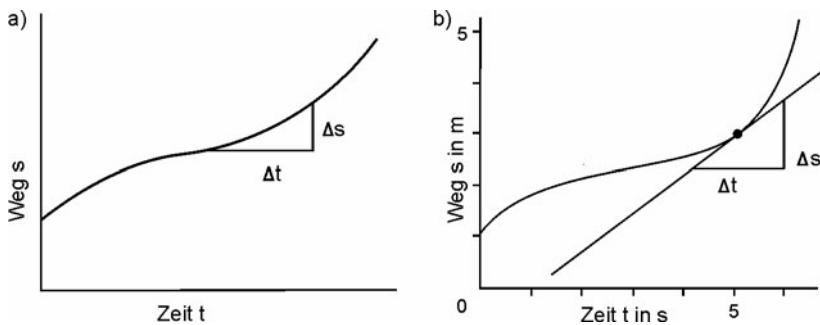
Die SI-Einheiten sind:  $[s] = \text{m}$ ,  $[t] = \text{s}$  und  $[v] = \text{m/s}$ .

Es ist möglich, dass sich ein bewegter Körper zur Zeit  $t = 0$  nicht im Koordinatenursprung bei  $s = 0$  sondern bei  $s_0$  befindet. In diesem Fall muss die entsprechende zusätzliche Strecke  $s_0$  addiert werden (Bild 2-1):

$$s = vt + s_0 \quad \text{oder} \quad v = \frac{s - s_0}{t}. \quad (2.1b)$$



**Bild 2-1**  
Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit:  
zurückgelegter Weg  $s$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$



**Bild 2-2** Bewegung mit veränderlicher Geschwindigkeit: Darstellung im  $s,t$ -Diagramm:

- Näherungsweise Bestimmung der Geschwindigkeit  $v$
- Die genaue Geschwindigkeit  $v$  kann aus dem Anstieg der Tangente ermittelt werden:  $v = \Delta s / \Delta t$

Wenn kein linearer Zusammenhang mehr gibt  
**Definition der Geschwindigkeit**

Im allgemeinen Fall ändert sich die Geschwindigkeit  $v$  eines Körpers mit der Zeit  $t$ . Es besteht kein linearer Zusammenhang mehr zwischen  $s$  und  $t$  (Bild 2-2a). Beschränkt man sich jedoch auf sehr kurze Wege  $\Delta s$  und dementsprechend sehr kurze Zeiten  $\Delta t$ , so ist der Zusammenhang zumindest näherungsweise linear. Die mittlere Geschwindigkeit in dem Zeitintervall  $\Delta t$  berechnet sich zu:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (2.2)$$

Zur Ermittlung der **momentanen Geschwindigkeit** müssen die Intervalle  $\Delta s$  und  $\Delta t$  möglichst klein sein ( $\Delta s$  und  $\Delta t \rightarrow 0$ ). Mathematisch wird dies durch den Übergang vom Differenzen- zum Differenzialquotienten beschrieben:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{oder} \quad \text{Geschwindigkeit } v \quad (2.3)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad [v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

**Die Geschwindigkeit  $v$  ist der Differenzialquotient, der die Wegänderung  $ds$  durch das entsprechende Zeitintervall  $dt$  teilt:  $v = ds / dt = \dot{s}$ .**

Das Differenzieren nach der Zeit  $t$  durch einen aufgesetzten Punkt symbolisiert:  $v = \dot{s}$ .

Man kann den Ablauf einer Bewegung in einem Weg-Zeit-Diagramm skizzieren. In einer derartigen Darstellung hat die Geschwindigkeit  $v = ds / dt$  eine anschauliche Bedeutung (Bild 2-2b):

**Die Geschwindigkeit stellt die Steigung der Kurve in der Weg-Zeit-Kurve  $s(t)$  dar.**

**Mittlere Geschwindigkeit** Durch schnittliche geschwindigkeit

Bei veränderlicher Geschwindigkeit beschreibt die Gleichung  $v = s/t$  (2.1a) die mittlere oder durchschnittliche Geschwindigkeit.

**Beispiel 2.1.1.1**

Ein Kfz benötigt für eine Reise von 650 km eine Zeit von 8 Stunden und 23 Minuten. Zwischendurch wird zwischen zwei „Kilometersteinen“ im Abstand von 500 m eine Zeit von 15 s gemessen. Wie groß sind die mittlere und die momentane Geschwindigkeit (unter der Annahme, dass zwischen den Kilometersteinen mit konstanter Geschwindigkeit gefahren wird)?

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt:

$$v = \bar{v} = s/t = 650 \text{ km} / (8 \text{ Stunden und } 23 \text{ Min}) = 650 \cdot 10^3 \text{ m} / 30180 \text{ s} = 21,54 \text{ m/s}.$$

Die momentane Geschwindigkeit beträgt:  $v = \Delta s / \Delta t = 500 \text{ m} / 15 \text{ s} = 33,33 \text{ m/s}$ .

**2.1.1.2 Beschleunigung**    **Beschleunigung** -->

Bei vielen Bewegungsabläufen ist die Geschwindigkeit nicht konstant. Zur Beschreibung der Änderungen der Geschwindigkeit dient die *Beschleunigung*.

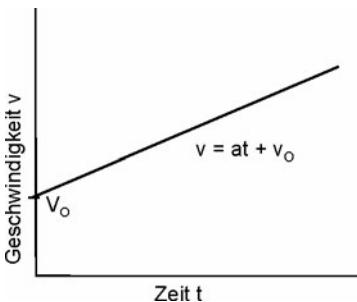
**Konstante Beschleunigung**

Eine Bewegung ist gleichmäßig beschleunigt, wenn sich die Geschwindigkeit  $v$  linear mit der Zeit  $t$  ändert. Ist die Geschwindigkeit  $v$  zur Zeit  $t = 0$  gleich Null, erhält man:

$v = at$ und		Beschleunigung $a$
$a = \frac{v}{t}$ ( $a = \text{const.}$ )	$[a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	(2.4)

Die Konstante  $a$  mit der Einheit  $[a] = \text{m/s}^2$  wird *Beschleunigung* genannt. Häufig besitzt ein System bereits vor der Beschleunigung eine Geschwindigkeit  $v_0$ . In diesem Fall muss die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  addiert werden (Bild 2-3):

$$v = at + v_0 \quad (a = \text{const.}). \quad (2.5)$$

**Bild 2-3**

Bewegung mit konstanter Beschleunigung  $a$ , die Geschwindigkeit  $v$  nimmt linear mit der Zeit  $t$  zu.  
Zur Zeit  $t = 0$  besitzt der Körper die Geschwindigkeit  $v_0$

**Definition der Beschleunigung**

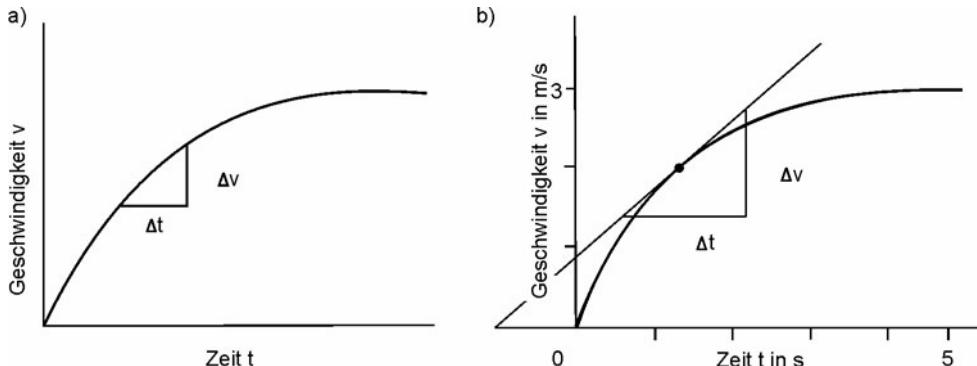
Im allgemeinen Fall ändert sich die Beschleunigung  $a$  mit der Zeit  $t$ . Zur Ermittlung der *momentanen Beschleunigung* werden in Gleichung 2.4 sehr kleine Messintervalle eingesetzt (Bild 2-4a). Die Definition der Beschleunigung  $a$  ergibt sich aus dem Differenzialquotienten:

$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ oder		Beschleunigung $a$
$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$ $[a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$		(2.6)

Die Beschleunigung  $a$  ist der Differenzialquotient, der die Geschwindigkeitsänderung  $\Delta v$  durch das entsprechende Zeitintervall  $\Delta t$  teilt:  $a = \Delta v / \Delta t = \dot{v} = \ddot{s}$ .

Das Differenzieren nach der Zeit  $t$  wird durch einen aufgesetzten Punkt symbolisiert, zweimal differenzieren durch zwei Punkte:  $a = \ddot{v} = \ddot{s}$ . Da das Differenzial den Anstieg der Tangente einer Kurve angibt, gilt mit Bild 2-4b:

Die Beschleunigung stellt die Steigung in der Geschwindigkeit-Zeit-Kurve  $v(t)$  dar.



**Bild 2-4** Bewegung mit veränderlicher Beschleunigung  $a$ : Darstellung im  $v$ - $t$ -Diagramm:

- a) Näherungsweise Bestimmung der Beschleunigung
- b) Die genaue Beschleunigung  $a$  lässt sich aus dem Anstieg der Tangente ermitteln:  $a = \Delta v / \Delta t$

### Beispiel 2.1.1.2 (a)

Ein Fahrzeug ändert seine Geschwindigkeit von 0 auf 100 km/h in 12 s. Wie groß ist die Beschleunigung?

Es gilt:  $a = v / t = 100 \text{ km/h} / 12 \text{ s} = 27,777 / 12 \text{ m/s}^2 = 2,31 \text{ m/s}^2$ .

### Beispiel 2.1.1.2 (b)

Ein Fahrzeug ändert seine Geschwindigkeit von 50 auf 60 km/h in 2 s. Wie groß ist die Beschleunigung?

Es gilt:  $a = \Delta v / \Delta t = 10 \text{ km/h} / 2 \text{ s} = 2,77 / 2 \text{ m/s}^2 = 1,39 \text{ m/s}^2$ .

### Anmerkung zur Relativitätstheorie

Eine Bewegung schneller als mit Lichtgeschwindigkeit  $c_0$  ist unmöglich (Abschnitt 4.2.1). Gleichung 2.4 kann deshalb nicht völlig korrekt sein, da sie bei genügend langen Zeiten keine Begrenzung der Geschwindigkeit liefert. Einstein leitete in der Relativitätstheorie statt Gleichung 2.4 folgende Formel ab:

$$v = \frac{at}{\sqrt{1 + (at/c_0)^2}}.$$

$c_0$  ist die Lichtgeschwindigkeit und  $a$  die konstante Beschleunigung. Wenn  $at$  bei größer werdender Zeit  $t$  wächst, wird  $at \gg c_0$ . Die „1“ unter der Wurzel kann dann vernachlässigt werden und man erhält  $v = c_0$ . Die Lichtgeschwindigkeit wird folglich nicht überschritten. Für Geschwindigkeiten  $v \ll c_0$ , die in der Technik von Bedeutung sind, erhält man  $at \ll c_0$ . Obige Gleichung geht dann mit sehr hoher Genauigkeit in  $v = at$  über.

### Integration, Geschwindigkeit

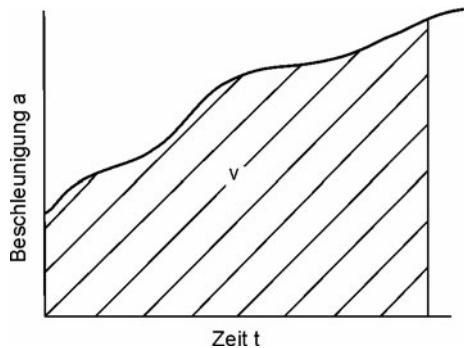
Bisher wurde die Geschwindigkeit  $v$  und die Beschleunigung  $a$  durch die ein- und zweimalige zeitliche Ableitung des zurückgelegten Weges  $s(t)$  beschrieben (symbolisiert durch einen oder zwei Punkte):

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad \text{und} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}.$$

Man kann auch von der Beschleunigung  $a(t)$  ausgehen und daraus Geschwindigkeit  $v$  und Weg  $s$  berechnen. Man muss dann die Umkehrfunktion der Differentialrechnung einsetzen, d. h. die Integralrechnung.

Zur Ableitung der Geschwindigkeit aus der Beschleunigung  $a$ , geht man von (2.6) aus:  
 $dv = adt$ . Durch Integration resultiert für die Geschwindigkeit  $v$ :

$$v = \int_0^t adt + v_0. \quad (2.7)$$



**Bild 2-5**

Die während der Beschleunigung gewonnene Geschwindigkeit  $v$  entspricht der Fläche (= Integral) im  $a$ - $t$ -Diagramm

In der Gleichung ist berücksichtigt, dass der Körper zur Zeit  $t = 0$  die Geschwindigkeit  $v_0$  besitzen kann. Die Größe  $v_0$  stellt die Integrationskonstante dar. Da das Integral einer Funktion die Fläche unter der entsprechenden Kurve darstellt, gilt gemäß Bild 2-5:

Die durch die Beschleunigung erreichte Geschwindigkeit stellt die Fläche unter der Beschleunigung-Zeit-Kurve  $a(t)$  dar.

Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung kann  $a = \text{const.}$  vor das Integral gezogen werden und man erhält (2.5):  $v = at + v_0$ .

### Integration, Weg

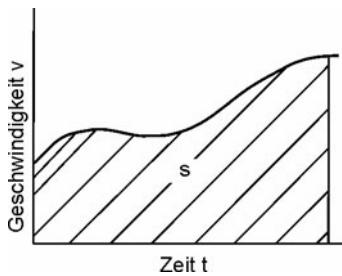
Ausgangspunkt für die Berechnung des Weges  $s$  aus der Geschwindigkeit  $v$  bildet (2.3):

$ds = vdt$ . Durch Integration erhält man den zurückgelegten Weg  $s$ :

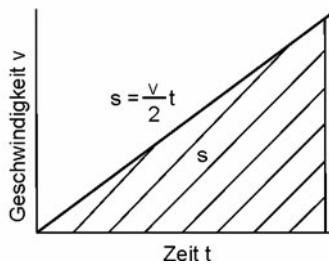
$$s = \int_0^t vdt + s_0. \quad (2.8)$$

Am Anfang der Integration, d. h. bei  $t = 0$ , befindet sich der Körper an der Stelle  $s_0$ . Die Größe  $s_0$  ist die Integrationskonstante. Da das Integral einer Funktion der Fläche unter der entsprechenden Kurve entspricht, gilt nach Bild 2-6:

Der zurückgelegte Weg stellt die Fläche unter der Geschwindigkeit-Zeit-Kurve  $v(t)$  dar.

**Bild 2-6**

Der zurückgelegte  $s$  Weg entspricht der Fläche (= Integral) im  $v$ - $t$ -Diagramm

**Bild 2-7**

Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung beträgt die Fläche im  $v$ - $t$ -Diagramm:  $s = vt/2 = at^2/2$

Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung, die mit der Geschwindigkeit  $v = 0$  beginnt, gilt:  $v = at$ . Aus (2.8) erhält man für  $s_0 = 0$ :  $s = \int_0^t at dt$ . Dieses Integral ist einfach zu lösen:

$$s = \frac{a}{2} t^2 \quad (a = \text{const}) .$$

Weg  $s$  (2.9a)

Aus Bild 2-7 erhält man eine weitere wichtige Gleichung für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung:

$$s = \frac{v}{2} t \quad (a = \text{const}) .$$

Weg  $s$  (2.9b)

Ausgehend von (2.8) wird der zurückgelegte Weg für eine beschleunigte Bewegung berechnet, die zu Beginn ( $t = 0$ ) die Geschwindigkeit  $v_0$  und den Weg  $s_0$  aufweist. Es wird in das Integral  $v = at + v_0$  eingesetzt: Konstanter Geschwindigkeit + Beschleunigung

$$s = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + s_0 \quad (a = \text{const}) .$$

Weg  $s$  (2.10)

Die Gleichung beschreibt die Überlagerung einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit  $v_0$  und konstanter Beschleunigung  $a$ .

In der Praxis sind Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit  $v_0$  oder mit konstanter Beschleunigung  $a_0$  von besonderer Bedeutung. Für diese beiden Sonderfälle sind die entsprechenden Gleichungen in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

#### Beispiel 2.1.1.2 (c)

Ein Läufer benötigt für 100 m eine Zeit von 10,2 s. Dabei beschleunigt er auf den ersten 18 m gleichmäßig auf die maximale Geschwindigkeit  $v_{\max}$ , die er bis zum Schluss beibehält. Wie groß sind  $v_{\max}$  und die durchschnittliche Geschwindigkeit?

Gegeben:  $s_2 = 100 \text{ m}$ ;  $s_1 = 18 \text{ m}$ ;  $t_2 = 11,2 \text{ s}$

$$s_1 = \frac{1}{2} v_{\max} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{2s_1}{v_{\max}} \quad (\text{Gl. 1}) \quad s_2 - s_1 = v_{\max} (t_2 - t_1) \quad (\text{Gl. 2})$$

Gl. 1 in Gl. 2 einsetzen und nach  $v_{\max}$  auflösen:

$$v_{\max} = \frac{s_2 + s_1}{t_2} = \frac{(100 + 18) \text{ m}}{11,2 \text{ s}} = 10,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \bar{v} = \frac{s_2}{t_2} = \frac{100 \text{ m}}{11,2 \text{ s}} = 8,93 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{\max} = at_1 \Rightarrow a = \frac{v_{\max}}{t_1} = \frac{v_{\max}^2}{2s_1} = \frac{10,5^2 \text{ m}}{2 \cdot 18 \text{ s}^2} = 3,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

**Tabelle 2.1** Geradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit  $v_0$  oder konstanter Beschleunigung  $a_0$  (Anfangsbedingungen:  $s_0$ ,  $v_0$  bei  $t = 0$ )

Bedingung	Beschleunigung	Geschwindigkeit	Zurückgelegter Weg
$v = \text{const.}$	$a = 0$	$v = v_0$	$s = s_0 + vt$
$a = \text{const.}$	$a = a_0$	$v = v_0 + at$	$s = s_0 + v_0 t + at^2 / 2$
Allgemein	$a = a(t)$	$v = v_0 + \int a(t) dt$	$s = s_0 + \int v(t) dt$
Definition	$a = dv/dt = \dot{v} = \ddot{s}$	$v = ds/dt = \dot{s}$	$s$

## Abbremsen

Auch Bremsvorgänge sind beschleunigte Bewegungen, allerdings mit negativem Vorzeichen. Die abgeleiteten Gleichungen gelten damit auch für Verzögerungen. Dabei ist zu beachten, dass die Bremsverzögerung zu Null wird, wenn ein Körper zum Stehen gekommen ist.

### Beispiel 2.1.1.2 (d)

- (1) Wie lange dauert es, ein Fahrzeug mit der Verzögerung  $a = -2 \text{ m/s}^2$  von 72 km/h auf 36 km/h abzubremsen?

Gegeben:  $a = -2 \text{ m/s}^2$ ;  $v_1 = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$ ;  $v_2 = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$

$$v_2 = v_1 + at \Rightarrow t = \frac{v_2 - v_1}{a} = \frac{(10 - 20)}{-2} \frac{\text{m s}^2}{\text{s m}} = 5 \text{ s}$$

- (2) Über welche Strecke  $s$  erstreckt sich der Bremsvorgang?

$$s = v_1 t + \frac{1}{2} a t^2 = 20 \cdot 5 \text{ m} - \frac{1}{2} 2 \cdot 5^2 \text{ m} = 75 \text{ m}$$

### 2.1.1.3 Fallbewegungen

#### Erdbeschleunigung $g$

Galilei stellte als erster fest, dass der freie Fall eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Gleichung  $s = \frac{g}{2} t^2$  darstellt. Alle Körper erfahren an der Erdoberfläche die gleiche Beschleunigung  $g$ , sofern die Luftreibung ausgeschaltet wird. Die mittlere Erdbeschleunigung  $g$  ist international auf folgenden Wert festgelegt:

$$g = 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Erdbeschleunigung  $g$  (2.11)

Aufgrund der rotationselliptischen Form der Erde und der Dichteschwankungen treten jedoch örtliche Abweichungen auf, die in der Geologie von Bedeutung sind. Für Potsdam beträgt der Wert

$$g = 9,8126670 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

### Beispiel: Senkrechter Wurf

Als Beispiel für die Fallbewegung eines Körpers wird der senkrechte Wurf beschrieben. Die Bewegung kann in zwei Anteile zerlegt werden. Die erste Komponente nach oben ist durch die konstante Abwurfgeschwindigkeit  $v_0$  gekennzeichnet:

$$y_1 = v_0 t.$$

Die zweite Komponente nach unten stellt eine Bewegung mit der Verzögerung  $-g$  dar:

$$y_2 = -\frac{g}{2} t^2.$$

Die Überlagerung  $y = y_1 + y_2$  liefert die Beschreibung des senkrechten Wurfes nach oben:

$$y = v_0 t - \frac{g}{2} t^2.$$

Für kleine Zeiten  $t$  wächst die Höhe  $y$  zunächst und der Körper erreicht seine maximale Steighöhe  $y_m$ . Danach nimmt  $y$  wieder ab, da der negative zweite Anteil in der Gleichung überwiegt.

Die Geschwindigkeit beim senkrechten Wurf erhält man durch Differenzieren der letzten Gleichung  $v = \dot{y}$  oder durch Überlagerung der Geschwindigkeiten beider Teilbewegungen:

$$v = v_0 - gt.$$

Der höchste Punkt beim senkrechten Wurf ist dadurch gegeben, dass die Geschwindigkeit Null ist ( $v = 0$ ). Man errechnet damit die Steigzeit  $t_m$  und die maximale Höhe  $y_m$  zu:

$$t_m = \frac{v_0}{g} \quad \text{und} \quad y_m = \frac{v_0^2}{2g}.$$

### Beispiel 2.1.1.3

Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  muss ein Stein aus der Höhe  $s = 20$  m nach unten geworfen werden, damit er mit der Geschwindigkeit  $v = 40$  m/s unten auftrifft?

Aus  $v = v_0 + gt$  und der Höhe  $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$  folgt:  $v_0 = \sqrt{v^2 - 2gs} = 34,7$  m/s.

### Bremsvorgang

Ein Fahrzeug bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v_0$  und bremst zur Zeit  $t = 0$  mit konstanter Verzögerung  $-a$ . Dieser Fall ist in seiner mathematischen Behandlung analog zum senkrechten Wurf. Es gelten die entsprechenden Gleichungen, wobei  $t_m$  die Bremszeit und  $y_m$  den Bremsweg bedeuten.

### Beispiel: Schräger Wurf

Beim schrägen Wurf durchläuft der Körper eine Parabel. Diese Kurve ist an Wasserstrahlen gut zu beobachten. Nach Bild 2-8 gilt für den zurückgelegten Weg ohne Wirkung der Erddrehung  $s = v_0 t$ . Dem überlagert sich die Bewegung verursacht durch die Erdbeschleunigung:

$$s' = \frac{g}{2} t^2.$$

Der über den Erdboden zurückgelegte Weg beträgt  $x = s \cos \alpha = v_0 t \cos \alpha$ . In der gleichen Zeit  $t$  wird die Höhe  $y = s \sin \alpha - s' = s \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2$  erreicht. Zur Ermittlung der Bahnkurve  $y = f(x)$  wird  $t$  eliminiert. Man erhält die so genannte Wurfparabel:

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

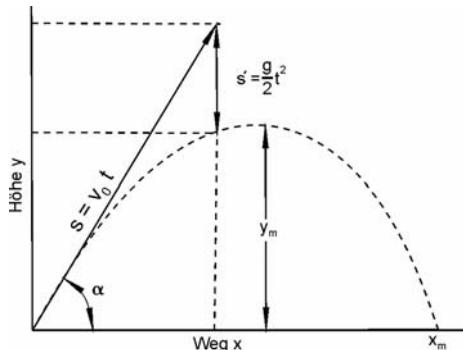
Die Wurfweite findet man als Nullstelle der Bahnkurve ( $y = 0$ ). Unter Verwendung eines Additionstheorems erhält man:

$$x_m = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

mit einem Maximum bei  $\alpha = 45^\circ$ . Die Steighöhe  $y_m$  liegt aus Symmetriegründen bei  $x_m / 2$ . Man erhält durch Einsetzen:

$$y_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Die Gleichungen des schrägen Wurfes enthalten als Spezialfälle auch die Beschreibung des waagerechten und senkrechten Wurfes.



**Bild 2-8**

Der schräge Wurf kann aus zwei Bewegungsabläufen zusammengesetzt werden: Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit  $v_0$  unter dem Winkel  $\alpha$  und freier Fall

## 2.1.2 Dreidimensionale Bewegung

Bei der linearen Bewegung reicht zur Beschreibung die Angabe der Ortskoordinate  $s$ , der Geschwindigkeit  $v = \dot{s}$  und der Beschleunigung  $a = \ddot{v} = \ddot{s}$  aus. Im dreidimensionalen Raum benötigt man drei Koordinaten und die aufgezählten Größen sind Vektoren, die mit einem Pfeil gekennzeichnet werden:  $\vec{s}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$ .

### 2.1.2.1 Geschwindigkeitsvektor

#### Ortsvektor $\vec{r}$

Zur Lagebestimmung eines Punktes in einem rechtwinkligen System dienen die Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$ , die zu einem Ortsvektor  $\vec{r} = (x, y, z)$  zusammengefasst werden. Er zeigt vom Ursprung des Koordinatensystems zu dem betreffenden Punkt. Bei einer Bewegung wandert die Spitze des Ortsvektors entlang der Bahnkurve und alle Größen sind eine Funktion der Zeit  $t$ :

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Ortsvektor  $\vec{r}$  (2.12)

### Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$

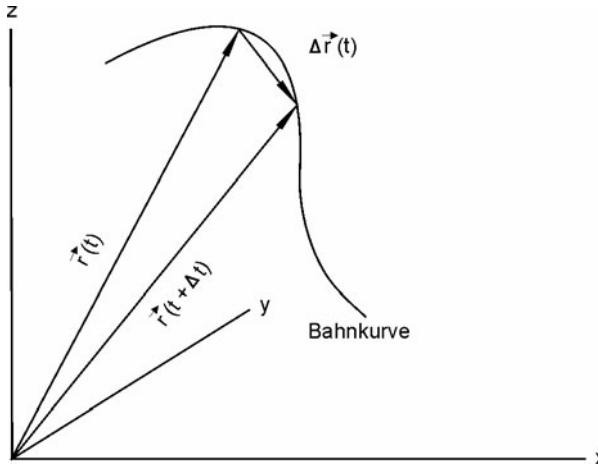
In Bild 2-9 sind die Ortsvektoren eines bewegten Punktes zu Zeit  $t$  und  $t + \Delta t$  dargestellt. Der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  wird in Analogie zu (2.3) definiert:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (v_x, v_y, v_z). \text{ Geschwindigkeitsvektor } \vec{v} \quad (2.13)$$

Der Betrag  $|\vec{v}| = v$  stimmt mit der früheren Definitionsgleichung (2.3) überein. Für die Richtung von  $\vec{v}$  gilt:

*Der Vektor der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  liegt tangential an der Bahnkurve.*

Dieses wird anhand von Bild 2-9 klar, da  $\Delta \vec{r}$  im Grenzfall  $\Delta t \rightarrow 0$  tangential zeigt.

**Bild 2-9**

Zur Definition des Orts- und Geschwindigkeitsvektors  $\vec{r}$  und  $\vec{v} = \Delta \vec{r} / \Delta t$ .  
 $\vec{v}$  liegt stets tangential zur Bahnkurve

#### Beispiel 2.1.2.1

Ein Flugzeug mit der Geschwindigkeit von 720 km/h wird von einem Wind mit 30 m/s quer ( $90^\circ$ ) zur Flugrichtung abgetrieben. (1) Wie groß ist die resultierende Geschwindigkeit?

Gegeben:  $v_F = 720 \text{ km/h}$ ;  $v_W = 30 \text{ m/s} = 108 \text{ km/h}$  quer zu Flugrichtung

Die Vektoren  $\vec{v}_F$  und  $\vec{v}_W$  spannen gemeinsam mit der resultierenden Geschwindigkeit  $\vec{v}_R$  ein rechtwinkliges Dreieck auf. Nach dem Satz des Pythagoras gilt  $\vec{v}_R = \sqrt{v_F^2 + v_W^2} = 728 \text{ km/h}$ .

(2) Um welchen Winkel  $\alpha$  wird das Flugzeug abgetrieben?

In dem rechtwinkligen Dreieck gilt:  $\tan \alpha = v_W / v_F = 0,15 \Rightarrow \alpha = 8,5^\circ$ .

#### 2.1.2.2 Bahn- und Radialbeschleunigung

Zur Berücksichtigung des vektoriellen Charakters muss die Definition der Beschleunigung nach (2.6) wie folgt erweitert werden:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \quad \text{oder} \quad \vec{a} = (\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z) = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}). \quad (2.14)$$

Der Vektor der Beschleunigung  $\vec{a}$  steht im Allgemeinen schräg zur Bahnkurve (Bild 2-10). Er kann in eine tangentiale ( $\vec{a}_t$ ) und dazu senkrechte oder radiale ( $\vec{a}_r$ ) Komponente zerlegt werden:

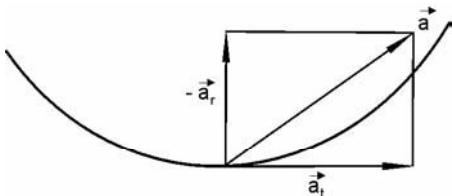
$$\vec{a} = \vec{a}_t - \vec{a}_r .$$

$$\text{Bahn- und Radialbeschleunigung} \quad (2.15)$$

Die tangentiale *Bahnbeschleunigung*  $\vec{a}_t$  entspricht der Definition bei der geradlinigen Bewegung. Sie bewirkt, dass die Bahngeschwindigkeit größer wird. Die *Radialbeschleunigung*  $\vec{a}_r$  dagegen verursacht die Abweichung von der geradlinigen Bewegung. Sie wird in (2.15) und Bild 2-10 negativ geschrieben, da sie antiparallel zum Radiusvektor liegt, der vom Krümmungsmittelpunkt zur Bahnkurve zeigt. Für eine Bahnkurve mit dem Radius  $r$  gilt für den Betrag der Radialbeschleunigung  $\vec{a}_r$ , nach Abschnitt 2.1.3.2:

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\omega^2 r .$$

Im Abschnitt 2.2.4 wird aus der Radialbeschleunigung die Zentrifugalkraft abgeleitet.



**Bild 2-10**

Zerlegung der Beschleunigung  $\vec{a}$  in Tangential- und Radialbeschleunigung  $\vec{a}_t$  und  $\vec{a}_r$

## 2.1.3 Kreisbewegung

### 2.1.3.1 Winkelgeschwindigkeit

**Drehzahl  $n$**  Ist vom Ort abhängig

Wir betrachten ein Rad oder ein Maschinenteil, das sich gleichmäßig um seine Achse dreht. Die Drehung wird durch die *Drehzahl  $n$*  gekennzeichnet, welche die Zahl der Umdrehungen pro Sekunde angibt. Betrachtet man eine Umdrehung mit der Periodendauer  $T$ , so erhält man für die Drehzahl:

$$n = \frac{1}{T} \quad [n] = \frac{1}{s} . \quad \text{Drehzahl } n \quad (2.16)$$

Die Bahngeschwindigkeit  $v$  eines Punktes auf einem Rad ist durch den Umfang der Drehung  $2\pi r$  und die Umlaufzeit  $T$  gegeben:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r n . \quad \text{Bahngeschwindigkeit } v \quad (2.17)$$

**Definition der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$**  Ist radial/zeit ort unabhängig (2.17) zeigt, dass die Bahngeschwindigkeit  $v$  zur Kennzeichnung einer Drehung nicht besonders geeignet ist, da sie vom Ort  $r$  abhängt. Dagegen ist die *Winkelgeschwindigkeit  $\omega$*  ortsunabhängig.

Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist der pro Zeiteinheit  $dt$  überstrichene Winkel  $d\varphi$ .

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad [\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{1}{\text{s}} . \quad \text{Winkelgeschwindigkeit } \omega \quad (2.18a)$$

Man beachte, dass die Winkel  $d\varphi$  und  $\varphi$  im Bogenmaß ( $360^\circ = 2\pi = 2\pi \text{ rad}$ ) gegeben werden. Die Einheit von  $\omega$  lautet:  $[\omega] = \text{Radian/s} = \text{rad/s} = 1/\text{s}$ .

### Gleichförmige Drehung

Bei der gleichförmigen Drehung sind Drehzahl  $n$  und Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  konstant. Der zurückgelegte Winkel ist proportional zur Zeit  $t$  und man kann (2.18a) vereinfachen:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \quad (\omega = \text{const.}, \varphi = 0 \text{ bei } t = 0). \quad \text{Winkelgeschwindigkeit } \omega \quad (2.18b)$$

Innerhalb der Umlaufzeit  $T$  wird der Winkel  $2\pi$  zurückgelegt:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n. \quad \text{Winkelgeschwindigkeit } \omega \quad (2.19)$$

### Winkel- und Bahngeschwindigkeit

Wird (2.19) mit  $r$  multipliziert, erhält man  $\omega r = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r n$ . Die rechte Seite dieses Ausdrucks stellt die Bahngeschwindigkeit  $v$  dar (2.17) und man erhält:

$$v = \omega r. \quad \text{Bahngeschwindigkeit } v \quad (2.20)$$

Diese Gleichung wurde für eine gleichförmige Drehung abgeleitet. Man kann jedoch zeigen, dass sie auch für beschleunigte Drehbewegungen gültig ist.

#### Beispiel 2.1.3.1

Ein Zahnrad mit dem Radius von 5 cm dreht sich 50 mal in 20 s.

(1) Wie groß sind Drehzahl  $n$ , Periodendauer  $T$ , Bahngeschwindigkeit  $v$  und Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .

Gegeben:  $r = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$ ;  $N = 50$ ;  $t = 20 \text{ s}$

Die Drehzahl beträgt  $n = N/t = 2,5 \text{ s}^{-1}$ . Daraus folgen die Periodendauer  $T = 1/n = 0,4 \text{ s}$ , die Bahngeschwindigkeit  $v = 2\pi r n = 0,785 \text{ m/s}$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 2\pi n = 15,7 \text{ s}^{-1}$ .

(2) An obiges beschriebenes Zahnrad wird ein zweites Zahnrad mit dem Radius 15 cm angekoppelt. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit und Drehzahl dieses Zahnrades?

Zusätzlich gegeben  $r' = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}$

Die Umfangsgeschwindigkeit beider Zahnräder sind gleich:  $v = \omega r = v' = \omega' r'$ .

Daraus folgen:  $\omega' = \omega r / r' = 5,23 \text{ s}^{-1}$  und  $n' = 0,83 \text{ s}^{-1}$ .

#### 2.1.3.2 Radialbeschleunigung

Kraft die gerade linien vermeidet

Für die Bewegung eines Körpers auf einer Kreisbahn ist es erforderlich, dass eine seitliche Beschleunigung auftritt, die eine Ablenkung von der geradlinigen Bewegung bewirkt (Abschnitt 2.1.2.2). Die **Radialbeschleunigung**  $\vec{a}_r$  ist auf den Mittelpunkt der Kreisbahn gerichtet, antiparallel zum **Radiusvektor**. Bei einer beschleunigten Drehbewegung tritt zusätzlich eine **Bahnbeschleunigung**  $\vec{a}_t$  auf, die eine Zunahme der Bahn- und Winkelgeschwindigkeit verursacht.

Zur Berechnung der Radialbeschleunigung ist in Bild 2-11 die gleichförmige Bewegung eines Punktes auf einer Kreisbahn mit dem Radius  $r$  dargestellt. Die Geschwindigkeitsvektoren  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  sind zu zwei verschiedenen Zeiten gezeichnet.

Die Beträge  $v$  der beiden Geschwindigkeiten sind gleich:  $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$ . Man kann diese Vektoren frei parallel verschieben. Aus dem rechten schraffierten Dreieck erkennt man, dass  $\vec{v}_1 + \Delta\vec{v} = \vec{v}_2$  ist. Die (sehr kleine) Geschwindigkeitsänderung  $\Delta\vec{v}$  und damit auch die Beschleunigung zeigen antiparallel in radialer Richtung. Der Betrag dieser Radialbeschleunigung  $a_r$  kann aus der Ähnlichkeit der beiden schraffierten 'Dreiecke' in Bild 2-11 berechnet werden:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta s}{r} \quad \text{oder} \quad \Delta v = \frac{v \Delta s}{r}.$$

Bei Division durch  $\Delta t$  wird daraus:

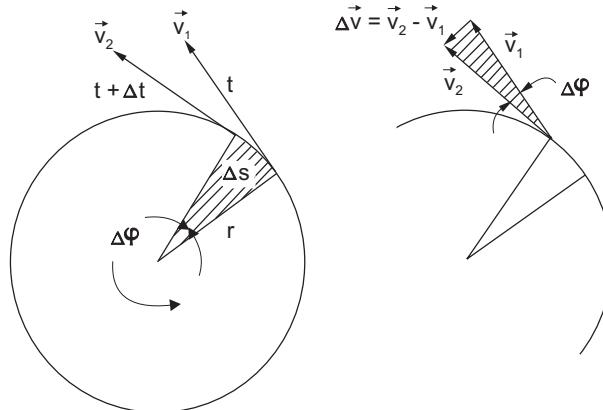
$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}.$$

Dabei wurde  $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$  verwendet. Aus der linken Seite  $\frac{\Delta v}{\Delta t}$  entsteht im Grenzfall kleiner Intervalle die Definition der Beschleunigung (2.6). Damit erhält man mit (2.20) für den Betrag der Radialbeschleunigung  $a_r$ :

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\omega^2 r.$$

Radialbeschleunigung  $a_r$  (2.21)

Eine Drehbewegung weist eine Radialbeschleunigung  $a_r$  auf, die senkrecht zur Bahnkurve wirkt.



**Bild 2-11**

Zur Berechnung der Radialbeschleunigung  $\vec{a}_r$  in einer Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit

Das Minuszeichen in (2.21) wurde eingeführt, weil die Richtung des Radiusvektors vom Zentrum weg zeigt. Die Radialbeschleunigung  $a_r$  zeigt jedoch zum Zentrum hin. Die Radialbeschleunigung hat keinen Einfluss auf den Betrag der Geschwindigkeit.

Bei Erdsatelliten wird die Radialbeschleunigung durch die Anziehungskraft der Erde geben. Der Satellit wird ständig an die Erde hin beschleunigt, wodurch die Kreisbahn entsteht.

### Beispiel 2.1.3.2

Ein Satellit in 300 km Höhe bewegt sich in 100 Minuten ein Mal um die Erde ( $R = 6400$  km). Wie groß sind Radialbeschleunigung, die Winkel- und Bahngeschwindigkeit?

Gegeben:  $T = 100 \text{ min} = 6000 \text{ s}$ ; Radius der Umlaufbahn  $r = R + h = 6700 \text{ km} = 6,7 \cdot 10^6 \text{ m}$

Die Winkelgeschwindigkeit beträgt  $\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T} = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ .

Daraus erhält man die Radialbeschleunigung  $a_r = -\omega^2 r = 7,4 \text{ m/s}^2$ . Dieser Wert wird durch die Erdanziehung bestimmt und er ist der Wert der Erdbeschleunigung in 300 km Höhe. Die Umlaufgeschwindigkeit berechnet sich zu  $v = \omega r = 7035 \text{ m/s}$ .

### 2.1.3.3 Winkelbeschleunigung

Rotierende Maschinenelemente ändern beim Anlaufen ihre Drehzahl. Damit variiert die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und die Bahngeschwindigkeit  $v$ . Zur Beschreibung der beschleunigten Kreisbewegung dienen verschiedene Begriffe:

#### Bahnbeschleunigung $a_t$

Die Vergrößerung oder Verkleinerung der Bahngeschwindigkeit  $v$  wird durch die tangentiale Bahnbeschleunigung  $a_t$  beschrieben. Dabei ist  $dv \approx \Delta v$  nach Bild 2.12 gegeben:

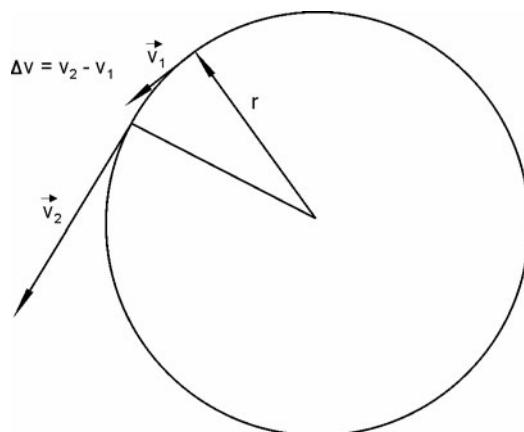
$$a = a_t = \frac{dv}{dt}. \quad \text{Bahnbeschleunigung } a_t \quad (2.22)$$

Die Bahnbeschleunigung  $a_t$  darf nicht mit der Radialbeschleunigung  $a_r$  (2.21) verwechselt werden.

#### Winkelbeschleunigung $\alpha$

Die Winkelbeschleunigung  $\alpha$  ist die Änderung der Winkelgeschwindigkeit  $d\omega$  geteilt durch die Zeit  $dt$ :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad [\alpha] = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = \frac{1}{\text{s}^2}. \quad \text{Winkelbeschleunigung } \alpha \quad (2.23a)$$



**Bild 2.12**

Zur Berechnung der Tangential- oder Bahnbeschleunigung  $\vec{a}_t$  in einer beschleunigten Kreisbewegung

Die Einheit für die Winkelbeschleunigung ist  $[\alpha] = \text{rad/s}^2 = 1/\text{s}^2$ . Für den einfachen Fall einer gleichmäßig beschleunigten Drehbewegung gilt:

$$\alpha = \frac{\omega}{t} \quad (\alpha = \text{const.}, \omega = 0 \text{ für } t = 0). \quad \text{Winkelbeschleunigung } \alpha \quad (2.23b)$$

Im Folgenden wird der Zusammenhang zwischen der Winkelbeschleunigung  $\alpha$  und Bahnbeschleunigung  $a (= a_t)$  abgeleitet. Mit  $\omega = \frac{v}{r}$  wird  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(v/r)}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dv}{dt}$  oder

$$\alpha = \frac{a}{r} \quad \text{und} \quad a = \alpha r .$$

Winkelbeschleunigung  $\alpha$

**(2.23c)**

### Beispiel 2.1.3.3 (a)

Ein Fahrzeug mit Rädern von 40 cm Radius beschleunigt mit  $4 \text{ m/s}^2$ . Wie groß ist die Winkelbeschleunigung eines Rades?

Gegeben:  $r = 0,4 \text{ m}$ ;  $a = 4 \text{ m/s}^2$

Es gilt  $\alpha = \frac{a}{r} = 10 \text{ s}^{-2}$ .

### Beispiel 2.1.3.3 (b)

Ein Motor beschleunigt gleichmäßig aus dem Stillstand und erreicht nach 10 s eine Drehzahl von 3000 Umdrehungen pro Minute. Wie groß ist danach die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , die Winkelbeschleunigung  $\alpha$  und wie viele Umdrehungen  $N$  hat er gemacht?

Gegeben:  $n = 3000 \text{ min}^{-1} = 50 \text{ s}^{-1}$ ;  $t = 10 \text{ s}$

Die Winkelgeschwindigkeit erhält man aus der Drehzahl  $\omega = 2\pi n = 314 \frac{1}{s}$ . Für die gleichförmige Winkelbeschleunigung gilt  $\alpha = \frac{\omega}{t} = 31,4 \frac{1}{\text{s}^2}$ . Die Zahl der Umdrehungen ergibt sich nach Tabelle 2.2 aus  $\varphi = \frac{1}{2} \alpha t^2$ . Eine Umdrehung entspricht einem Winkel von  $2\pi$ , d. h.  $N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \alpha t^2 = 250$  Umdrehungen.

## Bahn- und Winkelgrößen

Aus der Kreisgeometrie ist die einfache Beziehung zwischen dem Winkel  $\varphi$  im Bogenmaß und dem Kreisbogen  $s$  bekannt:  $s = r\varphi$ .

Zusammengefasst gelten folgende Zusammenhänge zwischen den *Bahngrößen*  $s$ ,  $v$ ,  $a$  und den entsprechenden *Winkelgrößen*  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$  ((2.20) und (2.23c)):

$$s = r\varphi$$

$$v = r\omega$$

$$a = r\alpha .$$

Bahngroße = Radius x Winkelgröße

**(2.24)**

Diese Gleichungen können auch durch Differenzieren von  $s = r\varphi$  abgeleitet werden.

Die bisherigen Gleichungen der eindimensionalen Kinematik gelten nach Vertauschung von  $s \rightarrow \varphi$ ,  $v \rightarrow \omega$  und  $a \rightarrow \alpha$  auch für die Kreisbewegung. Ein Vergleich der Tabellen 2.1 und 2.2 macht dies deutlich.

**Tabelle 2.2** Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  oder konstanter Beschleunigung  $\alpha_0$  (Anfangsbedingungen:  $\varphi_0$ ,  $\omega_0$  bei  $t = 0$ )

Bedingung	Winkelbeschleunigung	Winkelgeschwindigkeit	Zurückgelegter Winkel
$\omega = \text{const.}$	$\alpha = 0$	$\omega = \omega_0$	$\varphi = \varphi_0 + \omega t$
$\alpha = \text{const.}$	$\alpha = \alpha_0$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \alpha t^2 / 2$
Allgemein	$\alpha = \alpha(t)$	$\omega = \omega_0 + \int \alpha(t) dt$	$\varphi = \varphi_0 + \int \omega(t) dt$
Definition	$\alpha = d\omega / dt$	$\omega = d\varphi / dt$	$\varphi$

## 2.2 Dynamik (Lehre von den Kräften)

Die *Kinematik* beschreibt den Ablauf von Bewegungen, ohne auf die Ursachen, d. h. auf die Kräfte, einzugehen. Die *Dynamik*, die Lehre von den Kräften, holt dieses nach. Die grundlegenden Gesetze der klassischen Mechanik wurden von I. Newton (1643-1727) formuliert und sie sind in (nahezu) allen Bereichen der Technik gültig. Eine Erweiterung für Bewegungen in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit, wie sie in atomaren Systemen oder bei Teilchenbeschleunigern auftreten, wurde von A. Einstein (1879-1955) durchgeführt (Abschnitt 4.2).

### 2.2.1 Kraft (Newton'sche Axiome)

Die Grundlage der Dynamik bilden die drei Gesetze von Newton: das *Trägheitsgesetz*, das *Aktionsprinzip*, welches die Definition der Kraft angibt, und das *Gesetz von der Wechselwirkung*.

**Trägheitsgesetz** Kein Kraft v konstant a null

In der Mechanik werden Koordinatensysteme definiert, in denen die mechanischen Gesetze gelten. Die mathematische und physikalische Beschreibung wird besonders einfach in Bezugssystemen, in denen die Geschwindigkeit einer Masse ohne äußere Einwirkungen konstant oder null ist. Man nennt sie *Inertialsysteme*; es handelt sich um nicht rotierende und nicht beschleunigte Systeme. Eine absolute Ruhe ist nicht feststellbar. Daher gibt es mehrere Inertialsysteme, die sich gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.

Die obige Aussage wird im *Trägheitsgesetz (erstes Newton'sches Axiom)* verdeutlicht. Wirkt auf einen Körper keine Kraft  $F$ , so ändert sich die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  nicht und die Beschleunigung  $\vec{a}$  ist null:

Aus $\vec{F} = 0$ folgt $\vec{v} = \text{const.}$ und $\vec{a} = 0$ .	(2.25a)
-----------------------------------------------------------------------	---------

In der Praxis ist der kräftefreie Zustand nicht zu erreichen und es wirken stets Reibungskräfte, die eine Bremsung bewirken.

**Aktionsprinzip** F-Kraft ist masse mal beschleunigung

Steht ein Körper der Masse  $m$  unter dem Einfluss einer äußeren Kraft  $\vec{F}$ , so wird er beschleunigt. Das *zweite Newton'sche Axiom* beschreibt den Zusammenhang zwischen der Kraft  $\vec{F}$  und der Beschleunigung  $\vec{a}$ :

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad [\vec{F}] = N = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = \text{Newton.} \quad \text{Kraft } F \quad (2.25b)$$

Die Kraft  $\vec{F}$  ist als Masse  $m$  mal Beschleunigung  $\vec{a}$  definiert.

In der allgemeinen Formulierung der Kraft  $\vec{F}$  wird der Begriff *Impuls*  $\vec{p}$  verwendet.

Der Impuls  $\vec{p}$  ist das Produkt aus Masse  $m$  mal Geschwindigkeit  $\vec{v}$ :

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad [\vec{p}] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}}. \quad \text{Impuls } \vec{p} \quad (2.26)$$

Die Gleichung für die Kraft  $\vec{F}$  (2.25b) lautet damit in allgemeiner Form:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad \text{Kraft } F \quad (2.25c)$$

In der klassischen Mechanik ist die Masse  $m$  eine Konstante und beide Formulierungen des zweiten Axioms (2.25b und c) gehen ineinander über. Die Einheit der Masse  $m$  ist:  $[m] = \text{kg}$ .

Die Einheit der Kraft  $\vec{F}$  ist:  $[\vec{F}] = \text{Newton} = N = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$ .

### Wechselwirkung

Eine wichtige Ergänzung zum Verständnis von Kräften ist das *dritte Newton'sche Axiom*. Es besagt, dass es eine einzelne isolierte Kraft nicht gibt.

Übt ein Körper auf einen anderen Körper eine Kraft  $\vec{F}_{12}$  aus, so wirkt der zweite mit einer gleich großen aber entgegengesetzten Kraft auf den ersten Körper (*actio = reactio*, d. h. Kraft = Gegenkraft).

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad \text{Kraft} = \text{Gegenkraft}$$

#### Beispiel 2.2.1

Ein Fahrzeug der Masse 500 kg wird in 10 s aus dem Stand auf 50 km/h beschleunigt. Wie groß ist die Antriebskraft?

Gegeben:  $m = 500 \text{ kg}$ ;  $t = 10 \text{ s}$ ;  $v = 50 \text{ km/h} = 13,89 \text{ m/s}$

Die Kraft beträgt  $F = ma = mv/t = 694,5 \text{ kg m/s}^2 = 694,5 \text{ N}$ .

## 2.2.2 Masse und Kraft

### Masse $m$

Die Einheit der Masse wird durch einen Eichkörper, den Internationalen Kilogrammprototyp, zu 1 kg festgelegt. Vom theoretischen Standpunkt her kann man die Masse einerseits durch die Gleichung  $\vec{F} = m\vec{a}$  definieren. Bei gleicher Kraft sind zwei Massen ( $m_1$  und  $m_2$ ) vergleichbar, indem man die Beschleunigungen ( $a_1$  und  $a_2$ ) misst:  $m_1/m_2 = a_2/a_1$ . Die durch diese dynamische Methode ermittelte Masse wird *träg Masse* genannt. Andererseits kann zur Massenbestimmung vom *Gravitationsgesetz* ((4.1):  $F = \gamma m_1 m_2 / r^2$ ) ausgegangen werden, indem die Anziehungskräfte untersucht werden. Die so definierte Masse heißt *schwere Masse*. Es besteht kein Unterschied zwischen träge und schwerer Masse. Diese Identität ist keineswegs trivial, und sie führte Einstein zur Relativitätstheorie.

## Kraft $\vec{F}$

Nach (2.25b) ist die Kraft  $\vec{F} = m\vec{a}$  ein Vektor in Richtung der Beschleunigung  $\vec{a}$ . Im Folgenden sollten einige Kräfte der Mechanik beschrieben werden.

**Statisches Gleichgewicht:** Bei Problemen der Statik ist die vektorielle Summe aller Kräfte, die an einem Körper angreifen, gleich Null:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = 0. \quad \text{Statisches Gleichgewicht} \quad (2.27)$$

Bei Drehbewegungen ist diese Gleichgewichtsbedingung nicht ausreichend. Kräftepaare  $+\vec{F}$  und  $-\vec{F}$ , deren Wirkungslinien einen Abstand  $s$  haben, erzeugen ein Drehmoment (Abschnitt 2.5.4). Für das statische Gleichgewicht muss auch die Summe der Drehmomente gleich Null sein.

**Gewichtskraft:** Im Schwerefeld der Erde unterliegt jeder Körper an der Erdoberfläche der Erdbeschleunigung von  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Dadurch wirkt auf die Masse  $m$  folgende Gewichts- oder Schwerkraft  $F_g$ :

$F_g = mg.$	Gewichtskraft $F_g$	(2.28)
-------------	---------------------	--------

Kräfte können, wie alle Vektoren, in Komponenten zerlegt werden. Dies soll am Beispiel der Gewichtskraft auf der schiefen Ebene demonstriert werden. Nach Bild 2-13 beträgt die Normalkraft  $F_n$ , mit der eine Masse senkrecht auf die Unterlage drückt:

$$F_n = mg \cos \alpha.$$

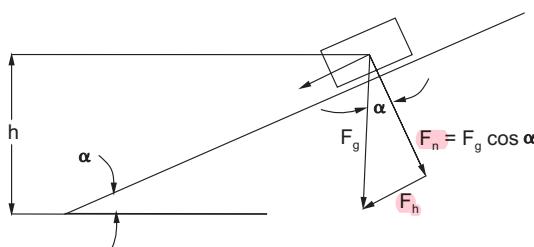
Die Hangabtriebskraft  $F_h$  zeigt parallel zur Oberfläche:

$$F_h = mg \sin \alpha.$$

**Elastische Kräfte:** Kräfte verursachen nicht nur eine Beschleunigung, sondern sie deformieren auch Körper. Diese üben dann *elastische Kräfte*, z. B. Federkräfte, aus. Das Verhalten von Festkörpern wird als elastisch bezeichnet, wenn die Deformation nach Wegfallen der Kräfte wieder vollständig verschwindet. Innerhalb gewisser Grenzen gilt das *Hooke'sche Gesetz* (Abschnitt 3.1.1):

$F_e = cs$	$[c] = \frac{\text{N}}{\text{m}},$	Federkraft $F_e$
------------	------------------------------------	------------------

welches einen linearen Zusammenhang zwischen der elastischen Kraft  $F_e$  und der Auslenkung  $s$  liefert. In der Technik hat diese Gleichung besonders für Federn Bedeutung.  $c$  wird daher *Federkonstante* genannt.



**Bild 2.13**

Zerlegung der Gewichtskraft  $F_g$  auf der schiefen Ebene in zwei Komponenten: Normalkraft  $F_n$  und Hangabtriebskraft  $F_h$

**Beispiel 2.2.2 (a)**

Eine Masse  $m$  liegt auf einer schiefen Ebene, die den Winkel  $\alpha$  mit der Waagerechten einschließt. Berechnen Sie die Kraftkomponenten senkrecht ( $F_n$ ) und parallel ( $F_h$ ) zur schiefen Ebene.

Nach Bild 2.13 gilt:  $F_g = mg$ ,  $F_n = F_g \cos \alpha = mg \cos \alpha$  und  $F_h = F_g \sin \alpha = mg \sin \alpha$ .

**Reibungskräfte:** In der Praxis treten häufig Reibungskräfte auf. Sie sind der bewegenden Kraft immer entgegengerichtet. In der Mechanik fester Körper tritt Haftreibung und Gleitreibung auf. Beim Ziehen eines Klotzes stellt man fest, dass zur Einleitung der Bewegung eine relative große Kraft aufgebracht werden muss. Diese Kraft ist notwendig, um die *Haftreibung* zu überwinden. Ist die Bewegung jedoch eingeleitet, wird die zum Ziehen notwendige Kraft kleiner, da nur die *Gleitreibung* wirkt. Die dritte Variante ist die *Rollreibung* bei Rädern.

Die Experimente zeigen, dass alle drei Reibungstypen bei niedrigen Geschwindigkeiten den gleichen Gesetzen gehorchen. Die Reibungskräfte sind unabhängig von der Geschwindigkeit und von der Größe der Auflagefläche. Man stellt sich vor, dass sich mikroskopisch gesehen zwei Körper nur an drei Punkten berühren, so dass die Größe der Auglagefläche keine Rolle spielt. Die Reibungskraft  $F_r$  hängt von der Normalkraft  $F_n$  ab, die den Körper senkrecht auf seine Unterlage drückt:

$$F_r = \mu F_n \quad [\mu] = 1. \quad \text{Reibungskraft } F_r \quad (2.30)$$

Die Konstante  $\mu$  wird Reibungszahl genannt. Sie wird in Tabelle 2.3 für Anwendungsbeispiele der Haft-, Gleit- oder Rollreibung angegeben. In der Mechanik von Flüssigkeiten und Gasen treten andere Mechanismen der Reibung auf, die in Tabelle 2.4 zusammengestellt sind (Kapitel 3).

**Beispiel 2.2.2 (b)**

Wie groß ist die Haftreibungszahl  $\mu$ , wenn ein Körper auf der schiefen Ebene  $\alpha = 43^\circ$  gerade noch liegen bleibt?

Die Gleichgewichtsbedingung lautet (Bild 2.13):  $F_r = F_h$  mit  $F_r = \mu F_n = \mu F_g \cos \alpha$  und  $F_h = F_g \sin \alpha$ .

Damit erhält man  $\mu F_g \cos \alpha = F_g \sin \alpha$  und  $\mu = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \tan 43^\circ = 0,93$ .

**Tabelle 2.3** Haft-, Gleit- und Rollreibungszahlen ( $\mu_H$ ,  $\mu_G$ ,  $\mu_R$ )

Oberflächen	$\mu_H$	$\mu_G$	$\mu_R$
Gummi auf Asphalt	0,9	0,85	
Gummi auf Beton	0,65	0,5	
Gummi auf Eis	0,2	0,15	
Stahl auf Holz	0,5 - 0,6	0,2 - 0,5	
Stahl auf Stahl	0,15	0,12	
Kfz auf Straße			0,02 - 0,05
Bahn auf Schiene			0,002

**Tabelle 2.4** Reibungsgesetze für Festkörper, sowie laminare und turbulente Reibung zwischen Festkörpern und Flüssigkeiten/Gasen

Äußere Reibung Festkörper (Abschnitt 2.2.2)	Laminare Reibung Festkörper-Flüssigkeit/Gas (Abschnitt 3.3.2)	Turbulente Reibung Festkörper-Flüssigkeit/Gas (Abschnitt 3.3.3)
unabhängig von $v$	proportional zu $v$	proportional zu $v^2$
$F_r = \mu F_n$	$F_r = Bv$	$F_r = Dv^2$
$\mu$ = Reibungszahl abhängig von: Oberfläche und Material	$B$ = Zähigkeitskoeffizient abhängig von: Form des Körpers, Viskosität $\eta$	$D$ = Gasreibungskoeffizient abhängig von: Form des Körpers Dichte $\rho$
Beispiel: siehe Tabelle 2.3	Beispiel: Kugel mit Radius $r$ , $B = 6\pi\eta r$	Beispiel: Körper mit Fläche $A$ und Widerstandsbeiwert $c_w$ , $D = c_w\rho A / 2$

### Messung von Kräften

Das klassische Instrument zur Messung von Kräften ist die Federwaage. Moderne Verfahren nutzen Dehnungsmessstreifen, die auf deformierbare Bauelemente geklebt werden. Bei der Einwirkung von Kräften ändert sich der elektrische Widerstand proportional zur Längenänderung. Andere Methoden zur Kraftmessung beruhen auf dem Piezoeffekt in Kristallen oder Keramiken. Durch Kräfte wird der Kristall deformiert und es entstehen Oberflächenladungen, die elektronisch nachgewiesen werden (Abschnitt 11.12). Auch optische Verfahren mit Glasfasern kommen zum Einsatz. Durch eine Deformation der Faser wird Licht ausgekoppelt und messtechnisch erfasst.

### 2.2.3 Bewegte Bezugssysteme, Trägheitskraft

Das Trägheitsgesetz (erstes Newton'sches Axiom) definiert *Inertialsysteme*, in denen die Formulierung der Naturgesetze besonders einfach ist. Dies sind Systeme, die ruhen oder sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  geradlinig bewegen. In Inertialsystemen gelten die Gesetze der Mechanik in der bisher beschriebenen Form. Der Übergang von einem Inertialsystem in ein anderes wird durch die so genannte *Galilei-Transformation* vollzogen (Abschnitt 4.2.1). Die nach der Transformation wirkenden Kräfte bleiben gleich, da die Beschleunigung  $a_s = dv/dt$  der Systeme gegeneinander gleich Null ist. Dagegen ändern sich die Geschwindigkeit und die Ortskoordinaten, wenn die Beschreibung von einem System ins andere übergeht.

#### Trägheitskraft $F_T$

In Systemen, die gegeneinander beschleunigt sind, werden unterschiedliche Kräfte gemessen. Zum Verständnis denken wir uns einen reibungslos gelagerten Körper in einer anfahrenden Bahn. Ein Beobachter im ruhenden System (z. B. Bahnhof) sieht, dass der Körper an der gleichen Stelle bleibt; die Bahn fährt unter dem Körper weg. Fährt man dagegen mit der beschleunigten Bahn ( $a_s = const.$ ) mit, so bewegt sich der Körper entgegengesetzt zur Fahrtrichtung mit der Beschleunigung  $-a_s$ :

In Systemen mit der Beschleunigung  $a_s$  wirkt auf eine Masse  $m$  die Trägheitskraft  $F_T = -ma_s$ .

Die Kraft  $F = ma$  in einem nicht beschleunigten (oder ruhenden) System und die Kraft  $F' = ma'$  in einem beschleunigten System lässt sich wie folgt ineinander umrechnen:

$$F' = F - ma_s, \quad (2.31)$$

wobei  $a_s$  die Beschleunigung des System angibt. Die Größe

$F_T = -ma_s$	Trägheitskraft $F_T$	(2.32)
---------------	----------------------	--------

nennt man *Trägheitskraft*. Sie ist eine Scheinkraft, die auf die Beschleunigung eines Koordinatensystems zurückzuführen ist.

Die Trägheitskraft spürt man beim Beschleunigen eines Fahr- oder Flugzeuges. Der Insasse wird nach (2.32) entgegengesetzt zur Beschleunigung in den Sitz gedrückt. Beim Abbremsen dagegen wirkt die Trägheitskraft nach vorn.

### Beispiel 2.2.3 (a)

Welche Kräfte wirken auf das Seil einer Aufzugskabine ( $m = 1000 \text{ kg}$ ), wenn sie sich

- a) mit der Beschleunigung von  $a = 1,5 \text{ m/s}^2$  abwärts und
- b) mit der Beschleunigung von  $a = 1,5 \text{ m/s}^2$  aufwärts bewegt?

Die Kraft  $F_S$  auf das Seil ist die Summe aus der Gewichtskraft  $F_g$  und der Trägheitskraft  $F_T$ :  $F_S = F_g + F_T$  mit  $F_g = mg$  und  $F_T = \pm ma$

a)  $F_S = mg - ma = 8310 \text{ N.}$       b)  $F_S = mg + ma = 11300 \text{ N.}$

### Beispiel 2.2.3 (b)

Ein Kfz mit 50 km/h kommt bei einem Unfall innerhalb von 2 m vollständig zum Stillstand. Die Kraft auf einen Sicherheitsgurt hängt von der Masse der angeschnallten Person ab und kann wie folgt berechnet werden:

Die Bremsverzögerung  $a$  berechnet sich aus  $a = v/t$  und  $s = vt/2$  zu  $a = v^2/2s = 48,2 \text{ m/s}^2$ . Damit wird für eine Person mit  $m = 75 \text{ kg}$  die Kraft auf den Sicherheitsgurt (= Trägheitskraft)  $F = ma = 3616,9 \text{ N}$ . (Dies entspricht einer Belastung des Gurtes durch eine Masse von 368,7 kg.)

## 2.2.4 Zentrifugal- und Corioliskraft

Gleichförmig rotierende Koordinatensysteme sind beschleunigte Systeme, da die Radialbeschleunigung  $a_r$  auftritt. Daher treten bei Rotationen ebenfalls Trägheits- oder Scheinkräfte auf: die *Zentrifugal-* und *Corioliskraft*.

### Zentrifugalkraft $F_Z$

Bei Drehbewegungen tritt immer die Radialbeschleunigung  $a_r = -\frac{v^2}{r} = -\omega^2 r$  (2.21) auf.

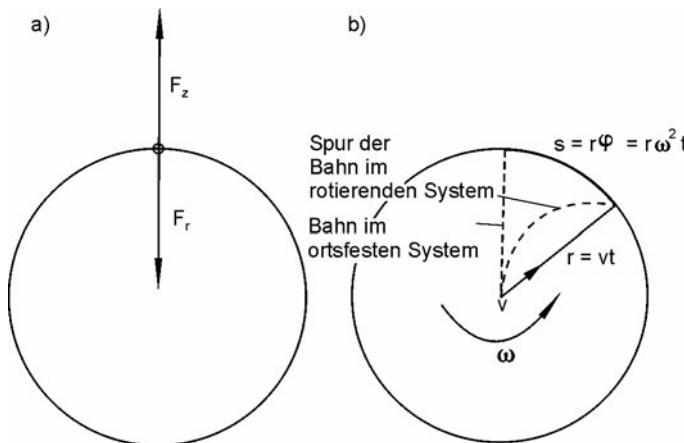
Dabei ist  $r$  der Radius der Kreisbahn,  $v$  die Bahngeschwindigkeit und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit. Oben wurde festgestellt: In Systemen mit der Beschleunigung  $a_s$  wirkt auf eine Masse  $m$  die Trägheitskraft  $F_T = -ma_s$ . Bei der Bewegung einer Masse  $m$  auf einer Kreisbahn ist  $a_r = a_s$ . Man erhält für die Trägheitskraft  $F_Z = F_T$  bei Kreisbewegungen:

$F_Z = -ma_r = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r.$	Zentrifugalkraft $F_Z$	(2.33)
-----------------------------------------------	------------------------	--------

Diese Trägheitskraft  $F_Z$  ist als Zentrifugalkraft bekannt.

Man spürt die Zentrifugalkraft beispielsweise, wenn ein Auto durch eine Kurve fährt. Das Auto wird durch die Lenkung auf eine Kreisbahn gebracht. Der Insasse würde sich geradeaus weiterbewegen. Der Autositz übt jedoch eine Kraft seitlich zur Fahrtrichtung aus, in Richtung des Mittelpunktes der Kreisbewegung. Diese Kraft nennt man *Zentripetalkraft*  $F_r$ . Die Gegenkraft dazu ist die *Zentrifugalkraft*  $F_Z$ , die in radialer Richtung zeigt.

Die Angriffspunkte von Zentrifugal- und Zentripetalkraft sind in Bild 2-14a an einem Beispiel dargestellt, in dem eine Masse an einer Schnur im Kreis geschleudert wird. Man beachte: beim Reißen des Fadens fliegt die Masse tangential und nicht radial weg, da Zentrifugal- und Zentripetalkraft in diesem Augenblick Null sind. Besondere Bedeutung hat die Zentrifugalkraft bei der Bewegung von Planeten und Satelliten, sowie in der Technik beispielsweise bei Zentrifugen oder Zyklonen (Staubabschneider).



**Bild 2.14** Kräfte bei Drehungen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit:

- Zentrifugalkraft.
- Zur Berechnung der Corioliskraft. Im ruhenden System bewegt sich die Masse geradlinig. Im rotierenden System ist die Bahnspur eine gekrümmte Kurve

#### Beispiel 2.2.4 (a)

Wie groß ist die Zentrifugalkraft auf eine Masse  $m$  am Äquator? Wieviel Prozent von der Gewichtskraft ist die Zentrifugalkraft?

Die Zentrifugalkraft beträgt  $F_Z = m\omega^2 r$  mit  $\omega = 2\pi / T$  ( $r = 6,38 \cdot 10^6$  m = Erdradius,  $T = 24 \cdot 3600$  s = 1 Tag).

Die Gewichtskraft ist  $F_g = mg$ . Damit erhält man  $F_Z / F_g = r(4\pi^2)/(T^2 g) = 0,0034 = 0,34\%$ .

#### Beispiel 2.2.4 (a)

Bei einer Eisenbahnkurve sollen die Gleise so überhöht werden, dass die Kraft auf die Wagen senkrecht zum Gleiskörper gerichtet ist. Der Kurvenradius beträgt  $R = 1$  km und die Geschwindigkeit des Zuges  $v = 120$  km/h. Welchen Überhöhungswinkel  $\alpha$  müssen die Gleise haben?

Die am Wagen angreifende Kräfte sind die Zentrifugalkraft  $F_Z$  und die Gewichtskraft  $F_g$ .

Es gilt  $\tan \alpha = F_Z / F_g = mv^2 / (Rmg) = v^2 / (Rg)$  und  $\alpha = 6,5^\circ$ .

#### Corioliskraft

In rotierenden Systemen tritt noch eine zweite Trägheitskraft auf, die nach ihrem Entdecker Coriolis benannt ist. Sie wirkt nur auf bewegte Körper. In der Technik hat sie wenig Bedeutung. Wichtig ist die Corioliskraft in der Meteorologie bei der Entstehung von Windsystemen.

Eine Kreisscheibe (oder die Erde) rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Wie in Bild 2-14b gezeigt, wird eine Masse  $m$  in radialer Richtung mit der Geschwindigkeit  $v$  geworfen. Für einen ruhenden Beobachter außerhalb des rotierenden Systems (im Inertialsystem) bewegt sich die Kugel geradlinig und die Scheibe dreht sich unter der Masse weg. Die Spur der Masse auf der Scheibe beschreibt eine gekrümmte Bahn. Ein Beobachter auf der Scheibe (oder der Erde) wird also feststellen, dass auf eine radial geworfene Masse eine Kraft wirkt, welche die beschriebene Krümmung oder Ablenkung verursacht.

Der bewegte Körper legt in radialer Richtung während der Zeit  $t$  die Strecke  $r = vt$  zurück. Der anfänglich angesteuerte Punkt am Kreisumfang hat sich inzwischen um die Strecke  $s = r\omega t = v\omega t^2$  weiterbewegt. Diese Abweichung wird durch die scheinbare Beschleunigung  $a_c$  verursacht:  $s = \frac{a_c}{2}t^2$ . Durch Vergleichen der letzten beiden Gleichungen erhält man:

$$a_c = 2v\omega. \quad (2.34a)$$

Die zu dieser Coriolis-Beschleunigung  $a_c$  gehörende Kraft nennt man die *Corioliskraft*  $F_c$ :

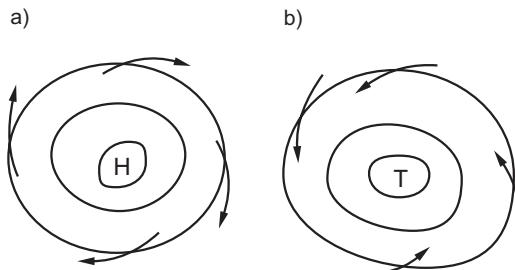
$$F_c = 2mv\omega. \quad (2.34b)$$

In dieser Gleichung ist  $v$  die radiale Geschwindigkeitskomponente (senkrecht zur Drehachse). Die Corioliskraft tritt immer auf, wenn sich Massen in kreisenden Systemen (z. B. Erde) radial nach außen bewegen; sie wirkt in tangentialer Richtung. Dagegen wirkt die Zentrifugalkraft auch auf „ruhende“ Massen in rotierenden Systemen. Sie zeigt in radialer Richtung.

### Corioliskraft und Meteorologie

Aus einem Hochdruckgebiet strömt die Luft zunächst in radialer Richtung in Bereiche niedrigen Druckes. Im rotierenden System der Erde wirkt auf die bewegten Luftmassen die Corioliskraft. Auf der Nordhalbkugel verursacht diese Kraft eine Abweichung nach rechts (Bild 2-15a). Dadurch wird die anfänglich radiale Luftströmung spiralförmig abgelenkt. Das Windsystem bei Tiefdruckgebieten ist im Bild 2-15b dargestellt.

Auch die globalen Windsysteme, wie die Passat- und Monsunwinde, werden durch die Corioliskraft aus ihrer ursprünglichen Süd-Nord-Richtung (oder Nord-Süd) nach Osten (oder Westen) umgelenkt. (Durch die permanenten Westwinde dauert der Flug New York-Europa eine Stunde weniger als in umgekehrter Richtung.). Weiterhin können Flüsse, Eisenbahnschienen und Lager feststehender Maschinen durch die Corioliskraft beeinflusst werden.



**Bild 2-15** Wirkung der Corioliskraft auf Windströmungen der Nordhalbkugel:

- a) Windsystem eines Hochdruckgebietes. Die zunächst radiale Luftströmung wird durch die Corioliskraft spiralförmig (nach rechts) abgelenkt.
- b) Windsystem eines Tiefdruckgebietes

### Foucault'sches Pendel

Ein interessanter Versuch zum Nachweis der Erddrehung kann mit einem reibungsfrei gelagerten Pendel durchgeführt werden. Die Erde bewegt sich unter dem schwingenden Pendel weg. Daher dreht sich die Schwingungsebene auf der Erde. Die Drehung der Pendel wird durch die Corioliskraft beschrieben.

## 2.3 Arbeit, Energie und Leistung

### 2.3.1 Arbeit

Zum Verschieben von Körpern benötigt man in der Regel eine Kraft und es wird Arbeit verrichtet. Die Berechnung der Arbeit  $W$  wird einfach, wenn die Kraft  $\vec{F}$  konstant bleibt. Für diesen Fall ist die Arbeit  $W$  durch das skalare Produkt aus Kraft  $\vec{F}$  und dem zurückgelegten Weg  $\vec{s}$  beschrieben:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad [W] = \text{Nm} = \text{J (Joule)} = \text{Ws.} \quad \text{Arbeit } W \quad (2.35a)$$

Bild 2-16 zeigt die Fortbewegung eines Gegenstandes unter dem Einfluss einer Kraft  $\vec{F}$ . Der zurückgelegte Weg  $\vec{s}$  schließt den Winkel  $\varphi$  mit  $\vec{F}$  ein. Für die Arbeit ist nur die Kraftkomponente in Richtung des Weges  $\vec{s}$  von Bedeutung. Die verrichtete Arbeit  $W$  beträgt:

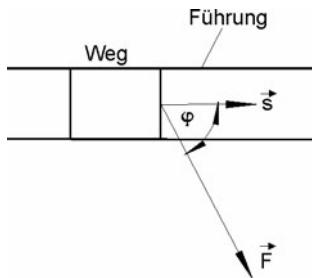
$$W = F s \cos \varphi. \quad \text{Arbeit } W \quad (2.35b)$$

Diese Gleichung ist mit der vektoriellen Schreibung (2.35a) identisch. Ändert sich die Kraft  $\vec{F}$  oder die Richtung des zurückgelegten Weges  $\vec{s}$ , kann die Berechnung der Arbeit zunächst nur für kurze Wegelemente  $d\vec{s}$  erfolgen:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (2.35c)$$

Die gesamte Arbeit bei Verschiebung von der Stelle 1 nach 2 wird durch Integration gewonnen:

$$W = \int_1^2 dW = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (2.35d)$$



**Bild 2-16**

Begriff der Arbeit:  $W = F s \cos \varphi = \vec{F} \cdot \vec{s}$

### 2.3.2 Energie

Durch Arbeit wird die Energie eines Systems verändert. In der reibungsfreien Mechanik stellt Energie gespeicherte Arbeit dar. Die Einheiten von Arbeit und Energie sind gleich.

#### Kinetische Energie $E_{kin}$

Der Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie wird an einem einfachen Beispiel deutlich. Wirkt auf einen Körper längs des Weges  $s$  die Kraft  $F$ , beträgt die verrichtete Arbeit  $W = Fs$ , sofern  $F$  und  $s$  parallel gerichtet sind. Im reibungsfreien Fall erreicht der Körper die Geschwindigkeit  $v$ . Dadurch hat er die Fähigkeit gewonnen, Arbeit zu verrichten, d. h. er hat

Energie gespeichert. Diese Bewegungsenergie nennt man *kinetische Energie*  $E_{kin}$ . Sie ergibt sich aus  $E_{kin} = W = Fs$  sowie einigen elementaren Gleichungen der beschleunigten Bewegung ( $F = ma$ ,  $s = at^2/2$  und  $a = v/t$ ) zu:

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} \quad [E_{kin}] = J = Ws . \quad \text{Kinetische Energie } E_{kin} \quad (2.36)$$

Eine Masse  $m$  mit der Geschwindigkeit  $v$  besitzt die kinetische Energie  $E_{kin} = mv^2 / 2$ .

### Beispiel 2.3.2 (a)

Ein Kfz mit der Masse  $m = 900$  kg und der Geschwindigkeit  $v = 100$  km/h besitzt die kinetische Energie von  $E_{kin} = mv^2 / 2 = 347222$  J (oder Ws).

### Potenzielle Energie $E_{pot}$

Unter der potenziellen Energie  $E_{pot}$  versteht man die Fähigkeit eines Körpers, auf Grund seiner Lage Arbeit zu verrichten. Diese Energieform tritt beim Heben einer Masse  $m$  auf die Höhe  $h$  auf. Zum Heben einer Masse  $m$  muss mindestens die Kraft  $F = mg$  wirken. Dabei ist die Hubarbeit  $W = Fh = mgh$  erforderlich, welche gleich der potenziellen Energie  $E_{pot}$  ist:

$$E_{pot} = mgh \quad [E_{pot}] = J = Ws . \quad \text{Potenzielle Energie } E_{pot} \quad (2.37)$$

Eine Masse  $m$  besitzt in der Höhe  $h$  die potenzielle Energie  $E_{pot} = mgh$ .

### Beispiel 2.3.2 (b)

Mit der Energie von 347222 J (aus Beispiel 2.3.2 (a)) kann das Kfz mit der Masse von  $m = 900$  kg auf die Höhe  $h$  gerollt werden. Berechnung von  $h$ : Aus  $E_{pot} = mgh$  folgt  $h = E_{pot} / mg = 39,3$  m.

### Elastische Energie $E_e$

Bei der elastischen Deformation einer Feder oder eines anderen Körpers muss Arbeit aufgewendet werden, die als Energie gespeichert wird. Man berechnet die *elastische Energie*  $E_e$  mit (2.29) und (2.35d) ( $F$  = Kraft,  $s$  = zurückgelegter Weg,  $c$  = Federkonstante):

$$E_e = \int_0^s F ds = \int_0^s cs ds = \frac{cs^2}{2} . \quad \text{Elastische Energie } E_e \quad (2.38)$$

$$[E_e] = J = Ws .$$

Man kann diese Energieform auch zur *potenziellen Energie* zählen, da sie nur von der Ortskoordinate  $s$  abhängt.

### Beispiel 2.3.2 (c)

Ein Waggon ( $m = 40$  t) rollt mit  $v = 15$  km/h gegen einen Puffer und drückt dessen Federn um  $s = 5$  cm zusammen. Wie groß ist die Federkonstante  $c$  der beiden Federn?

Die kinetische Energie wird in elastische Energie umgewandelt:  $E_{kin} = E_e$  oder  $\frac{mv^2}{2} = \frac{cs^2}{2}$ .

$$\text{Daraus folgt: } c = \frac{mv^2}{s^2} = 2,78 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}} .$$

Da es sich um zwei parallel geschaltete Federn handelt, gilt für jede Feder der halbe Wert.

### 2.3.3 Leistung

Unter der Leistung  $P$  versteht man die pro Zeitintervall  $dt$  verrichtete Arbeit  $dW$ :

$$P = \frac{dW}{dt} \quad [P] = \text{W} = \text{Watt}. \quad \text{Leistung } P \quad (2.39\text{a})$$

Für die Einheit ergibt sich  $[P] = \text{W} = \text{Watt} = \text{J/s}$ . Für eine konstante Leistung  $P = \text{const.}$  kann man die einfache Gleichung verwenden:

$$P = \frac{W}{t} \quad [P] = \text{W} = \text{Watt}. \quad \text{Leistung } P \quad (2.39\text{b})$$

Die Leistung  $P$  kann auch durch die Kraft  $F$  und die Geschwindigkeit  $v$  ausgedrückt werden:

$$P = F v. \quad \text{Leistung } P \quad (2.39\text{c})$$

Diese Beziehung folgt aus (2.39a), (2.35a) und aus  $v = ds/dt$ .

#### Beispiel 2.3.3 (a)

Eine Lichtquelle hat eine Leistung von  $P = 15 \text{ W}$ . Was kostet ein Betrieb von 24 Stunden bei einem Preis von  $0,2 \text{ €/kWh}$ ?

Die umgesetzte Energie ist  $W = Pt = 15 \times 24 \text{ Wh} = 360 \text{ Wh} = 0,36 \text{ kWh}$ . Der Preis beträgt: Preis =  $0,36 \text{ kWh} \times 0,2 \text{ €/kWh} = 0,072 \text{ €}$ .

#### Beispiel 2.3.3 (b)

Die Leistung einer Wasserturbine bei einem Stausee beträgt  $P = 11 \text{ MW}$ . Die Höhe beträgt  $h = 8 \text{ m}$ . Wieviel  $\text{m}^3$  pro Sekunde fließen durch die Turbine?

Es gilt:  $P = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t}$ . Daraus folgt:  $\frac{m}{t} = \frac{P}{gh} = \frac{11 \cdot 10^6}{9,81 \cdot 8} \frac{\text{Ws}^2}{\text{m}^2} = 140163 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ . Das entspricht  $140,163 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ .

#### Beispiel 2.3.3 (c)

Der Motor eines Krans hat eine Leistung von  $P = 10 \text{ kW}$ . Welche Masse  $m$  kann er in  $t = 2 \text{ Minuten}$  auf eine Höhe  $h = 30 \text{ m}$  heben?

$P = \frac{mgh}{t}$ . Daraus folgt:  $m = \frac{Pt}{gh} = 4077 \text{ kg}$ .

### 2.3.4 Energieerhaltung

Es ist eine Erfahrung, dass Energie weder verschwindet noch aus dem Nichts entsteht, wohl aber von einer Energieform in eine andere umgewandelt werden kann. Diese als *Energieerhaltungssatz* bezeichnete Erkenntnis kann man auch so formulieren:

In einem abgeschlossenen System bleibt die Summe aller Energien  $E_{\text{gesamt}}$  erhalten.

Ein abgeschlossenes System ist dadurch gekennzeichnet, dass es von außen keine Energie aufnimmt oder abgibt. In einem abgeschlossenen mechanischen System ohne Reibung gilt also:

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_{\text{gesamt}} = \text{const.} \quad \text{Energieerhaltung} \quad (2.40\text{a})$$

Diese spezielle Formulierung des Energiesatzes gilt nur für so genannte *konservative Kräfte*. Dazu zählen die Gewichtskraft und elastische Kraft, die nur zur kinetischen ( $E_{\text{kin}}$ ) oder poten-

ziellen ( $E_{pot}$ ) Energie führen. Reibungsvorgänge und nichtelastische Verformung werden durch *nichtkonservative Kräfte* oder *dissipative Kräfte* verursacht, die zur Reibungsenergie  $E_r$  führen. Der Energiesatz nimmt in der Mechanik folgende Form an:

$$E_{kin} + E_{pot} + E_r = E_{gesamt} = \text{const.} \quad \text{Energieerhaltung} \quad (2.40b)$$

Dissipative Kräfte führen letztendlich zu Wärmeenergie. Der Energiesatz in der Wärmelehre führt zum 1. Hauptsatz der Wärmelehre (Abschnitt 5.3.2). Sind noch andere Energieformen vorhanden, wie Wärme, elektrische Energie, Strahlung, chemische Energie, müssen diese in obige Gleichungen mit eingefügt werden.

#### Beispiel 2.3.4(a)

Ein Kfz rollt mit  $v = 50 \text{ km/h}$  antriebslos einen Berg hoch (ohne Reibung). Welche Höhe  $h$  erreicht es?

Die Energieerhaltung hat zur Folge:  $E_{pot} = E_{kin}$  oder  $mgh = mv^2 / 2$ . Es folgt:  $h = v^2 / 2g = 9,83 \text{ m}$ .

#### Beispiel 2.3.4 (b)

Eine senkrecht gestellte Schraubenfeder (Federkonstante  $c = 2,0 \text{ N/cm}$ ) wird um  $s = 15 \text{ cm}$  zusammengedrückt. Auf der Feder befindet sich eine Masse von 80 g. Wie hoch springt die Kugel, wenn sich die Feder plötzlich entspannt?

Die Energieerhaltung hat zur Folge:  $E_{pot} = E_e$  oder  $mgh = cs^2 / 2$ . Es folgt:  $h = cs^2 / 2mg = 2,87 \text{ m}$ . Prüfen der

Einheiten:  $[h] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}} = \text{m}$

## 2.4 Impuls

Der Impuls  $\vec{p}$  und sein Zusammenhang mit der Kraft  $\vec{F}$  wurde bereits mit dem zweiten Newton'schen Axiom eingeführt:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \text{und} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad \begin{array}{l} \text{Impuls } \vec{p} \\ \text{u. 2.26} \end{array} \quad (2.25c)$$

#### Beispiel 2.4 (a)

Eine Person drückt ein Boot ( $m = 500 \text{ kg}$ ) mit einer konstanten Kraft von  $F = 75 \text{ N}$  über  $t = 5 \text{ s}$  von einem Steg ab. Wie groß sind der Impuls  $p$  und die Geschwindigkeit  $v$  des Bootes?

Der Zusammenhang zwischen Kraft und Impuls lautet:  $F = dp/dt = p/t$ .

Daraus folgen:  $p = Ft = 375 \text{ Ns}$  und  $v = p/m = 0,75 \text{ m/s}$ .

### 2.4.1 Impulserhaltung

Ein weiterer wichtiger Erhaltungssatz ist der Impulssatz. Nach dem ersten Newton'schen Axiom bleibt im kräftefreien Zustand die Geschwindigkeit und damit auch der Impuls einer Masse konstant. Darüber hinaus gilt für ein abgeschlossenes System vieler Teilchen, d. h. ohne Wirkung äußerer Kräfte, der *Impulserhaltungssatz*:

*In einem abgeschlossenen System bleibt der Gesamtimpuls  $\vec{p}_{gesamt}$  erhalten:*

$$\sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_{gesamt} = \text{const.} \quad \text{Impulserhaltung} \quad (2.41)$$

Anders als beim Energieerhaltungssatz handelt es sich um eine Vektorsumme.

**Beispiel 2.4.1 (a)**

Ein Düsenmotor stößt beim Start eines Flugzeugs ( $m_F = 10000$  kg) eine Treibstoffmasse von  $m_T = 1000$  kg mit einer Geschwindigkeit von  $v_T = 400$  m/s aus. Welche Geschwindigkeit erreicht das Flugzeug?

Der Impuls des Flugzeugs ist gleich dem Impuls der Treibstoffmasse:  $m_F v_F = m_T v_T$  und  $v_F = m_T v_T / m_F = 40$  m/s. (In der Rechnung wird nicht berücksichtigt, dass das Flugzeug seine Masse durch den verbrannten Treibstoff an Masse verringert.)

**Beispiel 2.4.1 (b)**

Ein Waggon (Masse  $m$ ) rollt mit der Geschwindigkeit  $v$  gegen einen ruhenden Waggon (auch Masse  $m$ ) und kuppelt ein, so dass beide Waggons gemeinsam weiter rollen. Wie groß ist die Geschwindigkeit  $v'$ ?

Beim Einkuppeln wird kinetische Energie in Wärme umgewandelt, so dass die kinetische Energie verändert wird. Dagegen bleibt bei diesem Vorgang der Impuls erhalten:  $mv = 2mv'$  und  $v' = v/2$ .

**Beispiel 2.4.1 (c)**

Obige Aufgabe wird verändert: Ein Waggon 1 (Masse  $m$ ) rollt mit der Geschwindigkeit  $v$  gegen einen ruhenden Waggon 2 (auch Masse  $m$ ) und stößt ihn an ohne einzukuppeln. Wie groß ist die Geschwindigkeit beider Waggons nach dem Stoß  $v_1'$  und  $v_2'$ ?

Bei diesem elastischen Stoß bleiben die kinetische Energie und der Impuls erhalten:  $mv^2/2 = mv_1'^2/2 + mv_2'^2/2$  und  $mv = mv_1' + mv_2'$ . Daraus folgen:  $v^2 = v_1'^2 + v_2'^2$  und  $v = v_1' + v_2'$ . Man kann überprüfen, dass beide Gleichungen gültig sind, wenn  $v_1' = 0$  und  $v = v_2'$  ist. Das bedeutet, dass Waggon 1 stehen bleibt und seine Geschwindigkeit auf Waggon 2 überträgt.

## 2.4.2 Schwerpunkt

Der *Massenmittelpunkt* oder *Schwerpunkt* eines Systems verschiedener Massenpunkte  $m_1, m_2, \dots$  kann durch den Ortsvektor  $\vec{r}_s$  definiert werden:

$$\vec{r}_s = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots}{m} \quad (2.42)$$

Die gesamte Masse beträgt  $m = m_1 + m_2 + \dots$ ;  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$  stellen die Ortsvektoren der einzelnen Massen dar. Differenziert man diese Gleichung, erhält man die Geschwindigkeit des Schwerpunktes  $\vec{v}_s$ :

$$\vec{v}_s = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots}{m} = \frac{\vec{p}}{m} \quad \text{oder} \quad \vec{p} = m \vec{v}_s \quad (2.43)$$

wobei  $\vec{p}$  den gesamten Impuls angibt. Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes  $\vec{v}_s$  und die gesamte Masse  $m$  bestimmen den Impuls. Durch nochmaliges Differenzieren ergibt sich:

$$\vec{F} = m \vec{a}_s = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.44)$$

Der Schwerpunkt eines Systems bewegt sich so, als sei die gesamte Masse darin vereinigt und als griffen die äußeren Kräfte im Schwerpunkt an (Schwerpunktsatz).

## 2.4.3 Stoßgesetze

Durch Anwendung des Impuls- und Energieerhaltungssatzes können viele mechanische Probleme gelöst werden. Ein wichtiges Beispiel ist der Stoß zwischen zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$ . Beim geraden, zentralen Stoß spielt sich die Bewegung auf der Verbindungsgeraden zwischen den beiden Massen ab; anders ist dies beim schiefen Stoß. Man nennt einen Stoß *elastisch*, wenn keine Reibung- oder Deformationsenergie auftritt, andernfalls ist der Stoß *inelastisch*.

### Gerader, elastischer Stoß

Beim geraden, zentralen Stoß bewegen sich die Massen  $m_1$  und  $m_2$  auf einer Geraden; Rotationen treten nicht auf. Die Summe der Impulse verändert sich beim Stoß nicht. Da die Impulsvektoren gleiche Richtung besitzen, kann der Impulserhaltungssatz skalar geschrieben werden:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 .$$

Die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß sind  $v_1, v_2$  bzw.  $u_1, u_2$ . Der Impulssatz allein genügt offenbar nicht zur Berechnung des Vorganges, da zwei Unbekannte  $u_1$  und  $u_2$  auftreten. Für den Energieerhaltungssatz bei *elastischen Stößen* gilt:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Aus beiden Gleichungen können die Unbekannten  $u_1$  und  $u_2$  bestimmt:

$$u_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad u_1 = \text{entsprechend mit vertauschten Indizes.}$$

### Gerader, inelastischer Stoß

Beim *inelastischen Stoß* wird kinetische Energie in Reibungs- oder Deformationsarbeit  $\Delta W$  umgewandelt. Der oben formulierte Energiesatz muss modifiziert werden:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} + \Delta W.$$

Der Impulssatz in zuletzt zitiert Form behält weiter seine Gültigkeit. Nach dem Stoß tritt neben  $u_1$  und  $u_2$  eine weitere Unbekannte  $\Delta W$  auf, so dass eine Lösung ohne zusätzliche Information nicht möglich ist.

Ein spezieller Sonderfall liegt vor, wenn die beiden Körper nach dem Stoß mit einander verkoppelt bleiben und sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen ( $u = u_1 = u_2$ ). Nach dem Impulserhaltungssatz gilt:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u.$$

Aus dieser Gleichung kann  $u$  bestimmt werden. Durch Einsetzen in den Energiesatz ist der Energieverlust  $\Delta W$  für diesen Sonderfall berechenbar.

## 2.5 Dynamik der Rotation

### 2.5.1 Energie und Trägheitsmoment

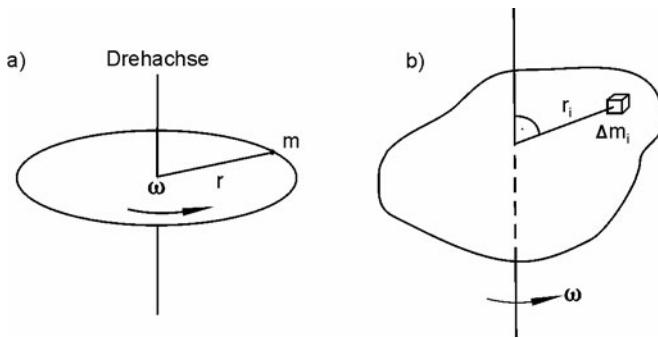
Auf den vorangehenden Seiten wurde die Dynamik der geradlinigen Bewegung erörtert. Von großer technischer Bedeutung sind auch Drehbewegungen, zu deren Beschreibung eine Reihe von Begriffen, wie *Drehmoment*, *Drehimpuls*, *Trägheitsmoment*, eingeführt werden. Bei Rotationen tritt das zusätzliche Problem auf, dass nicht nur die Masse sondern auch deren räumliche Verteilung eine Rolle spielt. Beispielsweise haben zwei Schwungräder gleicher Masse mit verschiedenen Radien unterschiedliches Verhalten. Dieses hängt mit dem Begriff Trägheitsmoment zusammen, der im Folgenden untersucht wird.

#### Rotationsenergie $E_{rot}$ (Massenpunkt)

In rotierenden Massen, z. B. Schwungrädern, ist kinetische Energie gespeichert, die man *Rotationsenergie* nennt. In diesem Abschnitt werden Drehungen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  betrachtet. Für einen Massenpunkt der Masse  $m$ , der auf einem Kreis mit dem Radius  $r$  rotiert, kann die Rotationsenergie berechnet werden (Bild 2-17a):

$$E_{rot} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mr^2\omega^2}{2} \quad [E_{rot}] = J = Ws. \quad \text{Rotationsenergie } E_{rot} \quad (2.45)$$

$v$  gibt die Bahngeschwindigkeit an und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit.

**Bild 2-17** Zur Berechnung der Energie rotierender Massen:

- a) Punktförmige Masse
- b) Ausgedehnter Körper, Massenträgheitsmoment

### Rotationsenergie $E_{rot}$ (Körper)

In der Natur existieren keine Massenpunkte. Zur Berechnung der Rotationsenergie eines ausgedehnten Körpers wird Bild 2-17b benutzt. Der Körper rotiert um seine Drehachse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Gleichung 2.45 ist nicht anwendbar, da der Gegenstand nicht durch einen einheitlichen Radius  $r$  gekennzeichnet ist. Zur Berechnung der Energie zerlegt man das Volumen eines Körpers in möglichst viele Massenelemente  $\Delta m_i$ , die jeweils den Abstand  $r_i$  von der Drehachse aufweisen. Für jedes Massenelement gilt:

$$\Delta E_i = \frac{\Delta m_i r_i^2 \omega^2}{2}.$$

$\Delta E_i$  stellt die Rotationsenergie des Elementes  $\Delta m_i$  dar. Die Gesamtenergie des Körpers erhält man durch Summation über alle Werte  $i$ :

$$\Delta E_{rot} = \sum_i \Delta E_i = \frac{\omega^2}{2} \sum_i r_i^2 \Delta m_i. \quad (2.46a)$$

Bei sehr feiner Unterteilung des Körpers in Massenelemente wird aus der Summe ein Integral:

$$E_{rot} = \frac{\omega^2}{2} \int r^2 dm. \quad (2.46b)$$

Die Grenzen der Integration schließen den gesamten Körper ein.

### Massenträgheitsmoment $J$

Bei einem ausgedehnten Körper ist die Berechnung der Summe bzw. des Integrals oft kompliziert. Man führt die Abkürzung  $J = \int r^2 dm$  ein und schreibt für die Rotationsenergie:

$E_{rot} = J \frac{\omega^2}{2}$	$[E_{rot}] = J = Ws$	$\text{Rotationsenergie } E_{rot}$
----------------------------------	----------------------	------------------------------------

(2.47)

Man nennt die Größe  $J$  *Massenträgheitsmoment*, für welches keine einfache Gleichung angegeben werden kann:

J siehe Tabelle 2.5 [J] = kg m <sup>2</sup> .	Massenträgheitsmoment J	(2.48a)
-----------------------------------------------	-------------------------	---------

Die kinetische Energie  $E_{kin}$  der gradlinigen Bewegung hat eine ähnliche Form wie die Rotationsenergie  $E_{rot}$  in (2.47):

$$E_{kin} = m \frac{v^2}{2} \quad [E_{kin}] = J = Ws. \quad \text{Kinetische Energie } E_{kin} \quad (2.36)$$

Ersetzt man in dieser Gleichung die Masse  $m$  durch das Trägheitsmoment  $J$  und die Geschwindigkeit  $v$  durch die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , erhält man die Rotationsenergie (2.47). Weitere Analogien zwischen geradliniger und kreisförmiger Bewegung sind in Tabelle 2.6 formuliert.

Die Berechnung der Trägheitsmomente verschiedener Körper ist meist schwierig:

$$J = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV = \int \int \int \rho r^2 dx dy dz \quad [J] = \text{kg m}^2. \quad (2.48b)$$

Der Zusammenhang zwischen der Masse  $m$  und dem Volumen  $V$  ist durch die Dichte  $\rho = m/V$  gegeben. In Tabelle 2.5 sind die Trägheitsmomente einiger Körper aufgeführt. Man beachte, dass bei der Angabe auch die Drehachse festgelegt werden muss. Ändert sich die Drehachse, so ändert sich auch das Trägheitsmoment (siehe: Steiner'scher Satz). Bei komplizierten Körpern, die sich aus geometrisch einfacheren Teilen zusammensetzen, kann das Trägheitsmoment in einzelne Summanden zerlegt werden. Das Trägheitsmoment eines Körpers ist gleich der Summe der Trägheitsmomente der Teile in Bezug auf dieselbe Drehachse.

**Tabelle 2.5** Massenträgheitsmomente  $J$  für verschiedene Körper

Körper	Drehachse	Trägheitsmoment $J$
Massenpunkt	Abstand $r$	$m r^2$
Hohlzylinder, Wanddicke $\ll r$ ( $r$ = Radius, $l$ = Länge)	Längsachse Senkrecht zur Längsachse, Mitte	$m r^2$ $m (2r^2 + l^2/3)/4$
Vollzylinder ( $r$ = Radius, $l$ = Länge)	Längsachse Senkrecht zur Längsachse, Mitte	$m r^2/2$ $m r^2/4 + ml^2/12$
Kugel ( $r$ = Radius)	Schwerpunkt	$2m r^2/5$
Dünner Stab ( $l$ = Länge)	senkrecht zur Stabmitte	$m l^2/12$
Quader (Volumen = $x \cdot y \cdot z$ )	$x$ -Richtung durch Schwerpunkt	$m (y^2 + z^2)/12$

## Verschiedene Drehachsen

Nach dem *Steiner'schen Satz* kann man das Trägheitsmoment  $J$  für parallel liegende Achsen berechnen, wenn das Trägheitsmoment bei Drehung  $J_S$  um die Schwerpunktsachse bekannt ist. Man denkt sich in diesem Fall die Drehbewegung aus zwei Anteilen zusammengesetzt. Zum einen findet eine Rotation des Schwerpunkts statt, in dem die Masse vereint ist. Des Weiteren rotiert der Körper um den Schwerpunkt mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit. Das Trägheitsmoment  $J$  besteht somit aus zwei Summanden:

$$J = J_S + mr_S^2. \quad \text{Steiner'scher Satz} \quad (2.49)$$

$r_S$  gibt den Abstand zwischen dem Schwerpunkt und der Drehachse an. Es existieren unendlich viele Achsen durch den Schwerpunkt, die zu verschiedenen Trägheitsmomenten  $J$  führen. Der Satz von Steiner erlaubt die Berechnung bei Parallelverschiebung einer Drehachse.

## Hauptträgheitsachsen

Jeder Körper besitzt zwei zueinander senkrechte Achsen durch den Schwerpunkt, von denen eine zum größten, die andere zum kleinsten Trägheitsmoment gehört. Zusammen mit einer dritten Achse, die auf den beiden anderen senkrecht steht, werden drei Hauptträgheitsachsen gebildet. Jede Symmetriechse ist auch Hauptträgheitsachse. Durch Angabe der Trägheitsmomente um diese Achsen, kann das Trägheitsmoment für beliebige Drehrichtungen berechnet werden kann (Tensorrechnung).

### Beispiel 2.5.1 (a)

Ein Schwungrad in Form einer Vollscheibe hat eine Masse von  $m = 1000 \text{ kg}$  und einen Radius von  $r = 2 \text{ m}$ . Wie groß muss die Drehzahl sein, damit eine Energie von  $W = 5 \text{ kWh}$  gespeichert wird.

Die Rotationsenergie beträgt  $E_{rot} = J\omega^2 / 2$  mit  $J = mr^2 / 2$  (Tabelle 2.5 für Vollzylinder) und  $\omega = 2\pi n$ . Daraus

$$\text{folgt: } E_{rot} = mr^2\pi^2n^2 \text{ und } n = \sqrt{E_{rot} / (mr^2\pi^2)} = 21,35 \text{ s}^{-1}. \text{ Prüfen der Einheiten: } [h] = \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2}} = \frac{1}{\text{s}}$$

### Beispiel 2.5.1 (b)

Welches Massenträgheitsmoment  $J_S$  hat eine Kugel mit dem Radius  $r$  und der Masse  $m$ , welche an einer Schnur der Länge  $l$  im Kreis geschwungen wird.

Das Massenträgheitsmoment einer Kugel beträgt nach Tabelle 2.5:  $J = 2mr^2 / 5$ . Die Drehachse ist um  $l$  verschoben und nach dem Steiner'schen Satz gilt:  $J_S = 2mr^2 / 5 + ml^2$ .

## 2.5.2 Drehmoment

In Autoprospekten wird neben der Leistung das *Drehmoment* des Motors angegeben, das eine wichtige technische Größe bei Drehbewegungen darstellt.

### Drehmoment $M$

Um ein Rad oder einen Körper in Rotation zu versetzen, ist eine Kraft erforderlich, die z. B. mit Hilfe von Zahnrädern oder Treibriemen übertragen wird. Die Kraft muss eine Komponente in tangentialer Richtung besitzen, da die Bahnbeschleunigung die gleiche Richtung aufweist. Die Wirkung der Kraft  $F$  hängt davon ab, in welchem Abstand  $r$  von der Drehachse sie angreift: die Wirkung wird durch das Produkt  $Fr$  bestimmt. Man bezeichnet deshalb diese Größe als *Drehmoment*  $M$ :

$$M = rF \quad [M] = \text{Nm}$$

$$\text{Drehmoment } M \quad (2.50a)$$

Es ist zu beachten, dass  $F$  die tangentiale Komponente der Kraft darstellt.

## Wirkung des Drehmoments

Die Wirkung eines Drehmoments wird zunächst an einem Massenpunkt dargelegt, der sich auf einer Kreisbahn bewegt. Die tangentiale Kraft  $F$  und die Bahnbeschleunigung  $a$  hängen wie folgt zusammen:

$$F = ma.$$

Die Bahnbeschleunigung  $a$  lässt sich nach (2.24) durch die Winkelbeschleunigung  $\alpha$  ausdrücken:

$$a = r \alpha. \quad \text{Man ersetzt } a \text{ und erhält: } F = mr \alpha.$$

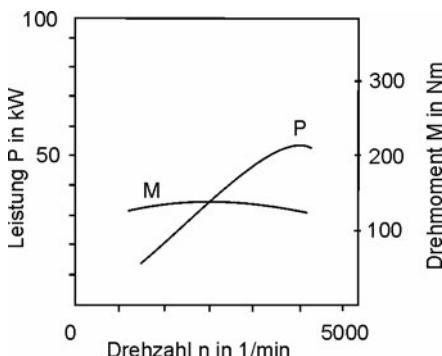
Multipliziert man beide Seiten mit  $r$ , ergibt sich mit  $M = Fr$ :

$$M = Fr = mr^2 \alpha. \quad (2.51)$$

Auf der rechten Seite steht das Trägheitsmoment  $J = mr^2$  für einen Massenpunkt. Damit erhält man folgende Gleichung, die als Wirkung eines Drehmoments  $M$  eine Winkelbeschleunigung  $\alpha$  aufzeigt:

$M = J \alpha \quad [M] = \text{Nm}.$	Drehmoment $M$ <span style="float: right;">(2.52)</span>
---------------------------------------	----------------------------------------------------------

Die Winkelbeschleunigung  $\alpha$  ist also vom Drehmoment  $M$  und vom Trägheitsmoment  $J$  abhängig. Diese Beziehung wurde für einen Massenpunkt abgeleitet, sie ist jedoch ebenso für ausgedehnte Massenverteilungen gültig.



**Bild 2-18**  
Verlauf des Drehmomentes und der Leistung am Beispiel eines Automotors

## Drehmoment und Leistung

In Bild 2-18 sind Drehmoment und Leistung eines Automotors dargestellt. Leistung und Drehmoment ändern sich mit der Drehzahl. (Das Drehmoment sollte für einen Motor eines Fahrzeugs möglichst wenig von der Drehzahl abhängen, damit auch bei kleinen Drehzahlen eine gute Beschleunigung erreicht wird.)

Im Folgenden wird der Zusammenhang zwischen Drehmoment  $M$  und Leistung  $P$  abgeleitet. Nach (2.35) gilt für die Arbeit:

$$dW = Fds,$$

sofern  $F$  und  $ds$  parallel gerichtet sind. Bei der Drehung beträgt der zurückgelegte Weg  $s = r\varphi$  oder

$$ds = rd\varphi.$$

Dies setzt man oben ein und erhält mit  $M = Fr$ :

$$dW = Frd\varphi = M d\varphi.$$

Die Leistung ist definiert als  $P = dW/dt$ . Mit  $\omega = d\phi/dt$  erhält man:

$$P = M \frac{d\phi}{dt} = M\omega. \quad \text{Leistung } P \text{ und Drehmoment } M \quad (2.53)$$

In Bild 2-18 kann mit  $P = M\omega$  aus der Leistungskurve die Drehmomentenkurve berechnet werden und umgekehrt.

### Getriebe

Motoren werden zur Änderung der Drehzahl mit Getrieben ausgerüstet. Bei Vernachlässigung der Verluste bleibt die übertragene Leistung konstant. Damit folgt aus (2.53), dass eine Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  eine Verringerung des Drehmomentes  $M$  zur Folge hat. Ein Getriebe kann somit als *Drehmomentenwandler* bezeichnet werden.

#### Beispiel 2.5.2 (a)

Ein Automotor hat bei einer Drehzahl von  $n = 4000 \text{ 1/min}$  ein Drehmoment von  $M = 200 \text{ Nm}$ .

Daraus kann die Leistung  $P$  berechnet werden:  $P = M\omega = M2\pi n = 83,8 \text{ kW}$ .

#### Beispiel 2.5.2 (b)

Welche Kraft  $F$  wirkt auf einen Drehmomentenschlüssel mit dem Hebelarm von  $r = 0,4 \text{ m}$ , wenn ein Drehmoment von  $M = 50 \text{ Nm}$  angezeigt wird?

Die Kraft  $F$  beträgt:  $F = M/r = 125 \text{ N}$ .

#### Beispiel 2.5.2 (c)

Ein Elektromotor hat ein Drehmoment von  $M = 1 \text{ Nm}$ . Wie groß ist die Winkelbeschleunigung  $\alpha$  einer angeschaubten Schleifscheibe beim Anlaufen, wenn das Massenträgheitsmoment  $J = 0,01 \text{ kgm}^2$  beträgt. In welcher Zeit wird eine Drehzahl von  $n = 10 \text{ s}^{-1}$  erreicht?

Die Winkelbeschleunigung beträgt:  $\alpha = M/J = 100 \text{ s}^{-2}$  mit  $\omega = 2\pi n = \alpha t$ . Die Zeit beträgt  $t = 2\pi n / \alpha = 0,628 \text{ s}$ .

## 2.5.3 Drehimpuls

Bisher wurden zwei grundlegende Naturgesetze in Form von Erhaltungssätzen beschrieben: der *Energie- und Impulssatz*. Bei der Untersuchung von Drehbewegungen findet man einen dritten Erhaltungssatz: den *Drehimpulssatz*.

### Definition des Drehimpulses $L$

Eine Masse  $m$  mit der Geschwindigkeit  $v$  besitzt den Impuls  $p = mv$ . Entsprechend schreibt man einem Körper mit dem Trägheitsmoment  $J$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  einen Drehimpuls  $L$  zu (Tabelle 2.6):

$$L = J\omega. \quad \text{Drehimpuls } L \quad (2.54a)$$

Es sei daran erinnert, dass bei der kinetischen Energie und der Rotationsenergie die Gleichungen ineinander umgewandelt werden, indem  $v$  durch  $\omega$  und  $m$  durch  $J$  ersetzt wird. Man erhält formal den Drehimpuls  $L$  aus dem Impuls  $p$  durch die gleiche Substitution. Ein allgemeiner Vergleich zwischen geradliniger und kreisförmiger Bewegung ist in Tabelle 2.6 zusammengefasst.

### Drehimpuls $L$ (Massenpunkt)

Für eine punktförmige Masse auf einer Kreisbahn kann (2.54a) vereinfacht werden. Das Trägheitsmoment beträgt  $J = mr^2$ . Mit  $\omega = v/r$  erhält man für den Drehimpuls  $L$ :

$$L = rmv = r p .$$

Drehimpuls  $L$  (2.55)

### Erhaltung des Drehimpulses

Die Analogie zwischen Impuls  $p$  und Drehimpuls  $L$  zeigt sich auch darin, dass der Drehimpuls in abgeschlossenen Systemen erhalten bleibt:

*In einem abgeschlossenen System bleibt der Gesamtdrehimpuls  $L_{gesamt}$  konstant:*

$$L_{gesamt} = const.$$

Drehimpulserhaltung (2.56)

### Anwendungen

In der Technik sind die Konsequenzen des Drehimpulssatzes häufig erkennbar. Vor dem Start eines Hubschraubers ist der Drehimpuls null. Beginnt sich der Rotor rechts herum zu drehen, so dreht sich der Rumpf des Hubschraubers links herum. Der Drehimpuls des Rotors ( $\omega$  positiv) wird durch den Drehimpuls des Rumpfes ( $\omega$  negativ) kompensiert. Die Drehung des Rumpfes ist natürlich unerwünscht. Sie wird deshalb durch die Wirkung eines zusätzlichen Propellers verhindert. Ähnlich dreht sich eine eingeschaltete Bohrmaschine entgegengesetzt zum rotierenden Anker, wenn man sie nicht festhält.

### Änderung des Drehimpulses

Der Drehimpuls eines Systems ändert sich bei Wirkung äußerer Kräfte oder Drehmomente. Durch Differenzieren von (2.54a) ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\frac{dL}{dt} = M .$$

Drehimpuls und Drehmoment (2.57a)

Das Drehmoment  $M$  ist gleich der zeitlichen Änderung des Drehimpulses  $L$ . Die Gleichung steht in Analogie zum Newton'schen Grundgesetz  $dp/dt = F$  (2.25b).

#### Beispiel 2.5.3

An einem rotierenden Rad (Drehzahl  $n_1$ , Massenträgheitsmoment  $J$ ) wird ein gleiches Rad angekuppelt. Mit welcher Drehzahl  $n_2$  rotieren beide Räder?

Der Drehimpuls bleibt erhalten:  $L_1 = J_1 2\pi n_1 = 2J_1 2\pi n_2 = L_2$ . Daraus folgt  $n_2 = n_1 / 2$ .

### 2.5.4 Vergleich: geradlinige Bewegung und Drehbewegung

Es besteht eine Analogie zwischen den Gleichungen der geradlinigen und kreisförmigen Bewegung, die in Tabelle 2.6 zusammengefasst ist. Um die Drehbewegung zu beschreiben, ersetzt man in den Gleichungen der geradlinigen Bewegung folgende Begriffe: Weg  $s$  durch Winkel  $\varphi$ , Geschwindigkeit  $v$  durch Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , Beschleunigung  $a$  durch Winkelbeschleunigung  $\alpha$ , Masse  $m$  durch Massenträgheitsmoment  $J$ , Kraft  $F$  durch Drehmoment  $M$ , usw..

**Tabelle 2.6** Analogie zwischen geradliniger Bewegung und Drehbewegung

Translation	Gleichung	Einheit	Rotation	Gleichung	Einheit
Weg	$s$	m	Winkel	$j$	rad
Geschwindigkeit	$v = ds/dt$	m/s	Winkelgeschw.	$\omega = d\phi/dt$	rad/s = 1/s
Beschleunigung	$a = dv/dt$	m/s <sup>2</sup>	Winkelbeschl.	$\alpha = d\omega/dt$	rad/s <sup>2</sup> = 1/s <sup>2</sup>
Masse	$m$	kg	Trägheitsmom.	$J = \int r^2 dm$	kgm <sup>2</sup>
Kraft	$F = ma = dp/dt$	N = kgm/s <sup>2</sup>	Drehmoment	$M = Ja = dL/dt$	Nm
Elast. Kraft	$F = cs$	[c] = N/m	Elast. Moment	$M = D\phi$	[D] = Nm
Impuls	$p = mv$	kgm/s = Ns	Drehimpuls	$L = J\omega$	kgm <sup>2</sup> /s = Nms
Arbeit	$W = \int Fds$	Nm = J = Ws	Arbeit	$W = \int M d\phi$	Nm = J = Ws
Kin. Energie	$E = mv^2/2$	Nm = J	Kin. Energie	$E = J\omega^2/2$	Nm = J
Elast. Energie	$E = cs^2/2$	Nm = J	Elast. Energie	$E = D\phi^2/2$	Nm = J
Leistung	$P = dW/dt = Fv$	W = J/s	Leistung	$P = dW/dt = M\omega$	W = J/s

## 2.5.5 Vektorielle Formulierung

Eine Reihe von Größen der Drehbewegung sind Vektoren sind, z. B. Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ , Winkelbeschleunigung  $\vec{\alpha}$ , Drehmoment  $\vec{M}$ , Drehimpuls  $\vec{L}$ . Im Folgenden sollen einige Gleichungen zur Dynamik der Rotation präziser formuliert werden als bisher.

### Winkelgeschwindigkeit

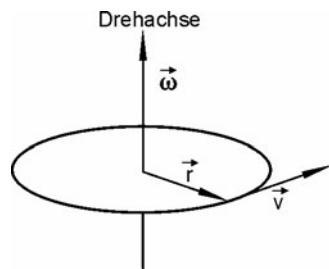
Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  kann aus der Tangentialgeschwindigkeit  $v$  und dem Radius  $r$  ermittelt werden:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} . \quad (2.58a)$$

Man kann die Winkelgeschwindigkeit als einen Vektor  $\vec{\omega}$  ansehen, dessen Richtung parallel zur Drehachse liegt. Bei einem rotierenden Massenpunkt steht  $\vec{\omega}$  senkrecht zum Radius  $\vec{r}$  und zur Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Gleichung 2.58a kann unter Berücksichtigung von Bild 2-19 als Vektorprodukt (Kreuzprodukt) geschrieben werden:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.58b)$$

In ähnlicher Weise wird die Winkelbeschleunigung  $\vec{\alpha}$  als Vektor dargestellt.



**Bild 2-19**  
Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  als Vektor

### Drehmoment

Die Überlegungen, die zum Vektorbegriff bei der Winkelgeschwindigkeit führen, sind auch beim Drehmoment anwendbar. Das Drehmoment stellt einen Vektor mit einer Richtung parallel zur Drehachse dar. Analog zur Winkelgeschwindigkeit wird somit aus der skalaren Gleichung  $M = rF$  eine Vektorgleichung formuliert:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} . \quad (2.50b)$$

Durch diese Gleichung ist erstens sichergestellt, dass das Drehmoment  $\vec{M}$  senkrecht zu  $\vec{r}$  und  $\vec{F}$  steht. Zweitens wird erreicht, dass durch das Vektorprodukt nur die Kraftkomponente senkrecht zum Radius  $\vec{r}$  zur Wirkung kommt, d. h. die Tangentialkraft.

### Kräftepaar

Kräfte, die an einem starren Körper angreifen, sind Vektoren und damit 'linienflüchtig'; sie können beliebig längs ihrer Wirkungslinie verschoben werden. Der Begriff 'Angriffspunkt' hat demnach keine Bedeutung. Als *Kräftepaar* bezeichnet man zwei gleich große, aber entgegengesetzte Kräfte  $+\vec{F}$  und  $-\vec{F}$ , der Abstand der Wirkungslinien sei  $\vec{s}$ . Die Resultierende der Kräfte ist null und es erfolgt keine Translationsbewegung. Allerdings entsteht ein Drehmoment  $\vec{M}$ , das eine Rotation um den Schwerpunkt zur Folge hat:

$$\vec{M} = \vec{s} \times \vec{F} \quad \text{oder} \quad \vec{M} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}. \quad (2.59)$$

Die Angriffspunkte der Kräfte, die beliebig auf den Wirkungslinien wählbar sind, werden mit den Ortsvektoren  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  bezeichnet. Die Gleichgewichtsbedingung der Statik fordert, dass die Summe der Kräfte ( $\sum \vec{F} = 0$ ) aber auch die Summe der Drehmomente oder Kräftepaare ( $\sum \vec{M} = 0$ ) gleich Null ist.

### Drehimpuls

Auch der Drehimpuls ist ein Vektor parallel zur Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \quad \text{Drehimpulsvektor } \vec{L} \quad (2.54b)$$

Dieser Ausdruck kann mit der vektoriellen Form des Drehmomentes verglichen werden:

$$\vec{M} = J\vec{\alpha} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad \text{Drehmomentvektor } \vec{M}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (2.57b)$$

Das Drehmoment  $\vec{M}$  ist somit durch die zeitliche Änderung des Drehimpulses  $\vec{L}$  gegeben. Dieser Ausdruck beinhaltet den Satz von der Erhaltung des Drehimpulses. Ohne äußere Kräfte gilt:  $\vec{M} = 0$  und  $d\vec{L}/dt = 0$ : der Drehimpuls  $\vec{L}$  ist konstant. Der Ausdruck wird auch Grundgesetz der Dynamik der Rotation genannt. Anwendung findet man beim Verhalten des Kreisels.

## 2.5.6 Kreisel

Jeder rotierende Körper kann als Kreisel bezeichnet werden. Die Drehbewegung kann sehr kompliziert sein, so dass im Folgenden nur die wichtigsten Eigenschaften niedergelegt werden. Bei symmetrischen Kreiseln sind die Trägheitsmomente um zwei Hauptachsen gleich groß; ein Beispiel dafür ist ein rotationssymmetrischer Körper.

### Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Relativ einfach sind Rotationen von Kreiseln ohne äußere Kräfte. Kräftefreiheit wird dadurch erzielt, dass der Kreisel im Schwerpunkt gelagert oder kardanisch aufgehängt ist. In diesem Fall ist der Drehimpuls  $\vec{L}$  konstant. Erfolgt die Rotation des symmetrischen Kreisels um seine Figurachse, so sind  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  parallel und in Richtung der Drehachse.

### Nutation

Erhält ein sich um die Figurachse rotierender kräftefreier Kreisel einen Stoß senkrecht zur Drehachse, ändert sich der Drehimpuls. Drehachse und Figurenachse stimmen nicht mehr überein. Vor dem Stoß war der Drehimpuls  $\vec{L}_1$ ; durch den Stoß wird der Drehimpuls  $\vec{L}_2$  übertragen. Danach ist der Kreisel wieder kräftefrei und der neue Drehimpuls  $\vec{L}$  bleibt als einzige Größe raumfest. Zur Analyse der Bewegung werden die beiden Komponenten  $\vec{L}_1$  und  $\vec{L}_2$  betrachtet; sie liegen parallel und senkrecht zur Figurenachse (Bild 2-20). Dividiert man diese Komponenten durch die entsprechenden Trägheitsmomente, die verschieden sind, erhält man die Komponenten  $\vec{\omega}_1$ ,  $\vec{\omega}_2$  und daraus die resultierende Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ . Die Konstruktion nach Bild 2-20 ergibt, dass die Figurenachse, der raumfeste Drehimpuls  $\vec{L}$  und die Drehachse ( $\vec{\omega}$ ) in einer Ebene liegen. Diese Ebene rotiert um den raumfesten Drehimpuls  $\vec{L}$ . Dabei beschreibt die Figurenachse eine kreisende Bewegung, die man *Nutation* nennt.

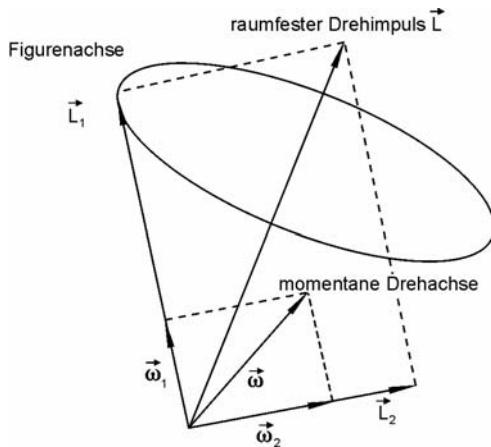


Bild 2-20

Zur Nutation. Zerlegung der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  und des Drehimpulses  $\vec{L}$  in Komponenten

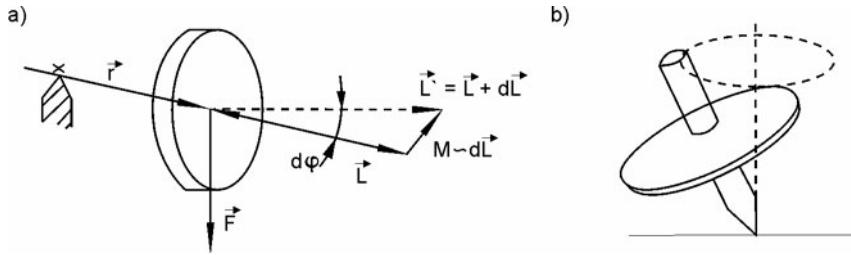


Bild 2-21 Zur Präzession.

- Das durch  $\vec{F}$  erzeugte Drehmoment ist proportional zur Änderung des Drehimpulses ( $\vec{M} \sim d\vec{dL}$ ).
- Präzession durch das Eigengewicht eines Kreisels

### Wirkung von Kräften (Präzession)

Die Wirkung einer Kraft auf einen Kreisel soll an Hand von Bild 2-21a beschrieben werden. Auf einen Kreisel, der an der Stelle  $x$  gelagert ist, wirkt eine Kraft  $\vec{F}$ . Sie erzeugt ein Drehmoment  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  (2.50b), das senkrecht zu  $\vec{r}$  und  $\vec{F}$  zeigt. Der Drehimpuls  $\vec{L}$  des Kreisels ist parallel zu  $\vec{r}$ , und das Drehmoment  $\vec{M}$  wirkt senkrecht zu  $\vec{L}$ . Da das Drehmoment gleich der zeitlichen Änderung des Drehimpulses ist ( $\vec{M} = d\vec{L} / dt$ ), zeigt  $\vec{M}$  in Richtung der Drehimpulsänderung  $d\vec{L}$ . Der neue Drehimpuls  $\vec{L}' = \vec{L} + d\vec{L}$  ist somit nach Bild 2-21a genau so groß wie der alte ( $\vec{L}$ ), allerdings ist er um den Winkel  $d\varphi$  verdreht. Das bedeutet, dass die Drehachse rotiert. Man kann also folgendes feststellen: Greift an einem Kreisel eine Kraft an, bewirkt diese eine Ausweichbewegung senkrecht zur Kraft und senkrecht zur Kreiselachse. Man nennt diese Drehung des Kreisels *Präzession*. Eine Präzession kann auch durch das Eigengewicht des Kreisels nach Bild 2-21b auftreten.

Aus Bild 2-21 kann man die Winkelgeschwindigkeit  $d\varphi/dt$  der Präzession berechnen:

$$d\varphi = \frac{dL}{L} = \frac{Md t}{L} \quad \text{oder} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L} = \frac{M}{J\omega} .$$

### Kreiselkompass

Man denke sich einen Kreisel am Äquator in Position 1 aufgestellt (Bild 2-22). Nach einer gewissen Zeit hat sich die Erde weitergedreht, in Position 2 ist der Drehimpuls des Kreisels etwas verkippt, d. h. es treten eine Drehimpulsänderung  $d\vec{L}$  und ein Drehmoment  $\vec{M} \sim d\vec{L}$  auf. Dieses Drehmoment zeigt auf den Erdmittelpunkt und bewirkt eine Präzessionsbewegung, so lange bis die Drehachse des Kreisels parallel zur Erdachse steht. Dann ist der Kreisel kräftefrei, und er bleibt in dieser Position. Ein Kreiselkompass zeigt also im Gleichgewicht stets in Richtung der Erdachse.

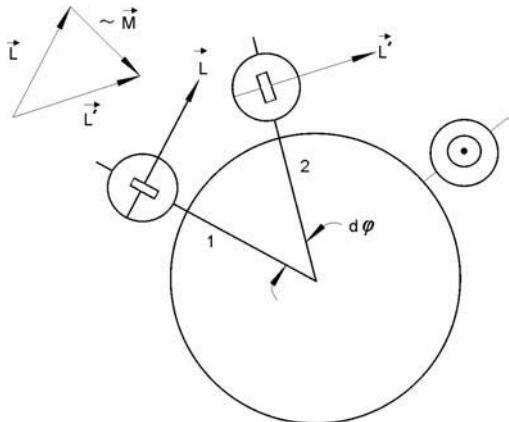


Bild 2-22

Der Kreiselkompass stellt sich parallel zur Drehachse der Erde ein.

## 3 Mechanik deformierbarer Medien

### 3.1 Deformation fester Körper

Festkörper bestehen aus Atomen und Molekülen, die durch Ionen-, kovalente oder andere Bindung zusammengehalten werden. Unter dem Einfluss von äußeren Kräften werden Festkörper deformiert. Dabei verändert sich der Abstand der Moleküle. Die Verformung ist reversibel oder elastisch, wenn sie nach Beendigung der Kraftwirkung wieder vollständig zurückgeht. Bleibende Formänderungen nennt man irreversibel oder plastisch.

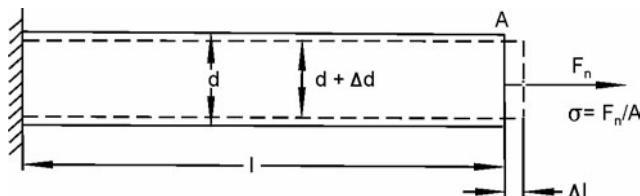
In der Praxis unterscheidet man vier Arten von Deformationen: Längsdehnung, Querdehnung, allseitige Kompression und Scherung. Diese Einteilung dient zur Untersuchung und Definition wichtiger mechanischer Kenngrößen, wie *Elastizitätsmodul E*, *Querdehnungszahl v*, *Kompressionsmodul K* und *Schubmodul G*. Etwas anders ist die Einteilung in elementare Belastungsfälle: *Zug* oder *Druck*, *Scherung*, *Biegung* und *Torsion*. Im folgenden Abschnitt geht es um das Verhalten wichtiger mechanischer Bauelemente, welches durch die oben zitierten Kenngrößen bestimmt wird.

#### 3.1.1 Dehnung

##### Normalspannung

Zur Beschreibung der Deformation von Körpern bei Zug oder Druck betrachtet man einen Stab der Länge  $l$  mit der Querschnittsfläche  $A$ , der an einem Ende fest eingespannt ist (Bild 3-1). Die Kraft  $F_n$  wirkt senkrecht auf eine der parallelen Endflächen. Damit entsteht die *Spannung* oder genauer die *Normalspannung*  $\sigma$ .

$$\sigma = \frac{F_n}{A} \quad [\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \quad \text{Normalspannung } \sigma \quad (3.1)$$



**Bild 3-1**

Bei Wirkung einer Kraft  $F_n$  bzw. einer Spannung  $\sigma = F_n / A$  treten an einem Stab eine Änderung der Länge  $\Delta l > 0$  und der Dicke  $\Delta d < 0$  auf

Die Spannung  $\sigma$  führt zu einer Längenänderung  $\Delta l$ . Man bezeichnet die relative Längenänderung als *Dehnung*  $\varepsilon$ :

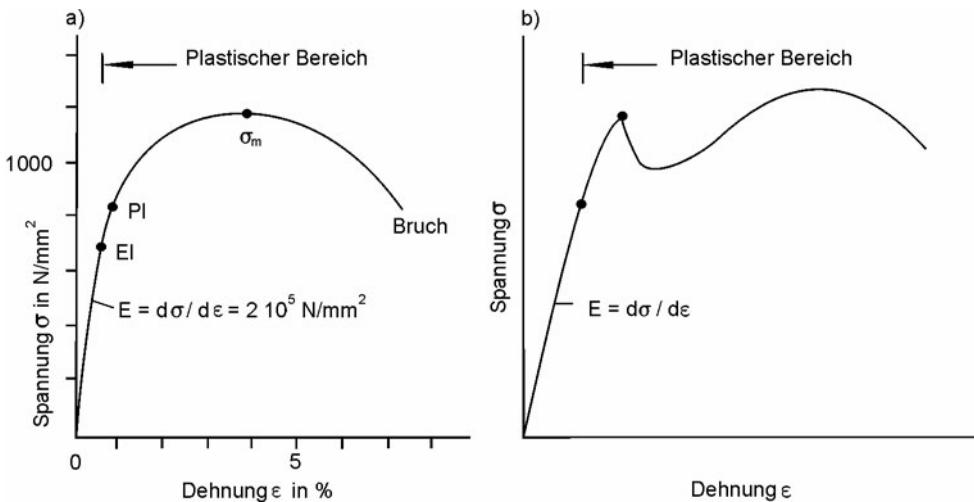
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad [\varepsilon] = 1. \quad \text{Dehnung } \varepsilon \quad (3.2)$$

### Dehnung (Hooke'sches Gesetz)

Im *elastischen Bereich* ist das *Hooke'sche Gesetz* gültig: Spannung  $\sigma$  und *Dehnung*  $\varepsilon$  sind proportional zueinander:

$$\sigma = E\varepsilon \quad [E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \quad \text{Elastizitätsmodul } E \quad (3.3)$$

Die Proportionalitätskonstante nennt man *Elastizitätsmodul*  $E$  mit der Einheit  $[E] = \text{N/m}^2$  (Tabelle 3.1). In Bild 3-2a ist die Spannung  $\sigma$  und Dehnung  $\varepsilon$  bei einem Zugversuch an Stahl dargestellt. Im linearen Bereich ist das Verhalten des Werkstoffes elastisch und der Anstieg der Spannungs-Dehnungs-Kurve  $d\sigma/d\varepsilon$  ergibt den Elastizitätsmodul  $E = d\sigma/d\varepsilon$ . Bild 3-2b zeigt einen unstetigen Übergang zum *plastischen Bereich*.



**Bild 3-2** Spannung-Dehnung-Diagramm als Ergebnis eines Zugversuches:  
a) Stetiger Übergang vom elastischen zum plastischen Bereich bei Stahl.  
b) unstetiger Übergang

### Querdehnung

Bei der Dehnung eines Stabes mit quadratischem Querschnitt verringert sich nach Bild 3-1 die Dicke  $d$  um  $\Delta d$ . Die relative Dickenänderung  $\varepsilon_q$

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d} \quad (3.4)$$

hängt im elastischen Bereich linear mit der relativen Längenänderung  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$  zusammen:

$$\varepsilon_q = -v\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{\mu}. \quad \text{Querdehnungszahl } v \quad (3.5)$$

Die dimensionslose Größe  $v$  ist die Querkontraktions- oder *Querdehnungszahl* (Tabelle 3.1). Der Kehrwert  $\mu = 1/v$  ist die *Poisson'sche Zahl*. Das Minuszeichen kennzeichnet, dass  $\Delta d$  und  $\varepsilon_q$  bei Zug negativ und bei Druck positiv sind.

Durch die Dehnung eines Stabes mit quadratischem Querschnitt nach Bild 3-1 ändert sich das Volumen  $V$  um  $\Delta V$ :

$$\frac{\Delta V}{V} = (d + \Delta d)^2 (l + \Delta l) - d^2 l . \quad (3.6)$$

Hinter dem letzten Gleichheitszeichen wurden kleine Größen  $\Delta d \cdot \Delta l$  und  $(\Delta d)^2$  vernachlässigt. Mit  $V = d^2 l$  erhält man für die relative Volumenänderung  $\Delta V/V$ :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta d}{d} = (1 - 2v) \frac{\sigma}{E} . \quad \text{Volumenänderung } \Delta V/V \quad (3.7)$$

### Kompressibilität

Die Volumenänderung bei einseitiger Belastung eines Stabes oder Quaders ist durch (3.7) gegeben. Wird auf einen Körper von allen Seiten ein gleichmäßiger Druck, z. B. ein hydrostatischer Druck, ausgeübt, so entsteht eine dreimal so große Volumenänderung. Die Verknüpfung zwischen Druckerhöhung  $\Delta p$  und Spannung  $\sigma$  lautet  $\Delta p = -\sigma$ , und man erhält:

$$\frac{\Delta V}{V} = -3(1 - 2v) \frac{\Delta p}{E} = -\kappa \Delta p . \quad \text{Kompressibilität } \kappa \quad (3.8)$$

Die *Kompressibilität*  $\kappa$  ist mit dem *Kompressionsmodul*  $K$  über die Gleichung

$$K = \frac{1}{\kappa} = \frac{E}{3(1 - 2v)} \quad [\kappa] = \frac{1}{\text{Pa}} \quad [K] = \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (3.9)$$

verknüpft. Der Kompressionsmodul  $K$  ist analog zum Elastizitätsmodul  $E$  definiert. Statt der relativen Längenänderung wird die relative Volumenänderung betrachtet. Daher sind auch die Einheiten von  $E$  und  $K$  gleich (Tabelle 3.1). Das Minuszeichen in (3.8) bestätigt, dass das Volumen durch Druck verkleinert wird. Daher gilt  $v < 0,5$ , was in Übereinstimmung mit Tabelle 3.1 steht.

**Tabelle 3.1** Elastische Konstanten einiger Festkörper:  $E$  = Elastizitätsmodul,  $v$  = Querdehnungszahl,  $K$  = Kompressionsmodul,  $G$  = Schubmodul,  $\varepsilon_B$  = Bruchdehnung,  $\sigma_B$  = Zugfestigkeit

Material	$E$ $10^9 \text{ N/m}^2$	$v$	$K$ $10^9 \text{ N/m}^2$	$G$ $10^9 \text{ N/m}^2$	$\varepsilon_B$	$\sigma_B$ $10^9 \text{ N/m}^2$
Duraluminium	77	0,34	75	27	0,04	0,50
V2A-Stahl	195	0,28	170	80	0,45	0,70
$\alpha$ -Eisen	218	0,28	172	84	0,5	0,10
Cu, kaltverf.	126	0,35	140	47	0,02	0,45
Messing, “	100	0,38	125	36	0,05	0,55
Pb	17	0,44	44	5,5 ... 7,5		0,014
Glas	76	0,17	38	33		0,09
Eis, $-4^\circ\text{C}$	9,9	0,33	10	3,7		

**Beispiel 3.1.1**

Ein Draht der Länge  $l = 0,815$  m mit einer Querschnittsfläche von  $A = 1 \text{ mm}^2$  dehnt sich bei Belastung mit  $m = 10,00 \text{ kg}$  um  $\Delta l = 0,41 \text{ mm}$ . Wie groß ist der E-Modul  $E$ ?

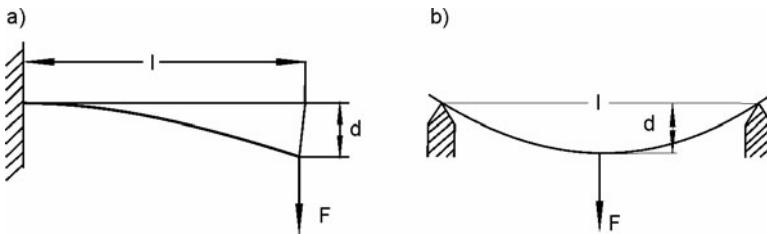
$$\text{Es gilt: } E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F_n / A}{\Delta l / l} = \frac{mg / A}{\Delta l / l} = \frac{mg l}{\Delta l \cdot A} = 195 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2.$$

### 3.1.2 Anwendungen, Belastung

#### Biegung von Trägern

Bild 3-3a zeigt einen Balken der Länge  $l$ , der an einer Seite eingespannt ist. Die Durchbiegung  $d$  bei Belastung am freien Ende durch die Kraft  $F$  kann wie folgt berechnet werden:

$$d = \frac{l^3 F}{3EI}. \quad (3.10)$$



**Bild 3-3** Durchbiegung von Trägern: a) einseitige Einspannung. b) Zweiseitige Halterung

Bei zweiseitiger Einspannung des Balkens ist die Durchbiegung geringer. Wirkt die Kraft in der Mitte des Balkens, errechnet sich die Durchbiegung  $d$  zu:

$$d = \frac{l^3 F}{192EI}. \quad (3.11)$$

Das Flächenträgheitsmoment  $I$  für einen Balken mit rechteckigem Querschnitt der Höhe  $h$  und der Breite  $b$  berechnet sich zu:

$$I = \frac{h^3 b}{12}. \quad (3.12)$$

Für einen runden Querschnitt mit dem Radius  $r$  ergibt sich:

$$I = \frac{\pi r^4}{4}. \quad (3.13)$$

Oft wird der Elastizitätsmodul  $E$  eines Materials dadurch gemessen, dass ein Stab auf zwei Schneiden gelegt und in der Mitte belastet wird (Bild 3-3b). Die beiden Seiten sind nicht eingespannt und man erhält in Abweichung von (3.11):

$$d = \frac{l^3 F}{48EI}. \quad (3.14)$$

## 3.2 Statik der Flüssigkeiten und Gase

Festkörper haben durch ihren kristallinen Aufbau nahezu feste Gestalt und konstante Dichte. Die geringe Deformation unter der Wirkung von Kräften ist im letzten Abschnitt beschrieben. Auch Flüssigkeiten besitzen weitgehend eine konstante Dichte. Die Moleküle sind jedoch untereinander schwach gebunden, so dass sich die Form der Flüssigkeit leicht ändert. Gase haben dagegen kein festes Volumen; sie füllen jeden verfügbaren Raum aus und sind leicht komprimierbar. In diesem Abschnitt über Hydro- und Aerostatik werden die mechanischen Eigenschaften von ruhenden Flüssigkeiten und Gasen beschrieben.

### 3.2.1 Druck und Kompressibilität

#### Druck

Unter dem Einfluss von Kräften sind Moleküle in Flüssigkeiten und Gasen frei verschiebbar. Zur Beschreibung der Kräfte in Flüssigkeiten und Gasen dient der skalare Begriff *Druck*  $p$ . Er ist definiert als Quotient aus der Kraft  $F$ , die senkrecht auf der Fläche  $A$  wirkt, und der Fläche  $A$ . Bei inhomogenen Verhältnissen muss  $F$  und  $A$  durch  $dF$  und  $dA$  ersetzt werden:

$$p = \frac{F}{A} \quad \text{oder genauer } p = \frac{dF}{dA} \quad [p] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} . \quad \text{Druck } p \quad (3.15)$$

Der Druck  $p$  in einem Gas oder einer Flüssigkeit ist in alle Raumrichtungen gleich.

*Der Druck ist ein Skalar mit der Einheit  $[p] = \text{Pascal} = \text{Pa} = \text{N/m}^2$ . Neben Pascal wird auch die Einheit 1 bar =  $10^5 \text{ Pa}$  verwendet.*

Der Druck  $p$  nach (3.15) entspricht weitgehend der Definition der Normalspannung  $\sigma$  für feste Körper (3.1); der Unterschied liegt im Vorzeichen:  $p = -\sigma$ .

#### Kompressibilität

Druckerhöhungen bewirken bei Flüssigkeiten eine geringe und bei Gasen eine hohe Abnahme des Volumens  $V$ . Die relative Volumenänderung  $\Delta V/V$  ist proportional zur Druckänderung  $\Delta p$  und es gilt wie bei Festkörpern (3.8):

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \Delta p \quad [\kappa] = \frac{1}{\text{Pa}} = \frac{\text{m}^2}{\text{N}} . \quad \text{Kompressibilität } \kappa \quad (3.16)$$

Für die relative Änderung der Dichte  $\rho = \frac{m}{V}$  gilt  $\frac{\Delta \rho}{\rho} = -\frac{\Delta V}{V}$ . Daraus folgt:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \kappa \Delta p \quad [\kappa] = \frac{1}{\text{Pa}} = \frac{\text{m}^2}{\text{N}} . \quad \text{Kompressibilität } \kappa \quad (3.17)$$

Werte für die Kompressibilität von  $\kappa$  von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen sind in Tabelle 3.2 zusammengestellt. Im Gegensatz zu Gasen können Festkörper und Flüssigkeiten als nahezu inkompressibel angesehen werden. Für ideale Gase mit dem Druck  $p$  erhält man für die isotherme Kompressibilität  $\kappa$  (Abschnitt 5.1):

$$\kappa = \frac{1}{p} . \quad \text{Isotherme Kompressibilität } \kappa \quad (3.18)$$

Isotherm bedeutet, dass die Temperatur bei der Kompression konstant gehalten wird.

**Tabelle 3.2** Kompressibilität  $\kappa$  einiger Festkörper, Flüssigkeiten und eines idealen Gases

Festkörper	$\kappa$ $10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$	Flüssigkeiten (20 °C)	$\kappa$ $10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$	Ideales Gas Druck in Pa	$\kappa$ $\text{Pa}^{-1}$
Al	1,33	Wasser	5	$10^4$	$10^{-4}$
V2A-Stahl	0,59	Glycerin	0,222	$10^5$	$10^{-5}$
Messing	0,80	Hg	0,039	$10^6$	$10^{-6}$

**Beispiel 3.2.1 (a)** Bei einer Luftpumpe wird eine Kraft von  $F = 200 \text{ N}$  ausgeübt. Der Durchmesser des Zylinders der Pumpe beträgt  $d = 2 \text{ cm}$ . Welcher Druck wird erzeugt?

$$\text{Der Druck beträgt: } p = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d^2} = 6,37 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 6,37 \text{ bar}.$$

**Beispiel 3.2.1 (b)** Wie stark erhöht sich die Dichte des Wassers in einer Tiefe von 1 km?

Der Wasserdruk steigt jede 10 m um etwa 1 bar =  $10^5 \text{ Pa}$ . In 1000 m Tiefe herrschen also  $10^7 \text{ Pa}$ .

Die relative Änderung der Dichte beträgt:  $\Delta\rho / \rho = \kappa \Delta p$ . Mit  $\kappa = 5 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$  und  $\Delta p = 10^7 \text{ Pa}$  erhält man  $\Delta\rho / \rho = \kappa \Delta p = 0,05 = 5\%$ .

**Beispiel 3.2.1 (c)** Welche Kraft wirkt auf den Deckel eines Einmachglases von  $d = 10 \text{ cm}$  Durchmesser, wenn der Innendruck praktisch gleich Null ist (genauer: mindestens gleich dem Dampfdruck des Wassers)?

$$F = pA = p\pi d^2 / 4 = 10^5 \cdot \pi \cdot 10^{-2} / 4 \text{ N} = 785 \text{ N} \text{ (entspricht der Gewichtskraft von } 78,5 \text{ kg!).}$$

## 3.2.2 Druck in Flüssigkeiten

### Druck

In den folgenden Abschnitten wird das Verhalten von Flüssigkeiten und Gasen unter Druck getrennt behandelt, da starke Unterschiede in der Kompressibilität  $\kappa$  vorliegen (Tabelle 3.2).

### Druckausbreitung

Setzt man eine Flüssigkeit (z. B. Bremssystem beim Auto) unter Druck, breitet er sich nach allen Seiten gleichmäßig aus. Eine Anwendung dieser Tatsache findet man bei der *hydraulischen Presse*. Man drückt mit der relativ geringen Kraft  $F_1$  auf den Kolben mit der Querschnittsfläche  $A_1$  (Bild 3-4). Der Druck  $p$  ist im System konstant und auf den größeren Kolben mit der Fläche  $A_2$  entsteht die Kraft  $F_2$ :

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \text{und} \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}. \quad \text{Hydraulische Presse} \quad (3.19)$$

Die Kraft wird also im Verhältnis der Kolbenquerschnitte vergrößert.

Nach einem ähnlichen Prinzip arbeitet ein Druckwandler. In der Anordnung nach Bild 3-5 sind die Kräfte, die von rechts und links auf den Kolben wirken, gleich. Man erhält für das Verhältnis der Drucke  $p_1 / p_2$  beim Druckwandler:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{A_2}{A_1}. \quad \text{Druckwandler} \quad (3.20)$$

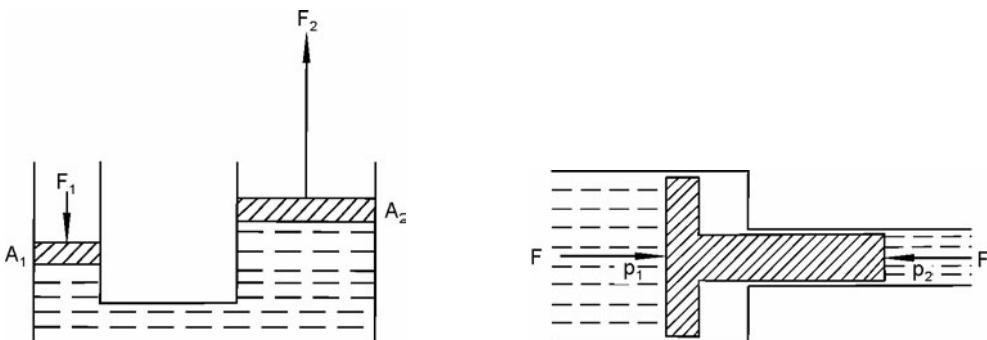


Bild 3-4

Prinzip der hydraulischen Presse (Kraftwandler)

Bild 3-5

Prinzip eines Druckwandlers

### Schweredruck

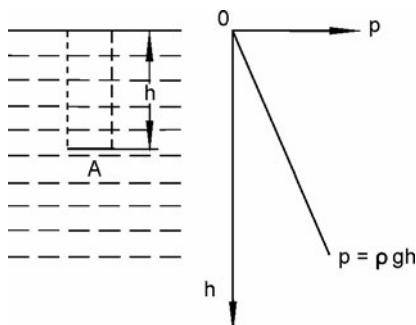
In einer Flüssigkeit üben die oberen Schichten eine Gewichtskraft auf die tieferen Schichten aus. Damit entsteht ein Druck  $p$  (Bild 3-6). Auf das waagerechte Flächenstück  $A$  in der Tiefe  $h$  lastet das Volumen  $V = Ah$  und die Masse  $m = \rho Ah$ , wobei  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit angibt. Damit resultiert für den Schweredruck  $p = F/A = mg/A$ :

$$p = \rho gh .$$

Schweredruck  $p$  (3.21a)

Der *Schweredruck*  $p$  hängt also nur von der Flüssigkeitstiefe  $h$  ab, nicht aber von der Gefäßform. Er beträgt in 10 m Wassertiefe mit  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ :

$$p = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Pa} \approx 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar} .$$



**Bild 3-6**

Schweredruck in einer Flüssigkeit  $p = \rho gh$

### Druckmessung

Der Druck in Gasen kann mit einem U-Rohr, das mit einer Flüssigkeit mit der Dichte  $\rho$  gefüllt ist, gemessen werden. Wirkt auf beiden Seiten des Rohres ein unterschiedlicher Druck  $p_1$  und  $p_2$ , wird die Druckdifferenz  $p_1 - p_2$ , aus dem Höhenunterschied der Flüssigkeitssäulen  $h = h_2 - h_1$  ermittelt:

$$p_1 - p_2 = \rho gh .$$

Üblich sind Hg- oder H<sub>2</sub>O-Manometer. Früher gab man die Druckdifferenz direkt in mm Quecksilbersäule (Torr), mm Wassersäule (mmWs) oder m Wassersäule (mWs) an. Mit den Dichten für H<sub>2</sub>O ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) und Hg ( $\rho = 13550 \text{ kg/m}^3$ ) erhält man mit (3.21a):

$$10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar} = 10,2 \text{ mWs} = 750 \text{ Torr} .$$

Druckeinheiten (3.21b)

Der Luftdruck (um 1 bar) kann gemessen werden, indem man eine Seite eines Hg-Manometers evakuiert, d. h.  $p_2 = 0$  und  $p_1 = \text{Luftdruck}$ .

Andere Manometer enthalten als Bauteil eine Membran, die sich unter der Wirkung des Druckes verformt. Die Verformung wird mechanisch auf eine Skala übertragen. Zur Messung des Luftdruckes verwendet man einen luftleeren Blechbehälter. Ein Röhrenfedermanometer besteht aus einer zu einem Kreis gebogenen Röhre, die an einem Ende abgeschlossen ist. Am anderen Ende wird die Druckleitung angebracht. Unter der Wirkung des Druckes biegt sich die Röhre etwas auf und bewegt einen Zeiger. Elektrische Messverfahren zur Messung des Drucks nutzen folgende Prinzipien: piezoelektrischer Effekt, Kapazitäts- und Widerstandsänderungen sowie Dehnungsmessstreifen.

## Saugpumpe

Die Wirkung einer Saugpumpe ist durch den äußeren Luftdruck begrenzt. Zur Erklärung stellt man sich ein U-Rohr vor. An der einen Seite erzeugt eine Pumpe einen Unterdruck mit  $p_2 = 0$ , auf der anderen wirkt der Luftdruck  $p_1 \approx 1$  bar. Die maximale Saughöhe bei einer Flüssigkeit mit der Dichte  $\rho$  berechnet man aus dem Schweredruck (3.21):

$$h = \frac{p}{\rho g}.$$

Für Wasser erhält man mit  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  eine maximale Saughöhe von  $h \approx 10 \text{ m}$ .

**Beispiel 3.2.2** Bis zu welcher Tiefe darf ein Forschungs-Unterseeboot tauchen, wenn es einen Überdruck von  $\Delta p = 120 \text{ bar}$  aushält?

Es gelten  $p = \rho gh$  und  $h = p/(\rho g) = 1223 \text{ m}$  (mit  $\Delta p = 120 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$  und  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ).

## 3.2.3 Druck in Gasen

Die Eigenschaften von Gasen werden ausführlich in der Wärmelehre behandelt (Kapitel 5). Gase besitzen weder feste Gestalt noch festes Volumen; sie nehmen jeden ihnen zur Verfügung stehenden Raum ein. Im folgenden Abschnitt wird der Druck  $p$  in Gasen bei konstanter Temperatur  $T$  beschrieben.

### Druck und Volumen

Ein Gas übt auf die Wände eines Gefäßes einen Druck aus. Für den Zusammenhang zwischen Druck  $p$  und Volumen  $V$  gilt für ideale Gase das *Gesetz von Boyle-Mariotte* (Abschnitt 5.1.2):

$pV = \text{const.}$ bei $T = \text{const.}$	Isotherme Kompression	(3.22)
----------------------------------------------	-----------------------	--------

*Das Produkt aus Druck  $p$  und Volumen  $V$  eines eingeschlossenen Gases ergibt stets den gleichen Wert, sofern die Temperatur  $T$  konstant bleibt.*

Einen Vorgang bei konstanter Temperatur nennt man *isotherm*. Wenn die Temperatur nicht konstant bleibt, entstehen dadurch zusätzliche Volumenänderungen.

### Dichte

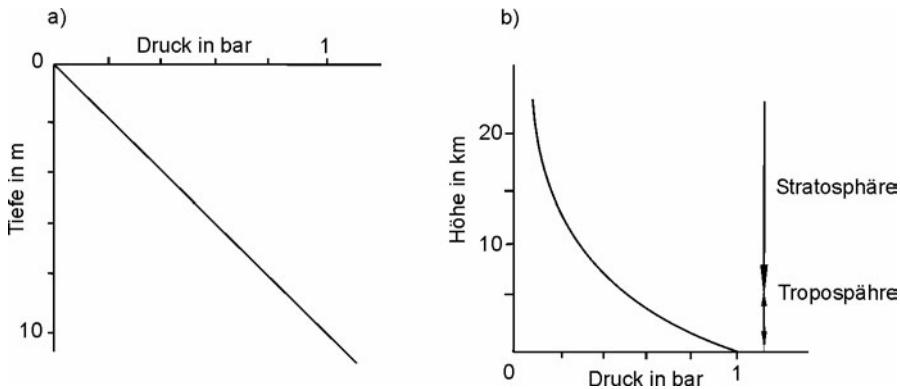
Die Dichte ist als  $\rho = \frac{m}{V}$  definiert, wobei  $m$  die Masse und  $V$  das Volumen darstellen. Setzt man diese Beziehung in (3.22) ein, erhält man bei konstanter Masse  $m$ :

$\frac{\rho}{p} = \text{const.}$ bei $T = \text{const.}$	Isotherme Kompression	(3.23)
----------------------------------------------------------	-----------------------	--------

*Die Dichte  $\rho$  eines isothermen Gases ist seinem Druck  $p$  proportional.*

### Schweredruck

Volumen  $V$  und Dichte  $\rho$  von Flüssigkeiten sind weitgehend unabhängig vom Druck  $p$ . Daher wird der Schweredruck durch die Gleichung  $p = \rho gh$  beschrieben. Trägt man den Druck in einem See in Abhängigkeit von der Wassertiefe  $h$  auf, so erhält man einen linearen Zusammenhang nach Bild 3-7a. Völlig anders verhält sich der Druck in der Lufthülle mit zunehmender Höhe. Der Unterschied liegt darin, dass die oberen Luftsichten durch ihren Druck die unteren komprimieren.



**Bild 3-7** Schweredruck in inkompressiblen und kompressiblen Medien:  
a) Wasser, linearer Zusammenhang, b) Lufthülle, exponentieller Zusammenhang

### Luftdruck

Da die Dichte  $\rho$  in der Lufthülle nicht konstant ist, kann die Gleichung für den Schweredruck  $p = \rho gh$  nur auf eine sehr dünne Luftsicht angewendet werden. Wir betrachten eine Schicht in der Höhe  $h$  mit der Dicke  $dh$ , innerhalb welcher der Druck um  $dp$  fällt:

$$-dp = \rho g dh. \quad \text{Mit } \frac{\rho}{p} = \text{const. (3.23)} \text{ oder } \frac{\rho}{p} = \frac{\rho_0}{p_0} \text{ wird daraus: } dp = -\frac{\rho_0}{p_0} \rho g dh.$$

Dabei sind  $p_0$  und  $\rho_0$  Druck und Dichte an der Erdoberfläche ( $h = 0$ ). Die Integration dieser Differentialgleichung liefert:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \int_0^h dh. \quad \text{Mit } \int \frac{dx}{x} = \ln x \text{ erhält man: } \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{\rho} gh.$$

Da  $e^{\ln x} = x$  ist, ergibt sich für den Luftdruck  $p$  in Abhängigkeit von der Höhe  $h$  die *barometrische Höhenformel*:

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}. \quad \text{Luftdruck } p \quad (3.24)$$

Die Druckverteilung in Gasen ist damit grundsätzlich anders als in Flüssigkeiten. Mit zunehmender Höhe  $h$  fällt der Luftdruck  $p$  exponentiell ab (Bild 3-7b). Bei der Ableitung wurde angenommen, dass die Temperatur  $T$  in der Lufthülle konstant ist. Dieses ist natürlich nur eine grobe Näherung. Für die Druckabnahme in Gebirgen bedient man sich gern einer linearen Näherung als Faustregel: Bei 10 m Höhenunterschied nimmt der Luftdruck um 1,2 mbar = 1,2 hPa ab.

**Beispiel 3.2.3 (a)** Eine Pressluftflasche mit  $V_1 = 40$  Liter und  $p_1 = 60$  bar werden entleert. Wie viele Liter  $V_2$  strömen aus?

Es gilt  $pV = \text{const.}$  (bei  $T \text{ const.}$ ) und  $p_1 V_1 = p_2 V_2$ , wobei  $p_2 = 1$  bar. Es folgt:  $V_2 = 2400$  Liter.

**Beispiel 3.2.3 (b)** In welcher Höhe  $h$  ist der Luftdruck  $p$  gleich  $1/2$ ,  $1/3$ , und  $1/10$  des Drucks an der Erdoberfläche  $p_0 = 1 \text{ bar}$  (Luftdichte  $\rho_0 = 1,3 \text{ kg/m}^3$ )?

Die Höhenformel (3.24) wird logarithmiert und nach  $h$  aufgelöst:  $h = \frac{P_0}{\rho_0 g} \ln \frac{P_0}{p}$ . Mit  $\frac{P}{P_0} = 1/2, 1/3$  und  $1/10$  erhält man:  $h = 5435 \text{ m}, 8615 \text{ m}$  und  $8055 \text{ m}$ .

### 3.2.4 Auftrieb

#### Prinzip von Archimedes

Ein Körper in einer Flüssigkeit oder einem Gas erfährt durch den Schweredruck eine nach oben gerichtete Kraft. Zur Berechnung des Auftriebes dient als Beispiel ein Zylinder mit der Grundfläche  $A$ , der sich in einer Flüssigkeit (oder einem Gas) mit der Dichte  $\rho$  befindet (Bild 3-8). Auf die Oberseite in der Tiefe  $x$  wirkt der Schweredruck (3.21)  $p_1 = \rho g x$  und die nach unten gerichtete Kraft  $F_1 = p_1 A$ . Dagegen ist die Kraft auf der Unterseite nach oben gerichtet  $F_1 = \rho g A(x+h)$ , wobei  $h$  die Höhe des Zylinders ist. Die seitlichen Kräfte heben sich gegenseitig auf. Insgesamt verbleibt eine nach oben gerichtete Kraft  $F_2 - F_1 = \rho g Ah$ . Das Volumen des Zylinders beträgt  $Ah$  und man erhält man  $F_2 - F_1 = \rho g V$ . Diese resultierende Kraft nach oben nennt man *Auftriebskraft*  $F_a = F_2 - F_1$ :

$$F_a = \rho g V = mg . \quad \text{Auftriebskraft } F_a \quad (3.25)$$

Dabei ist  $m = \rho V$  die Masse des verdrängten Mediums mit der Dichte  $\rho$ . Obwohl (3.25) nur für einen zylinderförmigen Körper bewiesen wurde, gilt die Gleichung jedoch allgemein.

*Die Auftriebskraft ist gleich der Gewichtskraft des vom Körper verdrängten Flüssigkeits- oder Gasvolumens (Prinzip von Archimedes).*

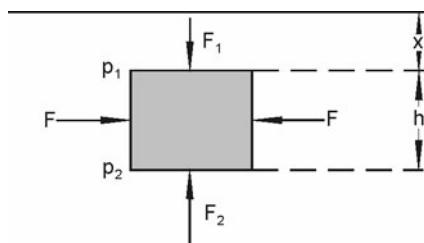


Bild 3-8

Zur Entstehung des Auftriebs.

Der Schweredruck an der Unterseite  $p_1$  ist größer als an der Oberseite  $p_2$

Befindet sich ein Körper vollständig in einer Flüssigkeit oder in einem Gas, unterscheidet man je nach seiner mittleren Dichte  $\rho_K$  und seiner Gewichtskraft  $F_g$  drei Fälle:

$F_g > F_a$  bzw.  $\rho_K > \rho$  : Körper sinkt

$F_g < F_a$  bzw.  $\rho_K < \rho$  : Körper steigt.

$F_g = F_a$  bzw.  $\rho_K = \rho$  : Körper schwimmt

Ist die mittlere Dichte eines Körpers  $\rho_K$  kleiner als die der Flüssigkeit  $\rho$ , steigt er nach oben und schwimmt schließlich auf der Oberfläche.

*Beim Schwimmen ist die Masse der verdrängten Flüssigkeit gleich der Masse des Körpers.*

Bei Schiffen gibt man bisweilen die Wasserverdrängung an, die gleich der Masse des beladenen Schiffes ist.

## Anwendungen

Ein schwimmender Körper taucht je nach Dichte  $\rho$  der Flüssigkeit verschieden tief ein. Beim Aräometer wird aus der Eintauchtiefe die Dichte der Flüssigkeit ermittelt. Eine weitere Anwendung des Auftriebes liefert die hydrostatische Waage zur Bestimmung der Dichte. Mit der Waage wird zunächst die Gewichtskraft  $mg$  des Probekörpers gemessen. Dann hängt man ihn in eine Flüssigkeit mit bekannter Dichte  $\rho$  und ermittelt mit der Waage die durch die Auftriebskraft verminderte Größe  $(mg)' = mg - \rho Vg$ . Da  $(mg)'$  und  $mg$  durch die Messungen bekannt sind, kann aus der Gleichung das Volumen  $V$  errechnet und die Dichte  $\rho = m/V$  des Probekörpers bestimmt werden. Nach dem gleichen Verfahren wird die Dichte von Flüssigkeiten untersucht, wenn die Dichte des Probekörpers bekannt ist.

Die Auftriebskraft wirkt auch auf Körper in der Lufthülle mit der Dichte  $\rho_{Luft} = 1,29 \text{ kg/m}^3$ . Ein Ballon steigt, wenn die von ihm verdrängte Luftmasse größer als die eigene Masse ist. Der Auftrieb beeinflusst auch die präzise Bestimmung von Massen mit Hilfe von Waagen. Durch den Auftrieb  $F_a$  wird statt der Gewichtskraft  $F_g$  der um die Auftriebskraft  $F_a$  verminderte Wert  $F_g - F_a$  gemessen.  $F_a$  hängt von der Dichte  $\rho$  des Körpers ab. Die durch eine Wägung ermittelte Masse  $m'$  muss daher mit einer Auftriebskorrektur versehen werden, um die echte Masse  $m$  zu erhalten:

$$m = \frac{m'}{1 - \rho_{Luft}/\rho}. \quad \text{Auftriebskorrektur} \quad (3.26)$$

**Beispiel 3.2.4 (a)** Ein Körper aus Holz (Dichte  $\rho = 850 \text{ kg/m}^3$ ) schwimmt in Salzwasser (Dichte  $\rho_W = 1100 \text{ kg/m}^3$ ). Wie viel Prozent seines Volumens ist unter Wasser?

Beim Schwimmen ist die Masse der verdrängten Flüssigkeit gleich der der Masse des Körpers:  $\rho_W V_W = \rho V$ . Daraus folgt:  $V_W/V = \rho/\rho_W = 0,773$ . Also sind 77,3 % unter Wasser.

**Beispiel 3.2.4 (b)** Ein Schmuckstück wiegt in Luft  $F_L = 9,0 \cdot 10^{-2} \text{ N}$  und unter Wasser  $F_W = 8,2 \cdot 10^{-2} \text{ N}$ . Ist es aus Gold ( $\rho_G = 19,3 \text{ g/cm}^3$ ) oder vergoldetem Silber ( $\rho_S = 10,5 \text{ g/cm}^3$ )?

Die Auftriebskraft beträgt:  $F_A = F_L - F_W = \rho Vg$ , wobei  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  die Dichte des Wassers und  $V$  und das verdrängte Wasservolumen ist.  $V$  ist auch das Volumen  $V = \rho_G \text{ oder } S / m$  des Schmuckstücks mit der Masse  $m = F_L/g$ .

Damit wird:  $\rho_G \text{ oder } S = \frac{m}{V} = \frac{F_L}{g} \frac{\rho g}{F_A} = 11,3 \text{ g/cm}^3$ . Es handelt sich also um Silber.

## 3.3 Dynamik der Flüssigkeiten und Gase

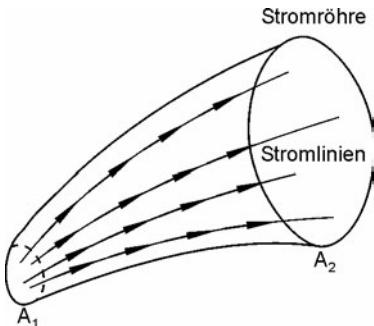
In der *Hydrodynamik* werden strömende Flüssigkeiten beschrieben. Gasströmungen gehorchen den gleichen Gesetzen, sofern sie durch die Bewegung nicht komprimiert werden. Dieses ist der Fall, wenn die Geschwindigkeit ein Drittel der Schallgeschwindigkeit nicht überschreitet. Darüber hinaus muss die Kompression berücksichtigt werden. Dies geschieht in der *Aerodynamik*. Die *Hydrodynamik* untersucht also inkompressible und die *Aerodynamik* kompressible Strömungen.

### 3.3.1 Reibungsfreie Strömungen

#### Grundbegriffe

Vernachlässigt man die Reibung in der Flüssigkeit und an den Grenzflächen (z. B. an Rohren), handelt es sich um eine *ideale* oder *reibungsfreie Strömung*. Zusätzlich wird im Folgenden angenommen, dass die Strömung *stationär* ist. Dies bedeutet, dass alle Größen (wie Druck, Geschwindigkeit, usw.) nur vom Ort, nicht aber von der Zeit abhängen (Bild 3-9). Eine *Strom-*

linie wird durch die Tangenten der Geschwindigkeitsvektoren zu einem bestimmten Zeitpunkt gebildet. Bei stationärer Strömung ist sie identisch mit der Bahnkurve eines Flüssigkeitsteilchens. Eine Strömung mit sich nicht kreuzenden Stromlinien ist *laminar*.

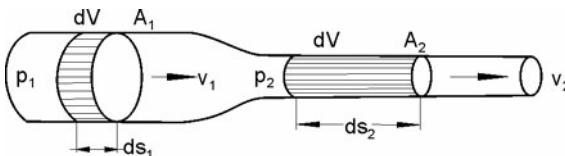


**Bild 3-9**

Stromlinien in einer Stromröhre: Bei stationärer Strömung sind die Stromlinien zeitlich konstant. Bei laminarer Strömung treten keine Wirbel auf.

### Durchfluss

Im Folgenden wird eine ideale, stationäre Strömung bei veränderlichem Querschnitt betrachtet (Bild 3-10). Die Flüssigkeit (oder das Gas) sei inkompressibel, d. h. die Dichte  $\rho$  ist konstant. Durch jeden Querschnitt des Rohres fließt in der gleichen Zeit  $dt$  das gleiche Volumen  $dV$  hindurch. Dies ist nur möglich, wenn die Flüssigkeit im kleineren Querschnitt schneller strömt als im größeren.



**Bild 3-10**

Strömung eines inkompressiblen Mediums in einem sich verengenden Querschnitt. Ableitung der Gleichung von Bernoulli

An der Stelle 1 ist  $dV = A_1 ds_1 = A_1 v_1 dt$  und an der Stelle 2 gilt  $dV = A_2 ds_2 = A_2 v_2 dt$ .

Durch Gleichsetzen entsteht die *Kontinuitätsgleichung*:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 . \quad \text{Kontinuitätsgleichung} \quad (3.30a)$$

Die Strömungsgeschwindigkeiten ( $v_1, v_2$ ) in einer Stromröhre verhalten sich also umgekehrt wie die Querschnitte ( $A_1, A_2$ ). Die Größe  $Av$  beschreibt das Volumen, das pro Zeiteinheit durch den Rohrquerschnitt strömt:

$$Av = \frac{dV}{dt} = \dot{V}$$

Die Größe  $\dot{V}$  wird *Volumenstrom* genannt. Die *Kontinuitätsgleichung* kann somit für inkompressive Medien wie folgt formuliert werden:

$$\dot{V} = Av = \text{const.} \quad [\dot{V}] = \frac{\text{m}^3}{\text{s}} . \quad \text{Kontinuitätsgleichung} \quad (3.30b)$$

### Statischer Druck, dynamischer Druck, Gesamtdruck

Nach der Kontinuitätsgleichung nimmt die Geschwindigkeit in engen Querschnitten zu. Für die Beschleunigung ist eine Kraft erforderlich, die mit einem Druckunterschied  $p_1 - p_2$  im Innern der Flüssigkeit verknüpft ist. Der *statische Druck*  $p_2$  an der Stelle 2 muss also kleiner sein als der statische Druck  $p_1$  an der Stelle 1 (Bild 3-10). Die Arbeit  $W$ , die zum Transport des Volumens  $V = \rho\rho$  von der Stelle 1 nach 2 im Rohr erforderlich ist, beträgt:

$$W = \int F ds = \int p A ds = \int p dV = (p_1 - p_2)V.$$

Dabei wurde  $F = pA$  und  $A ds = dV$  gesetzt. Die Arbeit  $W$  verursacht eine Zunahme an kinetischer Energie:

$$(p_1 - p_2)V = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2}.$$

Man dividiert durch  $V$  und erhält (mit  $\rho = m/V$ ):

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \quad \text{oder} \quad p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const.} \quad \text{Bernoulli'sche Gleichung} \quad (3.31a)$$

Bei Rohrsystemen, die in unterschiedlicher Höhe liegen, ist zusätzlich noch der *Schweredruck*  $\rho gh$  zu berücksichtigen (3.21). (3.31a) lautet dann:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = p_{\text{ges}} = \text{const.} \quad \text{Bernoulli'sche Gleichung} \quad (3.31b)$$

Man bezeichnet die Größe  $p$  als *statischen Druck* und  $p_d = \frac{\rho v^2}{2}$  als *dynamischen Druck* oder *Staudruck*. Die Bernoulli'sche Gleichung (3.31b) besagt:

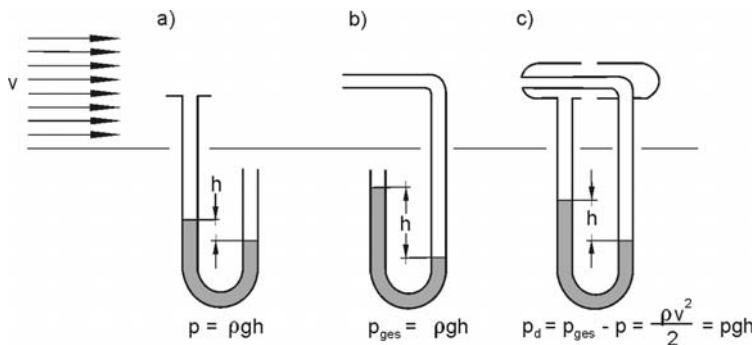
*Die Summe aus statischem, dynamischem und Schweredruck ist an jeder Stelle einer Strömung gleich.*

Diese Summe bezeichnet man auch als *Gesamtdruck*  $p_{\text{ges}}$ . Aus (3.31a) folgt:

*In einer Strömung steigt an eingeengten Stellen die Geschwindigkeit und es entsteht an diesen Stellen ein statischer Unterdruck.*

### Messung des Drucks

Genau genommen müsste man den *statischen Druck*  $p$  mit einem Manometer messen, das mit der Strömung mitbewegt wird. Man kann jedoch auch Drucksonden benutzen, deren Öffnungen nach Bild 3-11a parallel zur Strombahn liegen. Hält man dagegen die Öffnung senkrecht zur Strombahn (Bild 3-11b), so wird der *Gesamtdruck*  $p_{\text{ges}}$  ermittelt. Der *dynamische Druck*  $p_d$  oder Staudruck wird aus einer Differenzmessung bestimmt. Ein Gerät nach Bild 3-11c heißt *Prandtl'sches Staurohr*. Es wird auch zur Geschwindigkeitsmessung in Strömungen verwendet. Man ermittelt die Geschwindigkeit aus der Höhe  $h$  im Manometer des Staurohres.

**Bild 3-11**

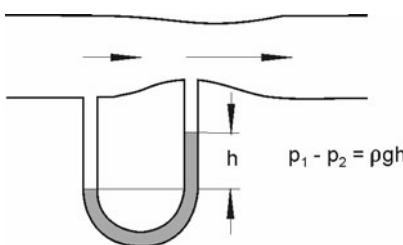
Messung des Drucks in strömenden Medien:  
a) statischer Druck  $p$ ,  
b) Gesamtdruck (Pitot-Rohr)  $p_{ges}$ ,  
c) dynamischer Druck  $p_d$  als Differenzmessung (Prandtl'sches Staurohr)

### Venturi-Düse

Zur Messung des Volumenstromes  $\dot{V}$  werden Drosselgeräte eingesetzt. Bei der Venturi-Düse wird ein durchströmendes Rohr leicht eingeeckt und es wird der Druck  $p_1$  und  $p_2$  an zwei Stellen mit den Querschnittsflächen  $A_1$  und  $A_2$  gemessen (Bild 3-12). Aus der Gleichung von Bernoulli (3.31) kann der Volumenstrom ermittelt werden

$$\dot{V} = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(1 - A_2^2/A_1^2)}}.$$

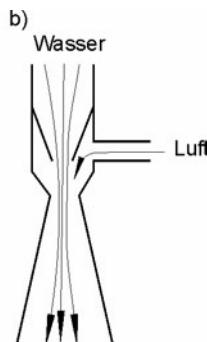
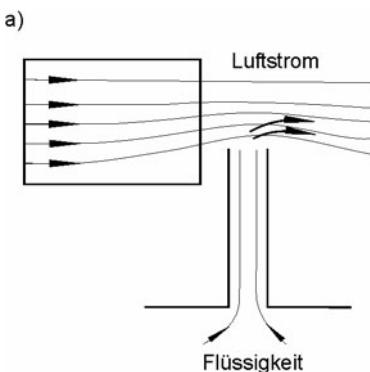
Venturi-Düse

**Bild 3-12**

Messung des Volumenstroms  $\dot{V}$  mit einer Venturi-Düse

### Saugeffekte bei Strömungen

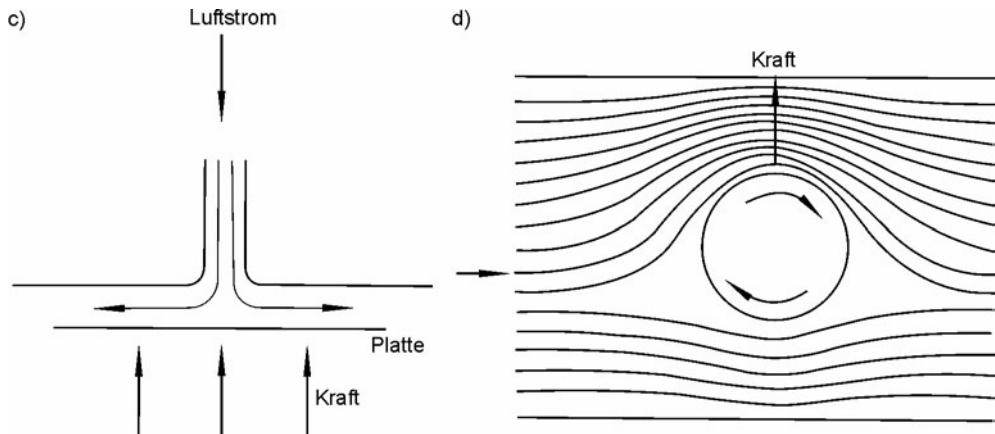
Eine weitere Anwendung der Bernoulli'schen Gleichung bietet der Zerstäuber (Bild 3-13a). Der Querschnitt eines Luftstromes wird am Zerstäuberrohr verkleinert und die Strombahnen ziehen sich zusammen. Es entsteht ein Unterdruck, der die Flüssigkeit aus dem Rohr saugt und zerstäubt. Nach einem ähnlichen Prinzip arbeitet eine Wasserstrahlpumpe (Bild 3-13b). An einer Einengung wird die Wasserströmung zusammengeschnürt und es entsteht ein Unterdruck, der Luft ansaugt.

**Bild 3-13 a und b**

Saugwirkungen in Strömungen durch einen statischen Unterdruck in Bereichen hoher Geschwindigkeit:  
a) Zerstäuber,  
b) Wasserstrahlpumpe,

### Hydrodynamisches Paradoxon

Mit diesem Begriff wird die Erscheinung bezeichnet, bei der ein Medium aus einem Rohr gegen eine quergestellte Platte strömt und diese unter bestimmten Bedingungen anzieht (Bild 3-13c). Dies liegt daran, dass durch eine hohe Strömungsgeschwindigkeit ein hoher dynamischer Druck und damit ein statischer Unterdruck entsteht.



**Bild 3-13 c und d**

Saugwirkungen in Strömungen durch einen statischen Unterdruck in Bereichen hoher Geschwindigkeit:  
c) Hydrodynamisches Paradoxon, d) Magnuseffekt

### Magnuseffekt

Ein rotierender Zylinder oder eine Kugel erfährt in einer Strömung eine Kraft nach Bild 3-13d. Durch Reibung werden die Stromlinien bei der Rotation mitgenommen und zusammengedrängt. Im Bereich enger Stromlinien, d. h. hoher Geschwindigkeit, entsteht ein statischer Unterdruck und eine ablenkende Kraft. Man kann deren Wirkung z. B. bei angeschnittenen Bällen beim Tennis erkennen.

### Flugzeug

Durch geeignete Formgebung lässt es sich beim Tragflügel erreichen, dass die Luft nach unten abgelenkt wird (Bild 3-14). Dadurch entsteht eine Impulsübertragung und eine Auftriebskraft  $F$ . Diese ist proportional zum *dynamischen Druck*  $\rho v^2 / 2$  und zum *Auftriebsbeiwert*  $c$ :

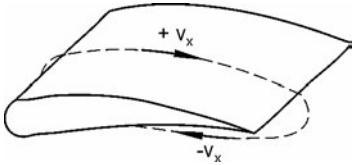
$$F = cA\rho v^2 / 2 ,$$

Dynamische Auftriebskraft

wobei  $A$  die Flügelfläche und  $v$  die Geschwindigkeit ist. Man kann die Auftriebskraft auch aus der Bernoulli'schen Gleichung berechnen. Durch die Wölbungen von Ober- und Unterseite ändert sich oben die Geschwindigkeit um  $+v_x$  und unten um  $-v_x$ . Insgesamt entsteht dadurch eine Zirkulation um den Flügel. Wegen der unterschiedlichen Geschwindigkeiten ist der dynamische Druck oben höher als unten. Nach der Bernoulli'schen Gleichung (3.31a) resultiert ein statischer Unterdruck. Man berechnet ihn zu

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} [(v + v_x)^2 - (v - v_x)^2] = 2\rho v v_x \quad \text{und erhält damit für die Auftriebskraft } F:$$

$F = \Delta p A = 2 A \rho v v_x$ . Der Auftriebsbeiwert beträgt also  $c = 4v_x/v$ .



**Bild 3-14**  
Dynamische Querkraft  
an einem Tragflügel

### Torricelli'sches Ausströmungsgesetz

Die Ausströmungsgeschwindigkeit  $v$  einer Flüssigkeit aus einem Behälter kann mit Hilfe des Energiesatzes berechnet werden. Befindet sich die Oberfläche in der Höhe  $h$  über dem Ausfluss-Loch, so erhält man die Gleichung, die auch für den freien Fall gilt:

$$v = \sqrt{2gh} . \quad \text{Ausströmungsgeschwindigkeit } v$$

Infolge von innerer Reibung und durch Bildung von Wirbeln verkleinert sich dieser Wert.

**Beispiel 3.3.1 (a)** Ein Wasserrohr verengt seinen Durchmesser  $d$  auf die Hälfte. Um welchen Faktor steigt die Strömungsgeschwindigkeit  $v$ ?

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt:  $v_2/v_1 = A_1/A_2 = d_1^2/d_2^2 = 4$ .

**Beispiel 3.3.1 (b)** Welches Querschnittsverhältnis  $A_1/A_2$  hat eine Venturidüse (Bild 3-12), die bei einer Luftströmung ( $\rho_L = 1,29 \text{ kg/m}^3$ ) mit einer Geschwindigkeit  $v_1 = 4,6 \text{ m/s}$  einen Differenzdruck von  $p_1 - p_2 = 196 \text{ Pa}$  ergibt.

Die Gleichung von Bernoulli lautet:  $p_1 + \rho_L v_1^2 / 2 = p_2 + \rho_L v_2^2 / 2$ .

Nach  $v_2$  augelöst:  $v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho_L} - v_1^2} = 16,8 \text{ m/s}$ . Damit folgt:  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{v_2}{v_1} = 3,65$ .

**Beispiel 3.3.1 (c)** In einem Wasserbehälter, der 1,5 m hoch mit Wasser gefüllt ist, befindet sich an der Unterseite ein Loch. Mit welcher Geschwindigkeit strömt das Wasser aus? Ändert sich die Geschwindigkeit, wenn der Behälter mit Öl gefüllt ist?

Das Torricelli'sche Ausströmungsgesetz lautet:  $v = \sqrt{2gh} = 5,4 \text{ m/s}$ . Der Wert ist unabhängig von der Art der Flüssigkeit.

### 3.3.2 Innere Reibung

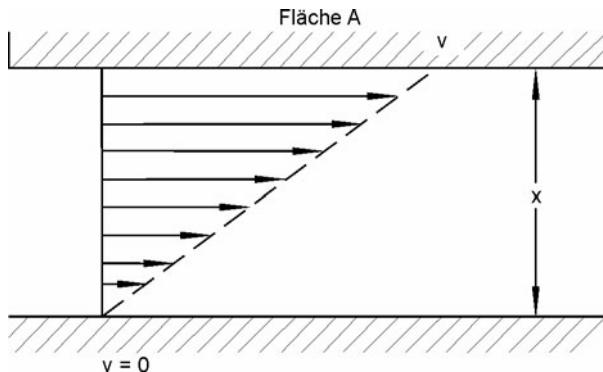
In vielen Fällen ist die Idealisierung der Reibungsfreiheit, wie sie in Abschnitt 3.3.1 gemacht wurde, eine brauchbare Näherung. Bei zahlreichen technischen Prozessen ist jedoch der Einfluss der Reibung spürbar (Tabelle 2.5). Im Folgenden wird die innere Reibung in Flüssigkeiten beschrieben.

#### Definition der Zähigkeit

Jeder Autofahrer weiß, dass es Öle verschiedener *Zähigkeit* gibt. Dieser Begriff soll an Bild 3-18 erläutert werden. Eine Platte der Fläche  $A$  wird in einem Abstand  $x$  parallel zu einer festen Oberfläche bewegt. Der Zwischenraum ist mit einer Flüssigkeit ausgefüllt. Bei langsamer Bewegung haftet die Flüssigkeit an der jeweiligen Oberfläche und die entstehende Strömung ist laminar. Zur Bewegung ist eine Kraft  $F$  erforderlich, da zwischen den Flüssigkeits-

schichten Reibungskräfte wirken. Bei kleineren Schichtdicken ist das Geschwindigkeitsprofil linear. Man stellt experimentell fest, dass die Reibungskraft  $F$  proportional zur Fläche  $A$  der Platte und zur Geschwindigkeit  $v$  ist. Dagegen nimmt die Kraft mit  $F$  zunehmendem Abstand  $x$  ab:

$$F = \eta A \frac{v}{x} \quad [\eta] = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = \text{Pa} \cdot \text{s}.$$
Zähigkeit  $\eta$       (3.32)



**Bild 3-15**  
Reibung in Flüssigkeiten,  
Geschwindigkeit in verschiede-  
nen Flüssigkeitsschichten

Diese Gleichung gilt nur, wenn  $v$  und  $x$  klein sind, so dass ein lineares Geschwindigkeitsgefälle herrscht. Der Koeffizient der inneren Reibung  $\eta$  wird *dynamische Zähigkeit* oder *Viskosität* genannt. Die Zähigkeit  $\eta$  hängt vom Medium und der Temperatur ab (Tabelle 3.3). Die Einheit beträgt  $[\eta] = \text{Ns/m}^2 = \text{Pa} \cdot \text{s}$  (= 10 Poise). Bisweilen wird der Quotient  $\nu = \eta / \rho$  als *kinematische Zähigkeit* bezeichnet (Einheit:  $[\nu] = \text{m}^2 / \text{s} = 10 \text{ Stokes}, 1 \text{ mm}^2 / \text{s} = 1 \text{ cSt}$ ).

**Tabelle 3.3** Zähigkeit  $\eta$  einiger Stoffe bei verschiedenen Temperaturen (1,01 bar)

Stoff	$\vartheta$ $^\circ\text{C}$	$\eta$ $\text{Ns/m}^2$	Stoff	$\vartheta$ $^\circ\text{C}$	$\eta$ $\text{Ns/m}^2$
Wasser	0	0,00179	Luft	0	0,000017
	20	0,00101		20	0,000018
	50	0,00055	Schmieröl	20	0,1 bis 0,2
	100	0,00028		80	0,02 bis 0,25

### Reale Rohrströmung

In realen Strömungen macht sich der Einfluss der Reibung bemerkbar. Bei kleinen Geschwindigkeiten sind reale Strömungen *laminar*. Bei höheren treten Wirbel auf, die im nächsten Abschnitt diskutiert werden. Von praktischer Bedeutung ist die Berechnung der *laminar* durch ein Rohr fließenden Flüssigkeitsmenge. Durch Reibung erleidet die Flüssigkeit einen Energieverlust, der proportional mit der Rohrlänge wächst. Die Strömungsgeschwindigkeit ist längs des Rohres die gleiche; die kinetische Energie ist also konstant. Ein Energieverlust kann nur auf Kosten der potentiellen Energie gehen, die durch den jeweiligen statischen Druck gegeben ist. Die Messung zeigt daher ein lineares Druckgefälle. (Bei idealer Strömung ohne Reibung ist

der statische Druck konstant.) Ausgehend von dem Newton'schen Reibungsgesetz (3.32) lässt sich die durch ein Rohr tretende Flüssigkeitsmenge für *laminare Strömung* berechnen (*Gesetz von Hagen und Poiseuille*):

$$\dot{V} = \frac{V}{t} = \frac{\pi r^4 (p_1 - p_2)}{8\eta l}. \quad \text{Rohrströmung} \quad (3.33)$$

Dabei bedeuten  $\dot{V}$  das Volumen  $V$ , das in der Zeit  $t$  durch das Rohr strömt und  $p_1 - p_2$  die statische Druckdifferenz zwischen den Rohrenden.  $r$ ,  $l$  und  $\eta$  sind Rohrradius, -länge und dynamische Zähigkeit. Man beachte, dass das durchströmte Volumen mit  $r^4$  wächst. Die Natur berücksichtigt dies: Zur Erhöhung der Blutzirkulation ist eine leichte Aufweitung der Adern effektiver als eine Erhöhung des Blutdruckes.

### Messung der Viskosität

Die Zähigkeit  $\eta$  kann mit einem Viskosimeter bestimmt werden. Bei einigen Geräten wird die Sinkgeschwindigkeit von Kugeln in Flüssigkeiten oder Gasen gemessen. Für die Reibungskraft auf umströmte Kugeln gilt das sogenannte *Stokes'sche Gesetz*:

$$F = 6\pi\eta rv. \quad \text{Zähigkeit } \eta \quad (3.34a)$$

Dabei sind  $r$  der Kugelradius und  $v$  die Geschwindigkeit, mit der sich die Kugel relativ zum Medium bewegt. Bringt man eine kleine Kugel in ein ruhendes Medium, beginnt diese zu sinken. Am Anfang bei geringer Geschwindigkeit ist die Reibungskraft  $F$  kleiner als die Gewichtskraft  $mg$ . Die Geschwindigkeit steigt so lange, bis Kräftegleichgewicht ( $m = 6\pi\eta rv$ ) herrscht. In diesem Fall bewegt sich die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit

$$v = \frac{mg}{6\pi\eta r} = \frac{2r^2\rho g}{9\eta}. \quad \text{Sinkgeschwindigkeit } v \quad (3.34b)$$

Durch Messung von  $v$  kann die Viskosität  $\eta$  bestimmt werden. Bei Berücksichtigung des Auftriebes muss in obiger Gleichung von der Dichte  $\rho$  der Kugel die Dichte des Mediums abgezogen werden.

In Kugelfallviskosimetern (z. B. nach Höppler) wird aus der Sinkgeschwindigkeit bzw. der Sinkzeit die Viskosität bei verschiedenen Temperaturen ermittelt. Allerdings kann für die Auswertung nicht (3.34b) herangezogen werden, da sich die Kugel in einem engen Rohr bewegt, wodurch die Strömung beeinflusst wird. Andere Gerätetypen (z. B. nach Haake) messen die Ausströmdauer von Flüssigkeiten durch ein enges Rohr.

### SAE-Skala

Die Zähigkeit von Motorölen wird nach den Richtlinien der American Society of Automotive Engineers (SAE) klassifiziert. Dickflüssige Sommeröle mit SAE 30 weisen eine Viskosität von  $\nu = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  ( $0,12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ) bei  $40^\circ\text{C}$  ( $100^\circ\text{C}$ ) auf, dünnflüssige Winteröle mit SAE 20:  $\nu = 0,68 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  ( $0,09 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ).

### Aerosole

Gleichung 3.34b hat große Bedeutung im Umweltschutz, da sie die Sinkgeschwindigkeit von Aerosolen beschreibt. Für derartige Teilchen im  $\mu\text{m}$ -Bereich und darunter ergeben sich sehr

kleine Sinkgeschwindigkeiten, d. h. sie bleiben über Monate oder Jahre in der Luft. Luftverschmutzungen sind oft an Aerosole gekoppelt und werden über große Entfernnungen verbreitet.

**Beispiel 3.3.2 (a)** Wie groß ist der Volumenstrom durch eine  $l = 2 \text{ km}$  lange Wasserleitung mit dem Radius  $r = 10 \text{ cm}$ , die an einem Behälter angeschlossen ist, in welchem das Wasser konstant  $h = 5 \text{ m}$  hoch steht?

Mit der Druckdifferenz von  $p_1 - p_2 = \rho gh = 49050 \text{ Pa}$  folgt nach dem Gesetz von Hagen und Poiseuille:

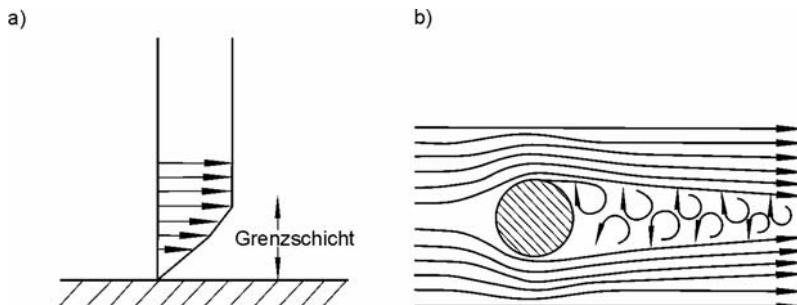
$$\dot{V} = \frac{\pi r^4 (p_1 - p_2)}{8\eta l} = 9,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = 0,95 \text{ Liter/s} \text{ (Zähigkeit } \eta \text{ für } 20^\circ\text{C siehe Tab. 3.4).}$$

**Beispiel 3.3.2 (b)** Wie groß ist die Sinkgeschwindigkeit eines Staubteilchen ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) mit einem Radius von  $r = 0,1 \mu\text{m}$  in Luft (Zähigkeit  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$  (Tabelle 3.3))?

$$v = \frac{2r^2 \rho g}{9\eta} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ m/s. Feine Staubteilchen (Aerosole) breiten sich weltweit aus.}$$

### 3.3.3 Turbulenz

Bei höheren Strömungsgeschwindigkeiten entstehen *Wirbel*. Zur Erklärung der Wirbelbildung dient Bild 3-19. An der Oberfläche eines umströmten Körpers haftet eine Grenzschicht, innerhalb der die Geschwindigkeit von Null bis auf den Maximalwert zunimmt. Ein Flüssigkeitsvolumen, das sich innerhalb der Grenzschicht bewegt, steht unter der Wirkung einer beschleunigten Strömung und dem bremsenden Einfluss der Grenzschicht. Innerhalb der Grenzschicht verliert es an Energie und es kann allmählich zur Ruhe kommen. Die darüber gleitenden Flüssigkeitsschichten bewirken ein Einrollen der Flüssigkeit (oder des Gases). Es entsteht eine Drehbewegung und ein Wirbel, der sich losreißt und mit der Strömung wandert. Wirbel werden also durch Energieverluste aufgrund der inneren Reibung in der Grenzschicht verursacht.



**Bild 3-16** Zur Entstehung von Wirbeln:

- a) Darstellung der Grenzschicht
- b) Die äußeren, schnelleren Schichten rollen die inneren ein.

### Strömungswiderstand

Durch die Bildung von *Wirbeln* überträgt ein Fahrzeug kinetische Energie an die Luft. Ein Körper kann also nur mittels einer Kraft durch ein Gas oder eine Flüssigkeit bewegt werden. Die *Widerstandskraft*  $F$  im Fall von Wirbelbildung ist proportional zum Staudruck  $\rho v^2 / 2$ , und man kann folgenden Ausdruck ableiten:

$$F = F_v = c_w A \rho v^2 / 2 .$$

Widerstandskraft  $F$  (3.35a)

In der Gleichung bedeutet  $A$  die Querschnittsfläche des Körpers,  $v$  die Geschwindigkeit und  $c_w$  den Widerstandsbeiwert. Einige Widerstandsbeiwerte aus Windkanalversuchen sind in Tabelle 3.4 zusammengestellt. Man beachte den kleinen Wert von  $c_w$  für eine Stromlinienform. Da die Wirbel meist hinten entstehen, ist eine Formverbesserung bei einem Kfz stark am hinteren Teil wirksam. Die *Antriebsleistung*  $P$  wächst mit der dritten Potenz von  $v$ :

$$P = Fv = c_w A \rho v^3 / 2 . \quad \text{Antriebsleistung } P \quad (3.35b)$$

Dies erklärt den stark ansteigenden Benzinverbrauch von Autos bei hohen Geschwindigkeiten.

**Tabelle 3.4** Widerstandsbeiwerte  $c_w$  verschiedener Körper

Körper	$c_w$
Stromlinienkörper	0,06
Kugel	0,25 bis 0,43
Kreisplatte	1,1 bis 1,3
Halbkugelschale (Öffnung gegen Strömung)	1,33
Halbkugelschale (Öffnung mit Strömung)	0,34
PKW	0,29 bis 0,5
LKW	0,6 bis 1,2

**Beispiel 3.3.3** Welche Leistung  $P$  muss der Motor eines Autos mit dem Widerstandsbeiwert  $c_w = 0,6$  und der Querschnittsfläche von  $A = 4 \text{ m}^2$  aufbringen, um die Luftreibung ( $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$ ) bei einer Geschwindigkeit von  $v = 50, 100$  und  $200 \text{ km/h}$  zu überwinden?

$$P = c_w A \rho v^2 / 2 . \text{ Es folgt: } P_{50\text{km/h}} = 4,15 \text{ kW}, \quad P_{100\text{km/h}} = 16,6 \text{ kW}, \quad P_{200\text{km/h}} = 66,4 \text{ kW} .$$

### Reynolds-Zahl Re

Bei langsamer Bewegung sind Strömungen laminar; bei wachsender Geschwindigkeit setzt Turbulenz ein. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, für Strömungen eine dimensionslose Größe, die Reynolds-Zahl  $Re$ , zu definieren ( $Re$  vergleicht die kinetische Energie mit der Reibungsenergie):

$$Re = \rho Lv / \eta , \quad \text{Reynolds-Zahl } Re \quad (3.36)$$

wobei  $\rho$  die Dichte,  $v$  die Geschwindigkeit und  $\eta$  die Zähigkeit des strömenden Mediums darstellen. Die Größe  $L$  beschreibt die charakteristische Länge des umströmten Körpers, z. B. den Rohrdurchmesser oder den Kugeldurchmesser. Turbulenz tritt ab einer bestimmten kritischen Reynolds-Zahl auf. Bei Rohrströmungen entsteht Turbulenz bei  $Re > 2300$ . Mit (3.36) kann daraus die Geschwindigkeit berechnet werden, bei welcher Turbulenzen einsetzen.

Die Kenntnis der Reynolds-Zahl gestattet die richtige Durchführung von Versuchen in Windkanälen an verkleinerten Modellen. Dabei ist zu beachten, dass Modellversuch und Großausführung durch die gleiche Reynolds-Zahl  $Re$  beschrieben wird.

Die Reibungskräfte bei Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen sind in Tabelle 2.4 zusammengestellt.

### Atemströmung

In der Lunge des Menschen herrscht laminare Strömung, Volumenstrom  $\dot{V}$  und der Atemdruck  $\Delta p$  sind proportional zueinander. Ein derartiger linearer Zusammenhang wird durch das Gesetz von Hagen und Poiseuille (3.33) gegeben, das hier in anderer Form geschrieben wird  $\Delta p = R \dot{V}$ . Man nennt  $R$  den bronchialen Widerstand. Er beträgt beim normalen Menschen ungefähr  $200 \text{ Pa/(Liter/s)}$ . Anders ist das Strömungsverhalten der Nase; die Strömung ist (zur Erwärmung und Filterung der Atemluft) turbulent. In diesem Fall existiert ein quadratischer Zusammenhang zwischen nasalem Atemdruck und Volumenstrom  $\Delta p \sim \dot{V}^2$ . Nach (3.35a) kann man einen  $c_w$ -Wert definieren; er liegt für die Nase bei  $c_w \approx 15 - 20$ .

## 4 Gravitation

Fragt man nach dem Ursprung der Kräfte in der klassischen Mechanik, so kommt man zu zwei Arten der Wechselwirkung: der Gravitation und den elektromagnetischen Kräften. Auf den ersten Blick erscheint es merkwürdig, dass neben der Gravitation nur elektromagnetische Wirkungen auf makroskopische Massen vorhanden sind. Dies liegt daran, dass bei der Kraftübertragung in der Mechanik die Elektronenhüllen der Moleküle aufeinander wirken. In diesem Kapitel wird die Gravitation beschrieben. Obwohl deren Ursachen noch weitgehend unbekannt sind, kann man ihre Wirkungen relativ einfach formelmäßig erfassen. Im ersten Abschnitt geht es um die klassischen Aspekte der Gravitation; im zweiten werden moderne Gesichtspunkte im Zusammenhang mit der Astrophysik behandelt.

### 4.1 Klassische Gravitationstheorie

#### 4.1.1 Gravitationsgesetz

Die Bewegung der Gestirne wird seit langem aus praktischem und theoretischem Interesse untersucht. Die modernen Erkenntnisse beginnen mit Nikolaus Kopernikus (1473-1543). Er entwickelte ein heliozentrisches Weltsystem, bei dem die Sonne im Mittelpunkt steht. Die Beschreibung der Planetenbahnen wurde dadurch verständlich. Die Inquisition verfolgte mit Folter und Hinrichtungen die Verbreitung wissenschaftlicher Erkenntnisse über diese neue Lehre. Basierend auf den astronomischen Betrachtungen (noch ohne Fernrohr) von Tycho de Brahe (1546-1601), gelang Johannes Kepler (1571-1630) die empirische Formulierung der so genannten Kepler'schen Gesetze. Die Erkenntnis, dass die Schwerkraft die Ursache für die Planetenbewegung ist, stammt von Isaak Newton (1643-1727). Er formulierte das Gravitationsgesetz, das die Anziehungskraft zweier Massen beschreibt. Aus diesem Gesetz können die drei Kepler'schen Gesetze abgeleitet werden. Völlig neue Erkenntnisse zur Gravitation wurden von Albert Einstein (1879-1955) gewonnen. Er entwickelte die allgemeine Relativitätstheorie, welche die Newton'sche Formulierung als Näherung mit enthält.

#### Gravitationsgesetz

Zwischen zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  im Abstand  $r$  voneinander wirkt die *Gravitationskraft*  $F$ :

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} . \quad \text{Gravitationskraft } F \quad (4.1)$$

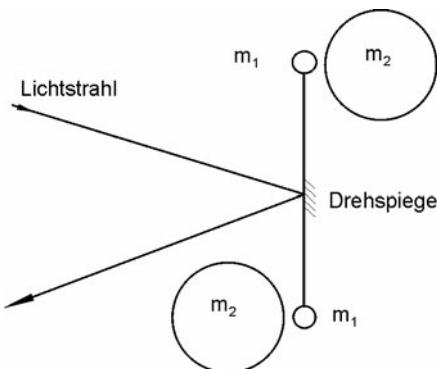
Die *Gravitationskonstante*  $\gamma$  hat den Wert  $\gamma = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kgs}^2}$ . Durch das Gravitationsgesetz kann die Erdbeschleunigung  $g$  mit der Erdmasse  $m_E$  und dem Erdradius  $r_E$  verknüpft werden. Ein Vergleich der Gewichtskraft  $mg$  mit der Gravitationskraft  $F$  auf der Erde liefert:

$$g = \gamma \frac{m_E}{r_E^2} . \quad \text{Erdbeschleunigung } g \quad (4.2)$$

Verlässt man die Erdoberfläche und geht in die Höhe  $h$ , nimmt die Erdbeschleunigung ab und man muss in (4.2)  $r$  durch  $r + h$  ersetzen. Aus (4.2) kann mit den Werten für  $\gamma, g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , und dem Erdradius  $r_E = 6370 \text{ km}$  die Erdmasse berechnet werden:  $m_E = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .

### Messung von $\gamma$

Die Gravitationskonstante  $\gamma$  wurde erstmals von Cavendish (1798) mit Hilfe einer Drehwaage gemessen. Die beiden Probemassen  $m_1$  werden an einen Torsionsdraht symmetrisch aufgehängt. Bringt man die beiden größeren Massen  $m_2$  in die Position von Bild 4-1, wirkt zwischen den Massen die Gravitationskraft. Dadurch entsteht auf den Torsionsdraht ein Drehmoment. Die Massen  $m_1$  bewegen sich so lange auf die Massen  $m_2$  zu, bis die Gravitationskraft durch die rücktreibende Torsionskraft kompensiert wird. Der Drehwinkel  $\Delta\varphi$  wird über einen kleinen Drehspiegel mit einem Lichtzeiger gemessen. Daraus werden die Gravitationskraft und die Gravitationskonstante  $\gamma$  ermittelt. Moderne Instrumente zur Messung der Größe und Richtung der Gravitationskraft arbeiten mit einem supraleitenden Probekörper, der über einem Magneten schwebt.



**Bild 4-1**  
Gravitationswaage zur  
Messung der Gravitationskonstanten  $\gamma$

### Ebbe und Flut

Die Gezeiten des Meeres werden durch die Gravitationskraft des Mondes verursacht. Das Meerwasser wird auf den Mond zu angezogen, die Erde dreht sich etwa einmal pro Tag unter dem entstehenden Flutberg. Auch die Erdkruste wird bis zu 30 cm angehoben. Eine zweite Flutwelle entsteht auf der Gegenseite der Erde durch die Zentrifugalkraft, so dass ungefähr alle 12 Stunden Flut und 6 Stunden später Ebbe auftritt. Die Zentrifugalkraft wird dadurch erzeugt, dass sich Mond und Erde um den gemeinsamen Schwerpunkt drehen.

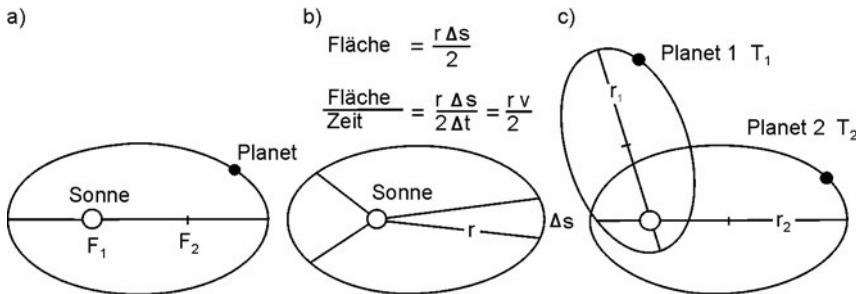
### 4.1.2 Planetensystem

Aus dem Gravitationsgesetz lassen sich wichtige Aussagen über die Planetenbahnen ableiten, die ursprünglich von Kepler empirisch gefunden wurden. Die Aussagen gelten für alle periodisch wiederkehrenden Himmelskörper (Planeten, Kometen) im Sonnensystem sowie sinngemäß für Monde oder Satelliten.

#### Erstes Kepler'sches Gesetz

*Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen. In einem der Brennpunkte steht die Sonne (Bild 4-2a).*

Die Berechnung der Bahnen erfolgt aus dem Gleichgewicht der Kräfte: die Gravitationskraft ist gleich der Zentrifugalkraft.



**Bild 4-2** Darstellung der Kepler'schen Gesetze:

1. Gesetz: Planetenbahnen ( $F_1, F_2$  = Brennpunkte der Ellipsenbahn),
2. Gesetz: Flächengeschwindigkeit ( $= rv/2$ ),
3. Gesetz: Umlaufzeiten  $T$  und Halbachsen  $r$

### Zweites Kepler'sches Gesetz

Der von der Sonne zum Planeten zeigende Ortsvektor  $\vec{r}$  überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Bild 4-2b).

Man sagt auch: die Flächengeschwindigkeit ist konstant. Diese Eigenschaft folgt aus der Erhaltung des Drehimpulses  $L$  bei der Bewegung eines Planeten der Masse  $m_P$  und der Geschwindigkeit  $v$  (2.55):

$$L = rm_P v = \text{const.}$$

Die Größe  $rv$  ist das Doppelte der Flächengeschwindigkeit (Bild 4-2b). Damit ist das zweite Kepler'sche Gesetz bewiesen.

### Drittes Kepler'sches Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten  $T$  der verschiedenen Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen  $r$  der Bahnellipsen (Bild 4-2c):

$$T_1^2 : T_2^2 : \dots = r_1^3 : r_2^3 : \dots$$

Für den Sonderfall einer Kreisbewegung einer Planetenmasse  $m_P$  um die Sonnenmasse  $m_S$  kann diese Aussage leicht bewiesen werden. Aus dem Kräftegleichgewicht folgt, dass die Gravitationskraft (4.1) gleich der Zentrifugalkraft (2.33) ist:

$$\gamma \frac{m_S m_P}{r^2} = m_P \frac{v^2}{r} = m_P \frac{(2\pi r)^2}{T^2 r} \quad \text{oder} \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma m_S} = \text{const.}$$

Damit ist die Aussage des dritten Kepler'schen Gesetzes bewiesen. Daten über Planeten und den Mond sind in Tabelle 4.1 zusammengestellt.

**Beispiel 4.1.2** Wie groß ist die Umlaufgeschwindigkeit  $v$  und die Umlaufzeit  $T$  eines Satelliten, der auf einer Kreisbahn in einer Höhe von  $h = 300$  km die Erde umkreist (Erdradius und Erdmasse siehe Tabelle 4.1,

$$\gamma = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kgs}^2)$$

Aus dem 3. Keppler'schen Gesetz folgt:  $T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma m_E} (r_E + h)^3$  und  $T = 5429$  s.

**Tabelle 4.1** Daten des Planetensystems und des Mondes  
(Bahnradius = große Halbachse, Beschleunigung auf der Oberfläche,  
Einheit für Radius = Erdradius, Einheit für Masse = Erdmasse)

	Bahnradius m	Umlaufzeit s	Exzentrizität	Radius 6370 km	Masse $5,97 \cdot 10^{24}$ kg	Beschl. m/s <sup>2</sup>
Merkur	$5,79 \cdot 10^{10}$	$7,60 \cdot 10^6$	0,206	0,38	0,05	3,60
Venus	$1,08 \cdot 10^{11}$	$1,94 \cdot 10^7$	0,007	0,96	0,81	8,50
Erde	$1,50 \cdot 10^{11}$	$3,16 \cdot 10^7$	0,017	1,00	1,00	9,81
Mars	$2,28 \cdot 10^{11}$	$5,94 \cdot 10^7$	0,093	0,52	0,11	3,76
Jupiter	$7,78 \cdot 10^{11}$	$3,74 \cdot 10^8$	0,048	11,27	317,5	26,0
Saturn	$1,43 \cdot 10^{12}$	$9,30 \cdot 10^8$	0,056	9,47	95,1	11,2
Uranus	$2,87 \cdot 10^{12}$	$2,66 \cdot 10^9$	0,046	3,72	14,5	9,40
Neptun	$4,50 \cdot 10^{12}$	$5,20 \cdot 10^9$	0,009	3,60	17,6	15,0
Pluto	$5,92 \cdot 10^{12}$	$7,82 \cdot 10^9$	0,249	0,45	0,05	8,0
Sonne	—	—	—	109,3	$3,35 \cdot 10^5$	2725
Mond	$3,84 \cdot 10^8$	1 Monat	0,055	0,273	0,0123	1,60

### 4.1.3 Potenzielle Energie

Die Feldstärke  $\vec{g}$  des Gravitationsfeldes beschreibt die Kraft  $\vec{F}$ , die auf eine Masseneinheit  $m$  wirkt. Diese Definition ist analog zur Definition der elektrischen Feldstärke, welche die Kraft auf eine Ladungseinheit angibt. Für die Gravitationsfeldstärke gilt somit:

$$\vec{F} = m \vec{g}.$$

Es ist klar, dass  $\vec{g}$  identisch mit dem Vektor der Erdbeschleunigung ist. Soll eine Masse  $m$  gegen die Anziehungskraft des Gravitationsfeldes der Erdmasse  $m_E$  verschoben werden, muss Arbeit  $W$  aufgewendet werden (4.1):

$$W = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{mm_E}{r^2} dr = \gamma mm_E \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (4.3)$$

Dabei wurde angenommen, dass die Masse  $m$  in radialer Richtung  $\vec{r}$  bewegt wird. Diese Annahme kann jedoch fallengelassen werden, da eine seitliche Verschiebung bei konstantem Radius  $r$  ohne Arbeitsaufwand möglich ist. Das Minuszeichen berücksichtigt, dass  $\vec{F}$  und  $d\vec{r}$  antiparallel liegen. Die Energie, um die Masse von der Erdoberfläche (Erdradius =  $r_E$ ) aus dem Gravitationsfeld zu befördern ( $r_2 \rightarrow \infty$ ), berechnet sich nach (4.3) mit  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  zu:

$$W_\infty = \gamma mm_E / r_E = mg r_E. \quad \text{Für } 1 \text{ kg resultiert: } W_\infty = 6,25 \cdot 10^7 \text{ Ws} \approx 17 \text{ kWh}.$$

Näherungsweise erhält man aus (4.3) für die potenzielle Energie in der Nähe der Erdoberfläche ( $r_1 \approx r_2 \approx r_E$ ,  $r_2 - r_1 = h$ ) die bekannte Gleichung:  $W = mgh$ .

**Beispiel 4.1.3** Die Energie, um die Masse von der Erdoberfläche (Erdradius  $r_E$ ) aus dem Gravitationsfeld zu befördern ( $r_2 \rightarrow \infty$ ), berechnet sich nach (4.3) zu:

$$W_\infty = \gamma mm_E / r_E = mgr_E. \quad \text{Für } 1 \text{ kg resultiert: } W_\infty = 6,25 \cdot 10^7 \text{ Ws} \approx 17 \text{ kWh}.$$

#### 4.1.4 Satellitenbahnen

Für die Bewegung frei fliegender Massen im Gravitationsfeld der Erde sind unterschiedliche Flugbahnen möglich. Die Gesamtenergie des Körpers bestimmt, ob die Bahn eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel darstellt, und er nach dem Abschuss wieder zur Erde zurückkehrt, sie umkreist oder das Schwerkraftfeld verlässt.

##### Umlaufbahn

Wenn die kinetische und potentielle Energie eines Satelliten kleiner als die Energie  $W_\infty$  ist, stellt die Bahnkurve eine Ellipse oder als Sonderfall einen Kreis dar. Für den Kreis erhält man folgende Gleichgewichtsbedingung:

Die Zentrifugalkraft  $\frac{mv_1^2}{r_E + h}$  ist gleich der Gravitationskraft  $\gamma \frac{mm_E}{(r_E + h)^2} = \frac{mgr_E^2}{(r_E + h)^2}$ . Daraus folgt:

$$v_1^2 = \frac{gr_E^2}{r_E + h}. \quad 1. \text{ Kosmische Geschwindigkeit } v_1 \quad (4.4a)$$

**Beispiel 4.1.4 (a)** Die Geschwindigkeit eines Satelliten auf einer Kreisbahn in Erdnähe mit  $r_E \gg h$  nennt man erste kosmische Geschwindigkeit. Sie beträgt:  $v_1 = \sqrt{r_E \cdot g} = 7.9 \text{ km/s}$ .

Geostationäre Satelliten in der Höhe  $h$  sollen sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Erde drehen und sich stets an gleicher Stelle über der Erde befinden. Dies ist nur bei Bahnen um den Äquator möglich. Die Geschwindigkeit ist dann  $v = \omega(r_E + h)$ . Mit (4.4a) erhält man:

$$r_E + h = \sqrt[3]{gr_E^2 / \omega^2} = 40000 \text{ km}. \quad \text{Geostationäre Umlaufbahn} \quad (4.4b)$$

Es gilt also nur eine Umlaufbahn für geostationäre Satelliten. Für Geschwindigkeiten, die größer als die erste kosmische Geschwindigkeit  $v_1$  (aber kleiner als  $v_2$ ) sind, umkreisen die Satelliten die Erde auf elliptischen Bahnen. Ist die Geschwindigkeit kleiner als  $v_1$ , so ist die Bahnkurve ebenfalls eine Ellipse, allerdings stürzt der Körper dabei auf die Erde (Bild 4-3). Es handelt sich hierbei um ballistische Bahnen von Interkontinental-Raketen, die bedauerlicherweise entwickelt wurden und uns bedrohen. Wurfparabeln entstehen auf der Erde nur in der Näherung einer konstanten Erdbeschleunigung.

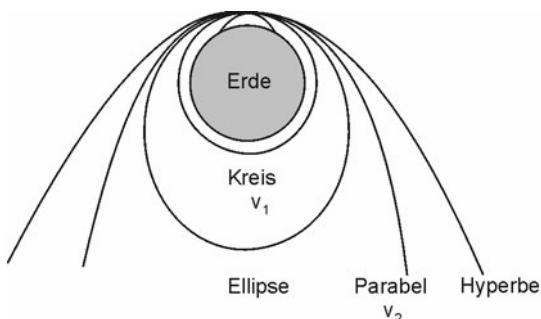


Bild 4-3

Verschiedene Bahnen bei Satelliten. Ab der ersten kosmischen Geschwindigkeit  $v_1 = 7,9 \text{ km/s}$  entsteht in Erdnähe eine kreis- oder ellipsenförmige Umlaufbahn, bei Geschwindigkeiten darunter fällt der Satellit wieder auf die Erde zurück. Bei der zweiten kosmischen Geschwindigkeit  $v_2 = 11,2 \text{ km/s}$  verlässt der Satellit parabelförmig den Bereich der Erde.

##### Raumfahrt

Zum Verlassen einer Masse  $m$  aus dem Anziehungsbereich der Erde von der Oberfläche aus (Erdradius  $r_E$ ) muss die kinetische Energie mindestens gleich  $W_\infty$  sein:

$$\frac{mv_2^2}{2} = mgr_E \quad \text{oder} \quad v_2 = \sqrt{2gr_E} = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}. \quad 2. \text{ Kosmische Geschwindigkeit } v_2 \quad (4.5)$$

Wird ein Körper mit dieser so genannten zweiten kosmischen Geschwindigkeit von der Erde abgeschossen, entfernt er sich selbstständig auf einer parabelförmigen Bahn von der Erde. Übersteigt die Geschwindigkeit den Wert aus (4.5), ist die Bahnkurve eine Hyperbel.

**Beispiel 4.1.4 (b)** Eine Rakete der Masse  $m$  soll den Anziehungsbereich der Erde verlassen. Welche Energie ist dafür erforderlich?

Nach (4.5) beträgt die Anfangsgeschwindigkeit:  $v_2 = \sqrt{2gr_E} = 11,2 \text{ km/s}$ .

Daraus folgt für die kinetische Energie:  $W_\infty = mv_2^2/2$ . Für jedes Kilogramm der Rakete ( $m = 1 \text{ kg}$ ) erhält man in Übereinstimmung mit Beispiel 4.1.3:  $W_\infty \approx 17 \text{ kWh}$ .

## 4.2 Relativitätstheorie

Bis zum Beginn des 19. Jahrhundert glaubte man, Raum und Zeit seien absolute Größen: Es schien sicher zu sein, dass 1 Meter oder 1 Sekunde in jedem System gleich sind. Durch die Entwicklung der *speziellen Relativitätstheorie* zeigte sich, dass die 'klassischen' Gesetze der Mechanik bei sehr schnellen Bewegungen im Bereich der Lichtgeschwindigkeit ergänzt werden müssen (Abschnitt 4.2.1). Die *allgemeine Relativitätstheorie* (Abschnitt 4.2.2) verknüpft die Gravitationskraft mit den Begriffen Raum und Zeit. Es handelt sich um eine Theorie der Gravitation, die zum Verständnis des Weltalls beiträgt.

### 4.2.1 Spezielle Relativitätstheorie

#### Galilei-Transformation

Im Folgenden werden zwei Koordinatensysteme angenommen. Das System 1 soll ruhen und das System 2 sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegen. Wir betrachten eine Bewegung, die im ruhenden System 1 die Geschwindigkeit  $\vec{v}_1$  hat. Im System 2 wird eine andere Geschwindigkeit  $\vec{v}_2$  festgestellt. In der klassischen Mechanik wird der Übergang vom System 1 nach System 2 dadurch vollzogen, dass man die Relativgeschwindigkeit der Systeme  $\vec{v}$  addiert:

$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}.$	Galilei-Transformation	(4.6)
------------------------------------	------------------------	-------

Dies ist der Grundgedanke der *Galilei-Transformation*, die Abläufe in bewegten Koordinatensystemen ineinander umrechnet. Ein praktisches Beispiel ist die Ermittlung der Geschwindigkeit  $\vec{v}_1$  eines Fußgängers in einem fahrenden Zug. Nach (4.6) muss zur Geschwindigkeit des Fußgängers im Zug  $\vec{v}_2$  die Zuggeschwindigkeit  $\vec{v}$  addiert werden. Man kann beweisen, dass die Naturgesetze in Systemen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander bewegen, gleich sind (Inertialsysteme, Abschnitt 2.2.3). Man spürt nicht die gleichmäßige Bewegung in einem Flugzeug oder Zug.

#### Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Messungen der Lichtgeschwindigkeit ergeben, dass sie unabhängig von der Bewegung der Lichtquelle oder des Empfängers immer den gleichen Wert von  $c_0 = 299\,792 \text{ km/s}$  zeigen. Dies ist nach den Gesetzen der klassischen Physik nicht zu verstehen. Die einfache Addition

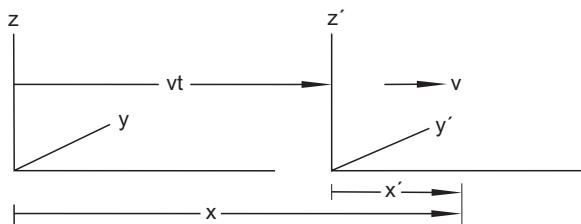
der Geschwindigkeiten nach (4.6) und die Galilei-Transformation versagen bei hohen Geschwindigkeiten.

### Lorentz-Transformation

Einstein zog aus dem oben zitierten Befund folgende Schlüsse:

- (1) *Die Zeit verläuft in zueinander bewegten Systemen unterschiedlich.*
- (2) *Die Raumkoordinaten (Abstände) verändern sich durch die Bewegung.*

Raum und Zeit hängen also von der Geschwindigkeit eines Systems ab. Ein Beobachter, der sich im System mitbewegt, merkt nichts von diesen Effekten. Die Aussagen (1) und (2) werden nur in einem anderen ruhenden System bei Beobachtung des bewegten Systems festgestellt. Man registriert eine Verlangsamung der Zeit und Verkürzung von der Koordinaten. Bemerkbar machen sich diese Effekte erst für Geschwindigkeiten in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit  $c_0$ .



**Bild 4-4**

Gegeneinander mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegte Koordinatensysteme  $(x,y,z)$  und  $(x',y',z')$  zur Berechnung der Lorentz-Transformation

Zur Berechnung dieses Problems werden zwei Koordinatensysteme  $(x,y,z)$  und  $(x',y',z')$  betrachtet, die sich in Richtung der  $x$ - und  $x'$ -Achsen gegeneinander mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegen (Bild 4-4). Beispielsweise ist das  $(x,y,z)$ -System auf einem Bahnhof lokalisiert und  $(x',y',z')$  in einem fahrenden Zug. Für einen Betrachter im  $(x,y,z)$ -System erscheint die  $x'$ -Koordinate um den Faktor  $k$  verkürzt. Ein Punkt  $x'$  im fahrenden Zug wird im ruhenden System an der Stelle  $x$  gemessen, die sich mit der Zeit  $t$  ständig entfernt:  $(x',y',z')$

$$x = kx' + vt. \quad (4.7a)$$

Eine Person im Zug  $(x',y',z')$  beobachtet die Dinge von einem unterschiedlichen Standpunkt aus. Der Bahnhof entfernt sich mit der Geschwindigkeit  $-v$ , die Zeit verläuft anders und wird mit  $t'$  bezeichnet. Ein Punkt  $x$  auf dem ruhenden Bahnhof wird im bewegten System an der Stelle  $x'$  registriert. Ruhende und bewegte Systeme sind mathematisch gleichwertig. Analog zu (4.7a) gilt:

$$x' = kx - vt'. \quad (4.7b)$$

Die Nullpunkte der Zeiten  $t$  und  $t'$  sind so gewählt, dass bei  $t = t' = 0$  die Ursprünge der Koordinatensysteme zusammenfallen. Zu diesem Zeitpunkt breitete sich vom gemeinsamen Koordinatenursprung eine Lichtwelle aus. Die Lichtgeschwindigkeit  $c_0$  in beiden Systemen ist gleich:

$$x = c_0 t \quad \text{und} \quad x' = c_0 t'. \quad (4.8)$$

Elementare Umformungen führen zu Eliminierung von  $k$  und zu folgenden Gleichungen, die man *Lorentz-Transformation* nennt:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \quad t = \frac{t' + x'v/c_0^2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \quad t' = \frac{t + xv/c_0^2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}. \quad \text{Lorentz-Transformation} \quad (4.9a)$$

In der klassischen Mechanik gilt  $v \ll c_0$ ; so dass sich näherungsweise die *Galilei-Transformation* ergibt:

$$t = t', \quad x = x' + vt \quad \text{und} \quad x' = x - vt. \quad \text{Galilei-Transformation} \quad (4.9b)$$

Bei hohen Geschwindigkeiten  $v \approx c_0$  treten jedoch eine Reihe ungewohnter Effekte auf. Als erstes erkennt man, dass eine Geschwindigkeit  $v > c_0$  nicht möglich ist, da sonst imaginäre Zahlen auftauchen.

### Gleichzeitigkeit

Die Zeit ist nicht absolut, sie hängt von der Bewegung des Beobachters ab. Damit wird auch der Begriff der Gleichzeitigkeit fragwürdig.

### Zeitdehnung

Wir befinden uns im Koordinatensystem  $(x, y, z)$  mit der Zeit  $t$ . Man kann aus (4.9a) ableiten, dass die Zeit im bewegten System  $t'$  langsamer verläuft. Dieser Effekt ist an instabilen Teilchen beobachtbar: schnelle Myonen zerfallen langsamer als ruhende.

### Längenkontraktion

Wird in einem ruhenden System ein Maßstab betrachtet, der sich mit hoher Geschwindigkeit bewegt, stellt man theoretisch fest, dass er durch die Bewegung verkürzt wird.

### Relativistische Masse

Die Relativitätstheorie führt zur Erkenntnis, dass die Masse  $m$  eines Teilchens mit der Geschwindigkeit  $v$  zunimmt:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 + v^2/c_0^2}}. \quad \text{Relativistische Masse } m \quad (4.10)$$

$m_0$  stellt die *Ruhemasse* bei der Geschwindigkeit  $v = 0$  dar. Die Massenzunahme ist in Teilchenbeschleunigern, bei denen nahezu Lichtgeschwindigkeit  $c_0$  erreicht wird, feststellbar.

### Masse und Energie

Masse  $m$  ist eine Form der Energie  $E$  nach folgender Beziehung:

$$E = mc_0^2. \quad \text{Masse und Energie} \quad (4.11)$$

Eine Umwandlung von Masse  $m$  in Energie  $E$  erfolgt bei der Kernspaltung oder der Kernfusion (Abschnitt 12.3). Ein anderes Beispiel ist die Vernichtung eines Elektrons und eines Positrons. Dabei verschwindet die Masse und es entsteht Strahlungsenergie.

Die zitierten Aussagen der Relativitätstheorie folgen aus der Lorentz-Transformation (4.9a); die Beweise übersteigen jedoch den Rahmen dieses Buches.

**Beispiel 4.2.1** In einem Linearbeschleuniger für medizinische Anwendungen werden Elektronen auf eine Energie von 35 MeV gebracht. Wie groß sind a) die Elektronenmasse und b) die Geschwindigkeit? Diese Aufgabe ist nur mit Kenntnissen aus Kapitel 8 und 10 lösbar.

- a) Die elektrostatische Energie beträgt  $eU = 35 \text{ MeV}$ . Diese Energie äußert sich in einem Zuwachs der Masse:

$$eU = mc_0^2 - m_0c_0^2. \text{ Es folgt: } m = (eU + m_0c_0^2) / c_0^2 = 6,3 \cdot 10^{-29} \text{ kg} = 69,4 m_0.$$

(Mit  $m_0c_0^2 = 511 \text{ keV}$ ,  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ )

- b) Man erhält für die Geschwindigkeit aus (4.10):  $v = c_0 \sqrt{1 - ((m_0/m)^2)} = 0,9999c_0$ .

## 4.2.2 Allgemeine Relativitätstheorie

Die spezielle Relativitätstheorie beschreibt den Einfluss hoher Geschwindigkeiten auf die Zeit, die Länge und die Masse. Außerdem gibt sie die Äquivalenz von Masse und Energie an. Bei der Gravitation versagt die Theorie. Nach dem Gravitationsgesetz wirkt eine Anziehungskraft, die von der Entfernung zweier Massen abhängt. Bewegt man eine Masse, so müsste sich die Kraftübertragung sofort auswirken. Da höhere Geschwindigkeiten als  $c_0 = 299\,792 \text{ km/s}$  nicht auftreten, muss die spezielle Relativitätstheorie ergänzt werden. Einstein entwickelte eine neue Vorstellungen zur Gravitation, die den Namen *allgemeine Relativitätstheorie* trägt.

### Raum

Nach dieser Theorie ist die Gravitation nicht eine Kraft wie andere. Die Massen im Weltraum „verbiegen“ den Raum und verändern die Zeit. Körper wie die Erde werden nicht durch die Gravitationskraft dazu gebracht, sich auf gekrümmten Bahnen zu bewegen. Stattdessen ist der Raum „gekrümmt“ und die Körper durchlaufen in diesem verbogenen System die kürzeste Entfernung. Fügt man dem dreidimensionalen Raum eine vierte Koordinate, die Zeit, hinzu, so bewegen sich die Gestirne auf geraden vierdimensionalen Linien.

### Licht

Auch das Licht folgt dieser Raumkrümmung; es bewegt sich nicht geradlinig durch das All, sondern es wird an Gestirnen abgelenkt. Diesen Effekt können die Astronomen beobachten.

### Zeit

Eine andere Aussage der allgemeinen Realitätstheorie ist die Verlangsamung der Zeit in der Nähe von Massen. Die Zeit in Satelliten verläuft langsamer als auf der Erde. Dieser Effekt ist von praktischer Bedeutung bei Navigationssystemen, die von Satelliten gesteuert werden. Ohne diese Kenntnis entstehen Navigationsfehler von mehreren Kilometern.

Die Konsequenzen der allgemeinen Realitätstheorie auf die Kosmologie übersteigen den Rahmen dieses Buches.

## 5 Thermodynamik

Die Thermodynamik stellt die Lehre von der Wärme und Energie dar. Der thermische Zustand eines Systems, z. B. eines Gases, wird makroskopisch durch eine Anzahl von Zustandgrößen, wie Temperatur, Druck, Volumen u. a. festgelegt. Die thermischen Eigenschaften der Materie beruhen auf der Wechselwirkung der Atome und Moleküle. Die mikroskopische Beschreibung der Thermodynamik erfolgt durch die kinetische Gastheorie, die auf statistischen Methoden der klassischen Mechanik basiert.

### 5.1 Zustandsgleichungen von Gasen

Die Thermodynamik von Gasen benutzt eine Reihe von Zustandsgrößen, wie Temperatur, Druck, Volumen.

#### 5.1.1 Temperatur

##### Definition

Zur Kennzeichnung des Wärmezustandes eines Körpers dient eine weitere Basisgröße des SI-Systems, die Temperatur  $T$  (Tabelle 1.1). Die genaue Definition der thermodynamischen oder *absoluten Temperatur* ist kompliziert und erfolgt mittels des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik. Im Folgenden werden daher nur Messvorschriften zur Bestimmung der Temperatur niedergelegt.

Die Basiseinheit im SI-System für die Temperatur  $T$  ist 1 Kelvin = 1 K. Das Kelvin wird durch den Tripelpunkt von reinem Wasser bei  $T = 273,16$  K definiert. Der Tripelpunkt liegt etwa 0,01 K über dem Gefrierpunkt des luftgesättigten Wassers.

1 Kelvin ist der 273,16te Teil der Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.

##### Absoluter Nullpunkt

Atome und Moleküle besitzen eine Geschwindigkeit, die von der Temperatur abhängt. Wärme stellt kinetische Energie der Atome und Moleküle dar. In Gasen und Flüssigkeiten stoßen die Moleküle häufig gegeneinander und führen eine so genannte *Brown'sche Molekularbewegung* aus. In Festkörpern dagegen schwingen Atome und Moleküle im Kristallgitter um ihre Gleichgewichtslage. Zwischen der Temperatur  $T$  und der mittleren kinetischen Energie  $E_{kin}$  eines Moleküls besteht ein linearer Zusammenhang:

$$E_{kin} \sim T.$$

Daraus folgt, dass ein absoluter Nullpunkt  $T = 0$  existiert. Negative Temperaturen sind in der Kelvin-Skala nicht möglich. Am Nullpunkt ist die thermische Bewegungsenergie  $E_{kin} = 0$  und es findet keine Wärmebewegung mehr statt. Genauer muss man sagen: den Molekülen kann keine thermische Energie mehr entzogen werden. Die Quantenmechanik zeigt nämlich, dass wegen der Unschärferelation von Heisenberg eine geringe Nullpunktsenergie vorhanden ist.

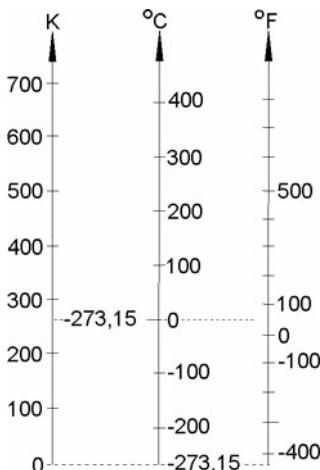
### Temperaturskalen

In der Praxis gibt es neben der Temperatureinheit 1 K noch verschiedene andere Einheiten. In Bild 5-1 sind die Celsius-, Fahrenheit- und Kelvinskala nebeneinander gestellt. Zur Festlegung der Celsiusskala dienen zwei Fixpunkte des Wassers: der Punkt des schmelzenden Eises bei 0 °C und der Siedepunkt unter Normaldruck (1,013 bar) bei 100 °C. Die Temperatur in °C wird durch den Formelbuchstaben in  $\vartheta$  symbolisiert. Kelvin- und Celsiusskala sind gegeneinander um 273,15 K gegeneinander verschoben. Temperaturdifferenzen sind in beiden Systemen gleich:

$$\frac{T}{K} = \frac{\vartheta}{^{\circ}\text{C}} + 273,15 \quad \text{und} \quad \frac{\Delta T}{K} = \frac{\Delta \vartheta}{^{\circ}\text{C}}.$$

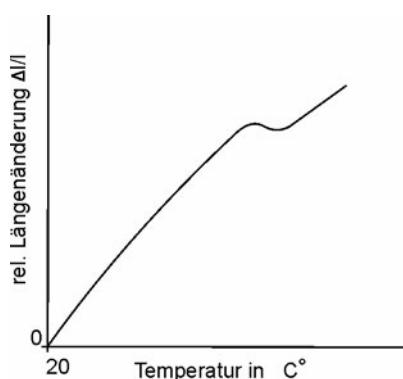
In den USA wird die Temperatur in Fahrenheit (°F) angegeben:

$$\frac{\vartheta}{^{\circ}\text{C}} = \left( \frac{\vartheta'}{^{\circ}\text{F}} - 32 \right) \cdot \frac{5}{9}.$$



**Bild 5-1**

Vergleich der Temperaturskalen nach Kelvin (absolute Temperatur), Celsius und Fahrenheit



**Bild 5-2**

Thermische Ausdehnung eines Eisenstabes.  
Bei 769 °C ändert sich die Kristallstruktur

### Ausdehnung fester und flüssiger Körper

Festkörper dehnen sich bei Erwärmung in der Regel aus. Die relative Längenänderung  $\frac{\Delta l}{l}$  eines Stabes der Länge  $l$  ist innerhalb bestimmter Grenzen proportional zur Temperaturerhöhung  $\Delta T$ :

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta T \quad [\alpha] = \frac{1}{K} = \frac{1}{^{\circ}\text{C}}. \quad \text{Ausdehnungskoeffizient } \alpha \quad (5.1a)$$

Bei Temperaturänderungen  $\Delta T$  fällt bei der Differenzbildung der Temperaturnullpunkt heraus, so dass  $\Delta T$  in K oder °C angegeben werden kann. Tabelle 5.1 enthält die Ausdehnungs-

koeffizienten  $\alpha$  einiger Stoffe. Die Wärmeausdehnung muss beispielsweise bei der Konstruktion von Brücken, Schienen oder Rohrleitungen berücksichtigt werden. Bild 5-2 zeigt die Ausdehnung eines Eisenstabes in Abhängigkeit von der Temperatur. Es treten Abweichungen von der Linearität auf, d. h.  $\alpha$  ist temperaturabhängig. Gleichung 5.1a gilt daher mit konstantem  $\alpha$  nur in einem eingeschränkten Temperaturbereich, der in Tabelle 5.1 angegeben ist. Die Abnahme der Länge bei hohen Temperaturen in Bild 5-2 ist mit einer Änderung der Kristallstruktur verbunden. Die Temperatur, bei der die Umkristallisation statt findet, nennt man Curie-Temperatur; sie liegt für Eisen bei 769 °C.

**Tabelle 5.1** Ausdehnung von Festkörpern und Flüssigkeiten

- a) Linearer Ausdehnungskoeffizient  $\alpha$   
einiger Festkörper bei verschiedenen  
Temperaturen
- b) Raumausdehnungskoeffizient  $\gamma$   
einiger Flüssigkeiten  
(bei 18 °C)

Stoff	$\alpha$ in $10^{-6}/\text{K}$		Stoff	$\gamma$ in $10^{-3}/\text{K}$
	0 bis 100 °C	0 bis 500 °C		
Aluminium	23,8	27,4	Wasser	0,18
Kupfer	16,4	17,9	Quecksilber	0,18
Stahl	11,1	13,9	Petroleum	0,96
Stahlbeton	14		Heizöl	0,9 - 1,0
Rostfreier Stahl	16,4	18,2	Ethanol	1,1
Invarstahl	0,9		Äther	1,62
Glas	9	10	Schwefelsäure	0,55
Quarzglas	0,5	0,6		

Für Flüssigkeiten und Festkörper gilt für die Volumenänderung  $\Delta V$  in Abhängigkeit von der Temperaturänderung  $\Delta T$  ein ähnliches Gesetz:

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T \quad [\gamma] = \frac{1}{\text{K}} = \frac{1}{^\circ\text{C}} . \quad \text{Raumausdehnungskoeffizient } \gamma \quad (5.1\text{b})$$

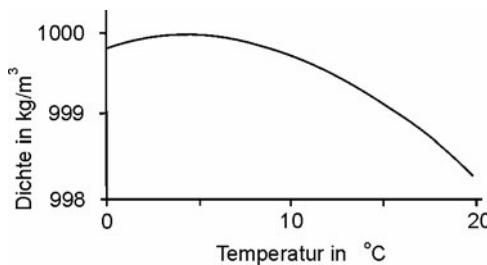
Zwischen den Konstanten  $\alpha$  und  $\gamma$  besteht folgender Zusammenhang:

$$\gamma = 3 \alpha . \quad \gamma \text{ und } \alpha \quad (5.1\text{c})$$

Aus (5.1b) ergibt sich für die Dichte  $\rho = \frac{m}{V}$ :

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = -\gamma \Delta T . \quad \text{Dichteänderung } \Delta \rho$$

Diese Gleichung gilt wiederum nur in bestimmten Temperaturbereichen: für Wasser beispielsweise erst oberhalb von 8 °C (Bild 5-3). Die Dichte des Wassers hat bei 4 °C ein Maximum; bei tieferen Temperaturen nimmt die Dichte erstaunlicherweise ab. Diese Anomalie gewährleistet, dass Seen von oben zufrieren.

**Bild 5-3**

Dichte des Wassers in Abhängigkeit von der Temperatur. Bei 4 °C existiert ein Maximum der Dichte

### Temperaturmessung

Von theoretischem Interesse ist das Gasthermometer, das häufig als Versuch im Physikalischen Praktikum vorhanden ist. An einen dünnen Gaskolben (ca. 0,1 Liter) wird eine Kapillare angeschmolzen, die zu einem Manometer führt. Das Volumen  $V$  wird konstant gehalten, so dass die Temperatur  $T$  durch Messung des Drucks  $p$  ermittelt werden kann (siehe (5.28):  $p = \text{const.} \cdot T$ ). Durch die Messung zweier Fixpunkte, z. B. bei 0 °C und 100 °C, kann das Thermometer kalibriert werden. Die wichtigsten Thermometer der Praxis beruhen auf folgenden temperaturabhängigen Effekten: Volumenänderung von Flüssigkeiten und Gasen, Längenänderungen bei Bimetallthermometern, Änderung des elektrischen Widerstandes von Metallen und Halbleitern, Thermospannung bei Thermoelementen, Wellenlängenänderung der emittierten Strahlung bei optischen Pyrometern. Die Anwendungsbereiche verschiedener Verfahren zeigt Tabelle 5.2.

**Tabelle 5.2** Messbereiche verschiedener Methoden zur Temperaturmessung

Temperatur (K)	10 <sup>-1</sup>	1	10	10 <sup>2</sup>	10 <sup>3</sup>	10 <sup>4</sup>
Gasthermometer						
Dampfdruck			—		—	
Flüssigkeitsthermometer				—		
Metallausdehnung				—		
Thermoelemente				—		
Widerstandsthermometer			—			
Pyrometer				—		
Suszeptibilität				—		

**Beispiel 5.1.1 (a)** Im amerikanischen Fernsehen wird die Temperatur mit 28 °F angegeben.

$$\text{Die Temperatur in } ^\circ\text{C lautet: } \frac{\vartheta}{^\circ\text{C}} = (\frac{\vartheta'}{^\circ\text{F}} - 32) \cdot \frac{5}{9} = -2,22 \text{ und } \vartheta = -2,22 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

**Beispiel 5.1.1 (b)** Welchen Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha$  besitzt ein Metallstab, dessen Länge sich bei einer Temperaturhöhung von 20 °C auf 100 °C um 0,19 % ändert? Um welches Metall kann es sich handeln?

$$\text{Mit } \frac{\Delta l}{l} = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ und } \Delta T = 80 \text{ K erhält man: } \alpha = \frac{\Delta l}{l \cdot \Delta T} = 23,8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}.$$

Nach Tabelle 5.1 kann es sich um Aluminium handeln.

**Beispiel 5.1.1 (c)** Wie stark dehnt sich eine 20 m lange Stahlbetonbrücke ( $\alpha = 14 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ) bei einer Erhöhung der Temperatur von -30 °C auf +35 °C aus?

$$\Delta l = \alpha \Delta T = 0,0182 \text{ m} = 1,82 \text{ cm}$$

**Beispiel 5.1.1 (d)** Ein See kühlte sich im Winter kontinuierlich ab. Dabei wird zunächst das an der Oberfläche abgekühlte Wasser auf den Grund sinken. Bleibt das immer so?

Nein, nach Bild 5-3 hat Wasser von 4 °C die höchste Dichte. Bei dieser Temperatur wird das 4 °C-Wasser sich auf dem Grund sammeln. Bei weiterer Abkühlung fällt die Dichte und das kalte Wasser sammelt sich an der Oberfläche, die dann zufrieren kann.

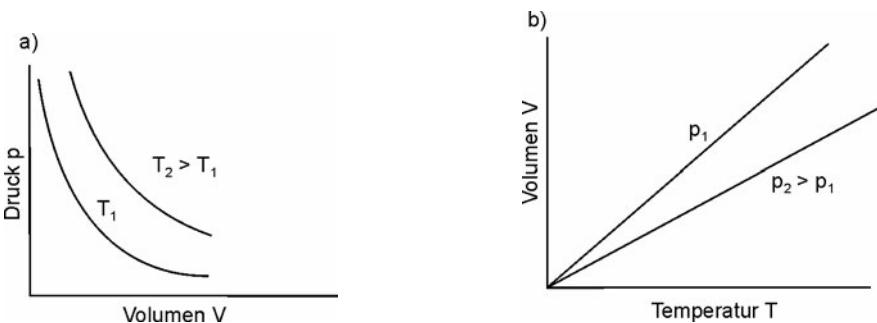
### 5.1.2 Zustandsgleichung idealer Gase

Bei der Beschreibung von Gasen unterscheidet man zwischen idealen und realen Gasen. *Ideale Gase* gehorchen der relativ einfachen Zustandsgleichung (5.4); das Eigenvolumen der Moleküle und Effekte der Gasverflüssigung werden außer Betracht gelassen. Bei normalen Temperaturen verhalten sich viele Gase ideal.

#### Isotherme Kompression

Der Zusammenhang zwischen Druck  $p$  und Volumen  $V$  eines idealen Gases wird durch das Gesetz von *Boyle-Mariotte* beschrieben:

$$pV = \text{const} \quad \text{bei } T = \text{const.} \quad \text{Isotherme Änderung} \quad (5.2)$$



**Bild 5-4** Verhalten eines idealen Gases:

- a) Druck und Volumen bei konstanter Temperatur ( $pV = \text{const.}$ , Gesetz von Boyle-Mariotte)
- b) Volumen und Temperatur bei konstantem Druck ( $V/T = \text{const.}$ , Gesetz von Gay-Lussac)

Die Gleichung gilt nur bei konstanter Temperatur (*isotherm*), da der Druck auch durch die Temperatur beeinflusst wird. Die in Bild 5-4a angegebenen Kurven werden *Isothermen* genannt.

#### Isobare Zustandsänderung

Erwärmst man ein Gas bei konstantem Druck  $p$  (*isobar*), vergrößert sich das Volumen  $V$ . Für ideale Gase gilt das *Gesetz von Gay-Lussac*:

$$\frac{V}{T} = \text{const.} \quad \text{bei } p = \text{const.} \quad \text{Isobare Änderung} \quad (5.3a)$$

Bild 5-4b zeigt den linearen Zusammenhang zwischen Volumen  $V$  und Temperatur  $T$ . Am absoluten Nullpunkt  $T = 0$  wird das Volumen des Gases  $V = 0$ . An dieser Stelle wird klar, dass ideale Gase die Realität bei tiefen Temperaturen nicht wiedergeben.

Man kann das Gesetz von Gay-Lussac auch in der Celsiuskala ( $\vartheta$ ) formulieren. Aus (5.3a) folgt:  $V/T = V_0/T_0$ . Durch Ersetzen von  $T$  (in K) durch  $\vartheta$  (in  $^{\circ}\text{C}$ ) ergibt sich:

$$V = V_0 \left( 1 + \frac{\vartheta}{273,15 \text{ } ^{\circ}\text{C}} \right) = V_0 (1 + \gamma \vartheta). \quad \text{Isobare Änderung} \quad (5.3\text{b})$$

Das Gasvolumen bei  $\vartheta = 0 \text{ } ^{\circ}\text{C}$  ( $T_0 = 273,15 \text{ K}$ ) beträgt  $V_0$ . Nach (5.3b) ist der Raumausdehnungskoeffizient  $\gamma$  für alle idealen Gase bei  $p = \text{const.}$  gleich:

$$\gamma = \frac{1}{273,15 \text{ K}} = \frac{1}{273,15 \text{ } ^{\circ}\text{C}}. \quad \text{Raumausdehnungskoeffizient } \gamma \quad (5.3\text{c})$$

Durch Messung von  $\gamma$  erhält man somit einen Hinweis auf die Lage des absoluten Nullpunktes bei  $\vartheta = -273,15 \text{ } ^{\circ}\text{C}$ .

### Zustandsgleichung

Die Gesetze von Boyle-Mariotte und Gay-Lussac (5.2) und (5.3a) mit den jeweiligen Randbedingungen ( $T = \text{const.}$  oder  $= p \text{ const.}$ ) können zur *Zustandsgleichung für ideale Gase* kombiniert werden:

$$\frac{pV}{T} = \text{const.} \quad \text{Zustandsgleichung} \quad (5.4\text{a})$$

Man kann überprüfen, dass (5.2 und 5.3a) in der Zustandsgleichung als Sonderfälle enthalten sind. Eine andere Form von (5.4a) lautet:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}. \quad \text{Zustandsgleichung} \quad (5.4\text{b})$$

Der Index 0 symbolisiert die Normalbedingungen:  $T_0 = 273,15 \text{ K}$  ( $= 0 \text{ } ^{\circ}\text{C}$ ) und Normaldruck  $p_0 = 101\,325 \text{ Pa} = 1,01325 \text{ bar}$ . Durch Einführung der Dichte  $\rho_0 = m/V_0$  resultiert:

$$pV = mR'T \quad \text{mit} \quad R' = \frac{p_0}{T_0 \rho_0}. \quad \text{Zustandsgleichung} \quad (5.4\text{c})$$

Man nennt  $R'$  die *spezielle Gaskonstante*, da sie für jedes Gas einen anderen Wert annimmt (Tabelle 5.3).

*Jedes ideale Gas wird durch eine Konstante  $R'$  charakterisiert. Es wird durch drei Zustandsgrößen  $p$ ,  $V$  und  $T$  beschrieben:  $pV = mR'T$  (5.4c).*

**Beispiel 5.1.2 (a)** In einen geöffneten Kühlschrank ( $V = 140 \text{ Liter}$ ) strömt Luft mit  $p_0 = 1,0 \text{ bar}$  und  $17 \text{ } ^{\circ}\text{C}$  ein. Dann wird die Tür luftdicht geschlossen und die Temperatur sinkt auf  $10 \text{ } ^{\circ}\text{C}$  ab. Wie groß wird der Innendruck und welche Kraft wirkt auf die Tür ( $A = 0,5 \text{ m}^2$ )?

Die Zustandsgleichung lautet  $\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$ . Mit  $V = V_0 = 0,14 \text{ m}^3$ ,  $p_0 = 1,0 \text{ bar}$ ,  $T_0 = 290,15 \text{ K}$ ,  $T = 283,15 \text{ K}$  erhält man:  $p = 0,976 \text{ bar}$  und  $\Delta p = 0,024 \text{ bar} = 2400 \text{ Pa}$ . Für die Kraft gilt:  $F = \Delta p A = 1200 \text{ N}$ .

**Beispiel 5.1.2 (b)** Welches Luftvolumen entweicht aus einem Wohnraum von  $V_0 = 120 \text{ m}^3$ , wenn die Luft von  $5^\circ\text{C}$  auf  $20^\circ\text{C}$  erwärmt wird?

Der Druck bleibt konstant und es gilt:  $V/T = V_0/T_0$  mit  $T_0 = 278,15 \text{ K}$  und  $T = 293,15 \text{ K}$ . Es folgt  $V = 126,5 \text{ m}^3$ . Es entweichen  $6,5 \text{ m}^3$ .

**Beispiel 5.1.2 (c)** Die spezielle Gaskonstante für Luft beträgt  $R' = 290 \text{ J/(kgK)}$ . Wie hoch ist die Dichte der Luft bei  $p = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$  und  $22^\circ\text{C}$ ?

Aus (5.4c) folgt:  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p}{R'T} = 1,17 \text{ kg/m}^3$ .

### 5.1.3 Molare Größen

Eine Vereinfachung und allgemeine Darstellung der Gasgesetze entsteht durch Einführung einiger Begriffe aus der Chemie und Atomphysik. Zur Angabe der Zahl der Atome oder Moleküle gleicher Art benutzt man den Begriff *Stoffmenge*  $n$ , eine weitere SI-Basisgröße (Tabelle 1.1).

Die Stoffmenge  $n$  ist eine weitere Basisgröße mit der Einheit  $[n] = \text{mol}$ . Die Stoffmenge  $n = 1 \text{ mol}$  besteht aus  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  Atomen oder Molekülen:

$$1 \text{ mol} = 10^{-3} \text{ kmol} \rightarrow 6,022 \cdot 10^{23} \quad \text{Atome oder Moleküle.} \quad (5.5a)$$

Die Zahl der Teilchen in  $n = 1 \text{ mol}$  nennt man Avogadro'sche Konstante  $N_A$ :

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}. \quad \text{Avogadro'sche Konstante } N_A \quad (5.5b)$$

Alle idealen Gase mit gleicher Stoffmenge  $n$ , Temperatur  $T$  und gleichem Druck  $p$  besitzen auch gleiches Volumen.

Das molare Volumen  $V_{m0}$  von  $n = 1 \text{ mol}$  beträgt unter Normalbedingungen mit  $T_0 = 273,15 \text{ K} (= 0^\circ\text{C})$ ,  $p_0 = 101325 \text{ Pa} = 1,01325 \text{ bar}$ :

$$V_{m0} = 22,4138 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}. \quad \text{Molvolumen } V_{m0} \quad (5.5c)$$

Molare Größen werden mit dem Index  $m$  gekennzeichnet:

Eine molare Größe ist der Quotient einer Größe und der Stoffmenge.

Die molare Masse  $m_m$  beträgt:

$$m_m = \frac{m}{n} = M_r \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \quad [m_m] = \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}. \quad \text{Molmasse } m_m \quad (5.6)$$

Die Größe  $M_r$  mit  $[M_r] = 1$  stellt die relative Atom- oder Molekülmasse dar, die aus dem Periodensystem entnommen wird (Tabelle 5.3). Bei Molekülen addiert man die relativen Atommassen und erhält die entsprechende Molekülmasse. Gleichung 5.6 folgt aus dem Aufbau

des Periodensystems und der Definition der relativen Atommasse. Zusammengefasst gilt Folgendes:

*1 mol eines Gases besteht stets aus der gleichen Zahl von Molekülen und die Masse von 1 mol beträgt  $M_r$  Gramm.*

**Tabelle 5.3** Relative Molekularmasse  $m_m$  und spezielle Gaskonstante  $R'$  für einige Gase

Gas	$m_m$ kmol/kg	$R'$ J/(kgK)	$R = m_m R'$ J/(kmolK)
H <sub>2</sub>	2	4130	8260
He	4	2070	8280
O <sub>2</sub>	32	260	8320
CO <sub>2</sub>	44	189	8316
Luft		290	
ideales Gas			8314

### Allgemeine Gaskonstante $R$

Das molare Volumen ist analog zu (5.6) definiert:  $V_m = V / n$ . Unter Normalbedingungen erhält man  $V_{m0}$  (5.5c). Setzt man das molare Volumen  $V_{m0} = \frac{V_0}{n}$  in (5.4b) ein, erhält man:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_{m0} n}{T_0}.$$

Die Konstante  $p_0 V_{m0} / T_0$  fasst man zur universellen Gaskonstanten  $R$  zusammen:

$$R = \frac{p_0 V_{m0}}{T_0} = 8,31442 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}. \quad \text{Gaskonstante } R \quad (5.7)$$

Der Zahlenwert von  $R$  kann aus  $p_0 = 101325 \text{ Pa}$ ,  $T_0 = 273,15 \text{ K}$  und  $V_{m0} = 22,4138 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol}$  berechnet werden. Damit erhält man für die *allgemeine Zustandsgleichung*:

$$pV = nRT. \quad \text{Allgemeine Zustandsgleichung} \quad (5.4d)$$

Der Zusammenhang zwischen der speziellen ( $R'$ ) und allgemeinen ( $R$ ) Gaskonstante ergibt sich durch Vergleich von (5.4d) und (5.4c) (Tabelle 5.3):

$$R = m_m R'. \quad (5.4e)$$

*Alle idealen Gase werden durch die universelle Gaskonstante  $R$  beschrieben.*

(5.4d) kann umgeformt werden, indem man die Zahl der Moleküle  $N = nN_A$  einsetzt:

$$pV = \frac{NTR}{N_A} = NkT. \quad \text{Allgemeine Zustandsgleichung} \quad (5.4f)$$

Die Größe  $k$  ist die Boltzmann-Konstante:

$$k = \frac{R}{N_A} = 1,380658 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} . \quad \text{Boltzmann-Konstante} \quad (5.4g)$$

**Beispiel 5.1.3 (a)** Wie viele Moleküle  $N$  befinden sich in  $m = 1 \text{ g}$  Aluminium und in  $1 \text{ g}$  Sauerstoff ( $\text{O}_2$ )?

In 1 Mol befindet sich stets die gleiche Anzahl von Molekülen:  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ . Für Al gilt für die relative Atommasse  $M_i = 26,98$  (Tabelle 10.1) und die molare Masse  $m_m = 26,98 \text{ kg/kmol} = 26,98 \text{ g/mol}$ .

Man berechnet:  $N = \frac{m}{m_m} N_A = 2,23 \cdot 10^{22}$  in 1 g Al.

Für 1 Gramm  $\text{O}_2$  gilt:  $m_m = 32 \text{ g/mol}$  und  $N = 1,88 \cdot 10^{22}$ .

**Beispiel 5.1.3 (b)** Berechnen Sie aus der allgemeinen Zustandsgleichung für ideale Gase die Dichten  $\rho$  von  $\text{O}_2$ ,  $\text{H}_2$  und He (bei  $p = 1013 \text{ hPa}$ ,  $T = 273,15 \text{ K}$ ,  $R = 8314 \text{ J/(kmolK)}$ ).

$pV = nRT$  mit  $\rho = m/V$  und  $n = m/m_m$  folgt:  $\rho = pm_m/(RT)$ . Man entnimmt aus Tab. 10.1:  $m_{m\text{O}_2} = 32 \text{ g/mol}$ ,  $m_{m\text{H}_2} = 2 \text{ g/mol}$  und  $m_{m\text{He}} = 4 \text{ g/mol}$ .

Damit erhält man  $\rho_{\text{O}_2} = 1,427 \text{ kg/m}^3$   $\rho_{\text{H}_2} = 0,089 \text{ kg/m}^3$  und  $\rho_{\text{He}} = 0,178 \text{ kg/m}^3$ .

**Beispiel 5.1.3 (c)** Der Fülldruck eines Lasers mit  $\text{CO}_2$  beträgt bei  $20^\circ\text{C}$  1000 Pa. Wie groß ist die Zahl der Moleküle pro  $\text{cm}^3$ ?

Für ideale Gase gilt:  $pV = NkT$  (mit  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ ).

Die Zahl der Moleküle pro Volumen beträgt:  $\frac{N}{V} = \frac{p}{kT} = 2,47 \cdot 10^{17} \text{ 1/cm}^3$ .

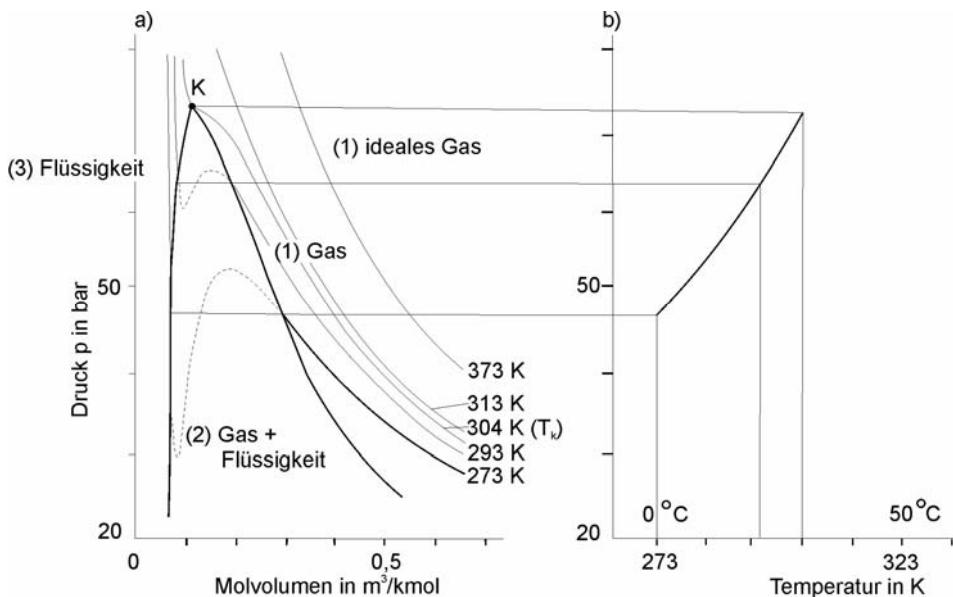
### 5.1.4 Reale Gase

Die Zustandsgleichung (5.4) gilt nur für ideale Gase. Die Isothermen nach Bild 5-4a sind Hyperbeln. Reale Gase verhalten sich insbesondere in Bereichen anders, in denen Phasenumwandlungen (z. B. Verflüssigung) auftreten. Sie gehorchen in guter Näherung der *Van-der-Waals'schen Zustandsgleichung*:

$$\left( p + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT . \quad \text{Reale Gase} \quad (5.8)$$

Druck  $p$  und Molvolumen  $V_m$  enthalten Korrekturgrößen, die durch experimentell zu bestimmende Konstanten  $a$  und  $b$  gegeben werden. Sie sind für jedes Gas verschieden.

Im Vergleich zur idealen Gasgleichung enthält die Van-der-Waals'schen Gleichung folgende Ergänzungen: Erstens wird vom Molvolumen  $V_m$  das Eigenvolumen der Moleküle  $b$  abgezogen. Dadurch wird nach (5.8) das Gasvolumen am absoluten Nullpunkt  $T = 0$  gleich dem Eigenvolumen  $b$  von  $n = 1 \text{ mol}$ . Da die Moleküle am absoluten Nullpunkt nicht völlig dicht gepackt sind, zeigen genauere Untersuchungen, dass  $b$  das vierfache Eigenvolumen darstellt. Zweitens wird zum äußeren Druck  $p$  der innere Druck oder Binnendruck durch die Anziehung der Gasmoleküle addiert. Es handelt sich um die gleichen Kräfte, die zur Oberflächenspannung führen. Die Wirkung des Binnendruckes auf ein Molekül ist proportional zur Dichte  $\rho$ . Die Zahl der Moleküle ist ebenfalls proportional zur Dichte. Damit ist der Binnendruck proportional zum Quadrat der Gasdichte  $\rho^2 = (m/V)^2 \sim 1/V_m^2$ , wie es in (5.8) dargestellt ist.



**Bild 5-5** Verhalten realer Gase:

- a) Isothermen nach der Van-der-Waals'schen Gleichung
- b) Ermittlung des Dampfdrucks als Funktion der Temperatur

Beim Ausmultiplizieren in (5.8) erkennt man, dass es sich um eine Funktion 3. Grades in  $V_m$  handelt. In Bild 5-5 sind die Isothermen für das reale Gas  $\text{CO}_2$  angegeben. Es treten Maxima und Minima auf, wie es für eine Kurve 3. Grades zu erwarten ist (gestrichelt gezeichnet). Im Experiment verläuft die Isotherme jedoch anders (durchgehend gezeichnet). Eine Abnahme des Druckes mit wachsender Kompression, wie es zwischen Maximum und Minimum der Kurve nach (5.8) berechnet wird, ist auch schwer verständlich. Der experimentelle waagerechte Verlauf der Isotherme kann dadurch konstruiert werden, dass die Flächeninhalte der gerechneten Kurve unter- und oberhalb der Geraden gleich sind.

Man unterscheidet in der Schar der Isothermen drei Bereiche (Bild 5-5a). Bei höheren Temperaturen können die oben behandelten Korrekturen vernachlässigt werden und es entstehen die Isothermen des idealen Gases:  $pV = \text{const}$ . In diesem Bereich 1 existiert nur Gas. Komprimiert man bei tiefen Temperaturen, verflüssigt sich das Gas. Während dieses Vorganges bleibt der Druck konstant. Im Bereich 2 existieren Gas und Flüssigkeit nebeneinander. Bei Wasser haben sich folgende Bezeichnungen eingebürgert: überhitzter Dampf (Bereich 1), trocken gesättigter Dampf (Grenzkurve) und Nassdampf (Bereich 2). Die Verflüssigung ist am linken Ende des Bereiches 2 abgeschlossen. Es gibt nur Flüssigkeit, die weitgehend inkompressibel ist. Die Isothermen verlaufen im Bereich 3 praktisch senkrecht.

### Kritischer Zustand

Im Punkt K von Bild 5-5a befindet sich das Gas im *kritischen Zustand*. Er ist durch die kritische Temperatur  $T_k$ , den kritischen Druck  $p_k$  und das kritische Volumen  $V_k$  gekennzeichnet.

Eine Gasverflüssigung ist nur bei Temperaturen unterhalb von  $T_k$  möglich ( $\text{CO}_2$ ;  $T_k = 31,5^\circ\text{C}$ ).

Der kritische Punkt im Bild 5-5a ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente, d. h.  $\mathrm{dp}/\mathrm{d}V = 0$ , und  $\mathrm{d}^2p/\mathrm{d}V^2 = 0$ . Aus dieser Bedingung erhält man:

$$T_k = \frac{8a}{27bR}, \quad p_k = \frac{a}{27b^2}, \quad V_{mk} = 3b.$$

Dies bedeutet, dass der kritische Punkt die Van-der-Waals'schen Konstanten  $a$  und  $b$  bestimmt (Tabelle 5.4).

**Tabelle 5.4** Eigenschaften einiger realer Gase: kritische Temperatur  $T_k$ , kritischer Druck  $p_k$ , van der Waals'sche Konstanten  $a$  und  $b$ , molare Masse  $m_m$

Gas	$T_k$ K	$p_k$ Pa	$a$ $\text{Nm}^4/\text{kmol}^2$	$b$ $\text{m}^3/\text{kmol}$	$m_m$ $\text{kmol/kg}$
Wasserstoff H <sub>2</sub>	33	$1,3 \cdot 10^6$	$0,25 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	2
Stickstoff N <sub>2</sub>	126	$3,4 \cdot 10^6$	$1,36 \cdot 10^5$	$3,9 \cdot 10^{-2}$	28
Sauerstoff O <sub>2</sub>	154	$5,0 \cdot 10^6$	$1,36 \cdot 10^5$	$3,2 \cdot 10^{-2}$	32
Kohlendioxid CO <sub>2</sub>	304	$7,3 \cdot 10^6$	$3,69 \cdot 10^5$	$4,3 \cdot 10^{-2}$	44
Wasserdampf H <sub>2</sub> O	647	$21,8 \cdot 10^6$	$5,59 \cdot 10^5$	$3,0 \cdot 10^{-2}$	18

### Joule-Tompson-Effekt

Gase können gedrosselt entspannt werden, d. h. in einen Bereich mit niedrigerem Druck übergehen. *Gedrosselt* heißt, dass keine Wirbelbildung oder Arbeit auftritt.

*Bei idealen Gasen bleibt bei der gedrosselten Entspannung die Temperatur konstant. Bei realen Gasen sinkt die Temperatur, da Arbeit gegen die molekularen Anziehungskräfte zu leisten ist (Joule-Thompson-Effekt).*

In manchen Temperaturbereichen stoßen sich die Moleküle realer Gase ab und die Temperatur steigt beim Joule-Thompson-Effekt.

### Gas-Verflüssigung

Gase, deren kritische Temperatur oberhalb der Raumtemperatur liegt, können allein durch Kompression verflüssigt werden, z. B. CO<sub>2</sub>. Liegt die kritische Temperatur  $T_k$  tiefer, wie bei Luft, muss eine Abkühlung bis unterhalb von  $T_k$  erfolgen. Dazu kann das Gas zunächst komprimiert werden. Bei der anschließenden Entspannung kühlte sich das Gas durch den Joule-Thompson-Effekt ab.

Beim Linde-Verfahren zur Luftverflüssigung wird Luft über ein Drosselventil von 200 bar auf 20 bar entspannt, wobei eine Abkühlung um 45 K erfolgt. Die kalte Luft dient zunächst zur Kühlung neuer komprimierter Luft; danach wird sie nochmals dem Kompressor zugeführt. Durch diesen Kreislauf sinkt die Temperatur unter  $T_k$  (154 K für O<sub>2</sub>), so dass eine Verflüssigung möglich ist.

### 5.1.5 Aggregatzustände

Die Van-der-Waals'sche Gleichung für reale Gase beschreibt auch die Übergänge von der gasförmigen in die flüssige Phase. Das Auftreten der festen Phase, d. h. Gefrieren und Sublimieren, ist darin jedoch nicht enthalten. Für diese Vorgänge wird eine phänomenologische Beschreibung gegeben.

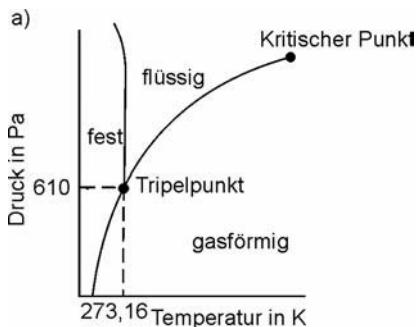
### Dampfdruck

Die Isothermen nach Bild 5-5a geben auch den *Dampfdruck* über einer Flüssigkeit wieder. In dem schraffierte Bereich bestehen die flüssige gasförmige Phase nebeneinander. Das Gas über einer Flüssigkeit nennt man *Dampf*. Bei einer bestimmten Temperatur stellt sich im Gleichgewicht ein konstanter Dampfdruck ein. Die Abhängigkeit von der Temperatur wird durch die Dampfdruckkurve in Bild 5-5b dargestellt. Man erhält den Verlauf durch Projektion der Isothermen in Bild 5-5a.

Im Siedepunkt sind Dampfdruck und äußerer Druck, z. B. Luftdruck, gleich. Man erhält folglich die Siedetemperatur in Abhängigkeit vom äußeren Druck aus der Dampfdruckkurve.

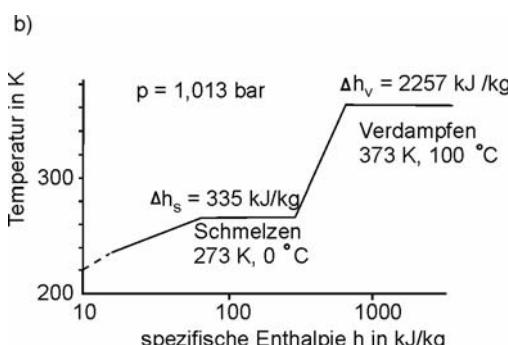
Die Dampfdruckkurve nach Bild 5-5b, die den Sättigungsdruck im Gleichgewicht angibt, muss unter Einbeziehung der festen Phase erweitert werden. Unter der festen Phase ist hier eine kristalline Struktur zu verstehen. Amorphe Festkörper stellen unterkühlte Flüssigkeiten dar und der Übergang vom flüssigen in den amorphen Zustand verläuft kontinuierlich. Für kristalline Substanzen wird analog zur Dampfdruckkurve die *Schmelzdruckkurve* angegeben, welche die Abhängigkeit des Schmelzpunktes vom Druck angibt (Clausius Clapeyron). Die Schmelztemperatur sinkt bei steigendem Druck. Daher schmilzt das Eis unter der Kufe eines Schlittschuhs.

Die Kurven für den Siede- und Schmelzpunkt sind in Bild 5-6a im *Phasendiagramm* dargestellt. Es existiert ein *Tripelpunkt*, in dem die feste, flüssige und gasförmige Phase im Gleichgewicht stehen. Tripelpunkte verwendet man zur Definition von Temperaturen, da sie unabhängig vom Druck sind. Der Tripelpunkt von Wasser liegt nahe am Schmelzpunkt bei Normaldruck bei  $T = 273,16 \text{ K}$  ( $0,01^\circ\text{C}$ ).



**Bild 5-6a**  
Eigenschaften von Wasser bei verschiedener Temperatur und Druck:

- a) Phasendiagramm von Wasser



**Bild 5-6b**  
Eigenschaften von Wasser bei verschiedener Temperatur und Druck:

- b) Erwärmen von Wasser, Schmelzen und Sieden

## Luftfeuchtigkeit

Die atmosphärische Feuchte wird durch den Phasenübergang Wasser-Dampf bestimmt. Über Wasserflächen bildet sich durch Verdunsten ein *Partialdruck* des Wasserdampfes. Dieser ist in der Regel kleiner als der Sättigungsdruck, weil ein Teil der Feuchtigkeit mit dem Luftstrom weggeführt wird. Ein Maß für den Partialdruck ist die *relative Luftfeuchte*  $\varphi$  in %. Sie ist gegeben durch den Partialdruck  $p_D$  bezogen auf den Sättigungsdruck  $p_S$ :

$$\varphi = \frac{p_D}{p_S} \quad [\varphi] = \%.$$

Relative Luftfeuchte  $\varphi$  (5.9a)

Die Definition für die *absolute Feuchte*  $\varphi_a$  orientiert sich dagegen an der tatsächlich vorhandenen Dichte des Wasserdampfes:

$$\varphi_a = \frac{m}{V} \quad [\varphi_a] = \frac{\text{g}}{\text{m}^3}.$$

Absolute Feuchte  $\varphi_a$  (5.9b)

Dabei stellt  $m$  die Masse des Wasserdampfes im Volumen  $V$  dar. In Tabelle 5.5 sind die absolute Feuchte bei Sättigung  $\varphi_a$  sowie der Sättigungsdruck  $p_S$  dargestellt. Steigt der Druck des Wasserdampfes über den Sättigungsdruck, verflüssigt sich der Wasserdampf. Er kondensiert und es bildet sich Nebel oder Regen.

**Tabelle 5.5** Luftfeuchte bei verschiedenen Temperaturen: Sättigungsdruck  $p_S$  des Wasserdampfes und absolute Feuchtigkeit  $\varphi_a$

Temperatur (°C)	-30	-20	-10	0	10	20	30
$p_S$ (Pa)	37	103	262	611	1230	2320	4210
$\varphi_a$ (g/m³)	0,33	0,88	2,15	4,84	9,4	17,2	30,1

## Sieden

Verdampft die Flüssigkeit nicht nur an der Oberfläche, sondern im ganzen Volumen, spricht man vom Sieden. Für diesen Vorgang muss der Sättigungsdruck größer sein als der auf der Flüssigkeit ruhende Druck. Der Sättigungsdruck für Wasser erreicht bei 100 °C Atmosphärendruck. Der Siedepunkt (in Meereshöhe) liegt daher bei dieser Temperatur. Auf Bergen bei geringerem Luftdruck verringert sich die Siedetemperatur. In 8000 m Höhe ist der Luftdruck auf etwa 37 % des Normaldruckes gefallen (Barometrische Höhenformel). Die Siedetemperatur liegt hier nur noch bei etwa 75 °C. Das Überführen von Flüssigkeit in Dampf stellt einen Phasenübergang dar, für den Energie notwendig ist. Die Verdampfungswärme für Wasser beträgt  $\Delta h = 2257 \text{ kJ/kg}$  (Tabelle 5.6).

## Dalton'sches Gesetz

In einem Volumen treten unterschiedliche Gase nicht miteinander in Wechselwirkung: jedes Gas verhält sich so, als würde es den Raum allein ausfüllen. Daraus folgt das *Dalton'sche Gesetz*:

*Der Gesamtdruck eines Gasgemisches ist gleich der Summe der Partialdrücke, d. h. der Drücke der einzelnen Gase.*

Dies bedeutet beispielsweise, dass die Luftfeuchte nicht vom Luftdruck beeinflusst wird, sondern nur von der Temperatur.

### Phasenumwandlungen

Das Phasendiagramm beschreibt die Umwandlung vom festen, flüssigen oder gasförmigen Zustand. Bei Phasenübergängen wird Wärme zu oder abgeführt, ohne dass eine Temperaturänderung eintritt. Man bezeichnet die zum Übergang notwendige (oder frei werdende Energie) als *latente Wärme*. Beim Übergang von fest nach flüssig wird das Kristallgitter aufgebrochen und man muss die *Schmelzwärme*, die man auch *Schmelzenthalpie* nennt, zuführen (Tabelle 5.6). Beim umgekehrten Übergang, dem Erstarren oder Gefrieren, wird diese Wärme wieder frei. Ähnlich ist es beim Verdampfen, dem Übergang von flüssig zu gasförmig. Beim Verdampfen muss die *Verdampfungswärme* oder *Verdampfungsenthalpie* zugeführt werden; bei Kondensieren wird sie wieder frei. Beim Sublimieren, dem direkten Übergang von fest nach gasförmig, kann die *Sublimationsenthalpie* aus der Summe von Schmelz- und Verdampfungsenthalpie ermittelt werden.

Bild 5-6b stellt den Temperaturverlauf von Wasser bei Zufuhr thermischer Energie dar, d. h. bei Erwärmung. Beim Schmelzen und Verdampfen bleibt die Temperatur so lange konstant, bis die gesamte Stoffmenge in die neue Phase übergeführt ist. Die für einen Phasenübergang notwendige Wärmeenergie  $Q$  ist proportional zur Masse  $m$ :

$$Q = m\Delta h \quad \text{Verdampfen, Schmelzen} \quad (5.10)$$

Die Enthalpie  $\Delta h$  für Schmelzen und Verdampfen entnimmt man Tabelle 5.6.

**Tabelle 5.6** Spezifische Schmelz- und Verdampfungswärme  $\Delta h_S$  und  $\Delta h_V$  (spezifische Schmelz- und Verdampfungsenthalpie) für verschiedene Stoffe bei Normaldruck (1,013 bar) und Schmelz- und Verdampfungstemperatur ( $\vartheta_S$  und  $\vartheta_V$ )

Stoff	Schmelzen		Verdampfen	
	$\vartheta_S$ (°C)	$\Delta h_S$ (kJ/kg)	$\vartheta_V$ (°C)	$\Delta h_V$ (kJ/kg)
Al	660	397	2450	10900
Pb	327	23	1750	8600
Fe	1535	277	2730	6340
Cu	1083	205	2590	4790
Na	98	113	883	390
Si	1420	164	2630	14050
Hg	- 39	12	357	285
NaCl	801	500	1465	2900
O <sub>2</sub>	- 219	14	- 183	214
N <sub>2</sub>	- 210	28	- 196	201
He	- 271	3,5	- 269	21
H <sub>2</sub>	- 259	59	- 253	461
CO <sub>2</sub>	- 57	184	- 78	574
Luft	- 213		- 192	197
Wasser, H <sub>2</sub> O	0	335	100	2257
Methan, CH <sub>4</sub>	- 182	59	- 161	510
Amoniak, NH <sub>3</sub>	- 78	339	- 33	1369

**Beispiel 5.1.5 (a)** Welcher Druck stellt sich nach dem Einkochen im Einmachglas ein?

Beim Einkochen ist im Idealfall nur Wasserdampf im Glas. Der Dampfdruck ist aus Tabelle 5.5 zu entnehmen.

**Beispiel 5.1.5 (b)** Welche Energie  $Q$  benötigt man, um ein Liter Wasser beim Kochen zu verdampfen?

Beim Verdampfen gilt:  $Q = m\Delta h_v$ . Mit dem Wert aus Tabelle 5.6 und  $m = 1 \text{ kg}$  erhält man  $Q = 2257 \text{ kJ}$ .

**Beispiel 5.1.5 (c)** Welche Energie  $Q$  benötigt man, um ein kg Eis zu schmelzen?

Beim Schmelzen gilt:  $Q = m\Delta h_s$ . Mit dem Wert aus Tabelle 5.6 und  $m = 1 \text{ kg}$  erhält man  $Q = 335 \text{ kJ}$ .

## 5.2 Kinetische Gastheorie

In den letzten Abschnitten wurden die Gasgesetze phänomenologisch eingeführt. Die kinetische Gastheorie entwickelt ein mikroskopisches Gasmodell und man erhält eine mechanische Interpretation der Eigenschaften der Gase. Die Thermodynamik wird somit aus der Mechanik der Gasmoleküle abgeleitet. Im Folgenden beschränkt sich die kinetische Gastheorie auf ideale Gase. Diese Gase bestehen aus gleichartigen Molekülen, die sich wie elastische Kugeln verhalten. Sie stoßen gegeneinander und gegen die Gefäßwand. Zwischen den Stößen fliegen sie geradlinig und kräftefrei.

### 5.2.1 Gasdruck

Der Gasdruck auf eine Gefäßwand entsteht durch die Impulsübertragung bei molekularen Stößen. Zur Berechnung des Druckes wird ein Molekül der Masse  $m_M$  betrachtet, das sich in einem Würfel der Kantenlänge  $a$  befindet. Es besitzt die Geschwindigkeit  $v$  parallel zu einer Würfelkante. Die Zeit zwischen zwei Stößen auf die Wand entspricht der Flugzeit hin und her:  $\Delta t = 2a/v$ . Bei jedem Stoß wird auf die Wand der Impuls  $\Delta p = 2m_M v$  übertragen. Die Kraft ist gleich der Impulsänderung  $F = \Delta p / \Delta t = m_M v^2 / a$ . Daraus erhält man den Druck  $p$ . Da das Volumen des Würfels  $V = a^3$  ist, gilt  $p = F/a^2 = m_M v^2 / a^3$ . Befinden sich im Raum  $N$  Moleküle, so bewegt sich im Mittel ein Drittel davon ( $N/3$ ) in einer Raumrichtung. Es muss berücksichtigt werden, dass die Geschwindigkeit aller Moleküle verschieden ist, so dass der Mittelwert  $\bar{v}^2 = (v_1^2 + v_2^2 + \dots) / N$  eingeht. Summiert man die einzelnen Druckanteile auf, erhält man mit der Masse des Gases  $m = m_M N$ :

$$pV = \frac{1}{3}Nm_M\bar{v}^2 = \frac{1}{3}m\bar{v}^2. \quad (5.11)$$

Diese Grundgleichung der kinetischen Gastheorie, gibt das Gesetz von Boyle-Mariotte  $pV = \text{const.}$  (5.2) wieder, da bei konstanter Temperatur auch  $\bar{v}^2$  konstant ist. Die Gasdichte ist durch  $\rho = m/V$  gegeben und man erhält  $p = \rho\bar{v}^2/3$ .

**Beispiel 5.2.1** Für Luft unter Normalbedingungen  $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$  und  $p = 101325 \text{ Pa}$  errechnet man aus  $p = \rho\bar{v}^2/3$  für die Geschwindigkeit der Moleküle  $v = \sqrt{\bar{v}^2} = 485 \text{ m/s}$ .

### 5.2.2 Thermische Energie

(5.11) kann mit der allgemeinen Gasgleichung  $pV = NkT$  (5.4e) verglichen werden ( $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ ). Man erhält:

$$m_M\bar{v}^2 = 3kT \quad \text{und} \quad \frac{m_M\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2}kT. \quad (5.12a)$$

Der Ausdruck  $m_M \bar{v}^2 / 2$  gibt die mittlere kinetische Energie eines Teilchens an. Ein Gasatom hat drei Freiheitsgrade ( $f = 3$ ), die durch die Bewegung in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung charakterisiert werden. Daher gilt folgende Aussage: die mittlere Energie pro Freiheitsgrad  $f$  eines Gasatoms beträgt:

$$\bar{E}_f = \frac{1}{2} kT \quad k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}. \quad \text{Thermische Energie} \quad (5.12\text{b})$$

Die Beziehung wurde für die *kinetische Energie der Translation* abgeleitet. Mehratomige Moleküle besitzen auch *kinetische Energie der Rotation*. Zweiatomige Moleküle haben zwei Freiheitsgrade der Rotation, so dass insgesamt  $f = 5$  beträgt. Eine Rotation um die Verbindungsline der beiden Atome besitzt keine Energie, da das Massenträgheitsmoment praktisch Null ist. Dies liegt daran, dass die Masse eines Atoms nahezu vollständig im Kern konzentriert ist. Daher bleiben zwei Rotationsachsen senkrecht zu dieser Verbindungsline übrig. Moleküle mit mehr als zwei Atomen haben im Allgemeinen drei Freiheitsgrade der Rotation, d. h.  $f = 6$ . Verallgemeinert kann man also die gesamte kinetische Energie eines Moleküls zu

$$\bar{E} = \frac{1}{2} f kT \quad \text{Thermische Energie} \quad (5.12\text{c})$$

angeben;  $\bar{E}$  ist proportional zur Temperatur. Die Temperatur ist also ein Maß für den Mittelwert der kinetischen Energie eines Moleküls.

Die thermische Energie eines Moleküls beträgt pro Freiheitsgrad  $f$ :  $\bar{E}_f = \frac{1}{2} kT$ .

### Innere Energie

Die kinetische Energie eines Gases wird auch als innere Energie  $U$  bezeichnet. Für ein ideales Gas mit  $N$  Molekülen gilt:

$$U = \frac{1}{2} f N k T. \quad \text{Innere Energie } U \quad (5.13)$$

### 5.2.3 Geschwindigkeitsverteilung

Die Moleküle in Gasen bewegen sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Der quadratische Mittelwert  $\bar{v}^2$  gibt die mittlere Energie an. In diesem Abschnitt werden die Verteilungsfunktionen von Energie und Geschwindigkeit beschrieben.

#### Boltzmann'sches Verteilungsgesetz

Die Moleküle eines Gases besitzen unterschiedliche Energien. Es werden Zustände mit  $E_1$  und  $E_2$  betrachtet. Die Boltzmann-Verteilung gibt an, wie viele Moleküle  $N_1$  und  $N_2$  diese Energien im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur  $T$  besitzen:

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}}, \quad k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}. \quad \text{Boltzmann-Verteilung} \quad (5.14)$$

Mittels (5.14) wird die Zahl der Moleküle in verschiedenen Energiezuständen in Beziehung gesetzt. Das Gesetz hat allgemeine Gültigkeit, nicht nur in der Thermodynamik sondern auch in der Atomphysik zur Berechnung der Besetzung höherer Energieniveaus, z. B. beim Laser.

### Maxwell'sche Geschwindigkeit

Infolge von Stößen zwischen Molekülen ändern sich die Geschwindigkeiten. Statistische Aussagen über die Geschwindigkeiten macht die Maxwell'sche Verteilungsfunktion, die aus (5.14) abgeleitet werden kann:

$$\frac{dN}{dv} = 4\pi N \left( \frac{m_M}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \quad \text{Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung} \quad (5.15)$$

$dN$  gibt die Zahl der Moleküle mit Geschwindigkeiten im Intervall zwischen  $v$  und  $v + dv$ . Dabei ist  $m_M$  die Masse eines Moleküls oder Atoms,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K die Boltzmann-Konstante,  $N$  die Zahl der Moleküle und  $T$  die absolute Temperatur. Die Geschwindigkeitsverteilung von Molekülen (5.15) ist in Bild 5-7 für verschiedene Temperaturen  $T$  dargestellt.

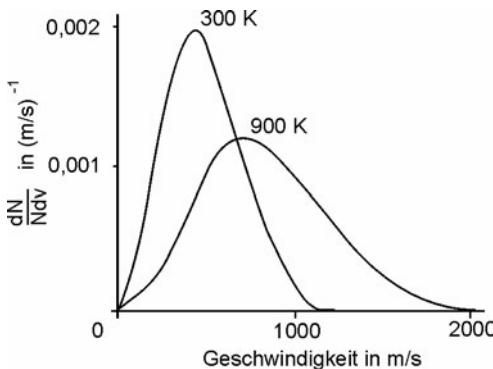


Bild 5-7  
Geschwindigkeitsverteilung  
von Gasmolekülen nach Maxwell

## 5.3 Hauptsätze der Thermodynamik

### 5.3.1 Spezifische Wärmekapazität

#### Feste und flüssige Körper

Führt man festen oder flüssigen Körpern die Wärmeenergie  $dQ$  zu, erhöht sich die Temperatur um  $dT$ . Je größer die Masse  $m$  ist, umso mehr Wärme  $dQ$  muss zum Erreichen der Temperaturerhöhung  $dT$  geführt werden:  $dQ \sim mdT$ . Den Proportionalitätsfaktor nennt man die *spezifische Wärmekapazität*  $c$ :

$$dQ = cmdT \quad [c] = \frac{\text{J}}{\text{kgK}}. \quad \text{Spezifische Wärmekapazität } c \quad (5.16a)$$

Die spezifische Wärmekapazität  $c$  ist die Wärmeenergie pro kg und K, die ein Material speichert.

Tabelle 5.7 enthält Angaben über die spezifischen Wärmekapazitäten einiger Substanzen. Auffallend ist der hohe Wert für Wasser.

**Tabelle 5.7** Wärmetechnische Werte einiger Stoffe: Dichte  $\rho$ , spezifische Wärmekapazität  $c_P$  (bei konstantem Druck), Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ , Temperaturleitfähigkeit  $a = \lambda/(c_P \rho)$

Stoff	$\vartheta$ °C	$\rho$ $10^3 \text{ kg/m}^3$	$c_P$ J/(kgK)	$\lambda$ W/(mK)	$a$ $10^6 \text{ m}^2/\text{s}$
Aluminium	20	2,70	920	221	88,9
Eisen	20	7,86	465	67	18,3
Grauguss	20	$\approx 7,2$	545	$\approx 50$	$\approx 13$
Stahl	20	7,9	460	46	12,8
Kupfer	20	8,9	390	393	113,3
Beton	10	2,4	880	2,1	1,0
Ziegelstein	10	1,2	835	0,5	0,5
Fichtenholz	10	0,6	2000	0,13	0,11
Glas	20	2,5	800	0,8	0,4
Polystyrol	20	1,06	1300	0,17	0,125
Mineralfaser	10	0,2	800	0,04	0,3
Eis	0	0,92	1930	2,2	1,25
Schnee	0	0,1	2090	0,11	0,53
Wasser	20	0,998	4182	0,600	0,144
Wärmeträgeröl	20	0,87	1830	0,134	0,084
CO <sub>2</sub>	0	0,00195	827	0,015	9,1
Wasserdampf	150	0,00255	2320	0,031	5,2
Luft	20	0,00119	1007	0,026	21,8

**Beispiel 5.3.1 (a)** Man berechne die Zeit  $dt$ , in der ein elektrischer Heißwasserspeicher ( $P = 1900 \text{ W}$ ) 8,0 Liter Wasser von 10 °C auf 95 °C erwärmt.

$$P = \frac{dQ}{dt} = c \cdot m \frac{dT}{dt}. \text{ Daraus folgt } dt = c \cdot m \frac{dT}{P} = 1496 \text{ s} \text{ (mit } c = 4,18 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}, m = 8 \text{ kg}, dT = 85 \text{ K).}$$

### Molare Wärmekapazität $c_m$

Die Einheit von  $c$  ist die gleiche wie die der speziellen Gaskonstanten  $R'$ . Zum Aufzeigen des Zusammenhangs zwischen diesen Größen wird die molare Wärmekapazität  $c_m$  eingeführt. In (5.16a) wird die Masse  $m$  durch die Stoffmenge  $n$  ersetzt und man erhält:

$$dQ = nc_m dT \quad [c_m] = \frac{\text{J}}{\text{kmolK}}. \quad (5.16b)$$

Die molare Masse  $m_m$  (in kg/kmol) ist durch (5.6) gegeben:  $m_m = m/n$ . Durch Vergleich von (5.16a) und (5.16b) erhält man:

$$c_m = cm_m \quad [m_m] = \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}.$$

Mittels Tabelle 5.7 wird  $c_m$  für zwei Beispiele berechnet:

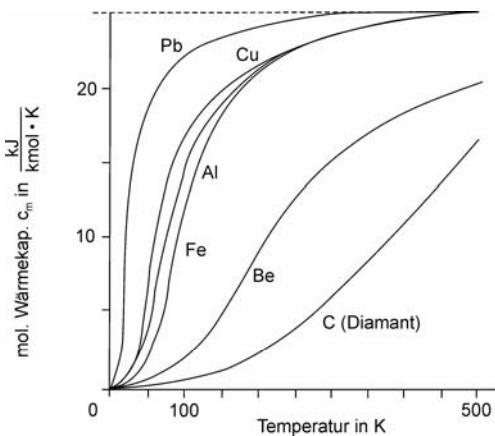
1. Blei (Pb):  $m_m = 207,2 \text{ kg/kmol}$ ,  $c = 130 \text{ J/(kgK)}$ . Daraus folgt:  $c_m = 26,8 \text{ kJ/(kmolK)}$ .
2. Eisen (Fe):  $m_m = 55,8 \text{ kg/kmol}$ ,  $c = 465 \text{ J/(kgK)}$ . Daraus folgt:  $c_m = 26,1 \text{ kJ/(kmolK)}$ .

Das Ergebnis deutet an, dass die molare Wärmekapazität  $c_m$  für alle festen Körper etwa gleich ist. Aus der kinetischen Gastheorie kann man das Gesetz von Dulong-Petit ableiten:

$$c_m = 3R = 25 \frac{\text{kJ}}{\text{kmolK}}.$$
Molare Wärmekapazität  $c_m$ 
**(5.16c)**

*Nach der kinetischen Gastheorie ist die molare Wärmekapazität  $c_m$  für alle festen Körper gleich.*

Der Beweis geht von (5.13) aus. Es wird berücksichtigt, dass die Zahl der Freiheitsgrade im Festkörper  $f = 3$  ist, und dass Moleküle im Gitter neben kinetischer auch potenzielle Energie gleicher Größe besitzen. Das Gesetz (5.16c) gilt für Temperaturen etwa oberhalb 300 K. Bei tiefen Temperaturen sind die Abweichungen erheblich.  $c_m$  geht mit der 3. Potenz der Temperatur gegen Null (Bild 5-8).



**Bild 5-8**  
Abhängigkeit der molaren Wärmekapazität  $c_m$  fester Körper von der Temperatur

### Wärmekapazität von Gasen bei $V = \text{const.}$

Bei der Herleitung der Wärmekapazität eines Gases muss berücksichtigt werden, dass es sich bei Erwärmung erheblich ausdehnen kann, wobei Arbeit verrichtet wird. Hält man das Volumen bei der Erwärmung konstant, bewirkt die zugeführte Wärmeenergie  $dQ$  nur eine Temperaturerhöhung  $dT$ , genau wie bei Festkörpern. Die *spezifische Wärmekapazität bei konstanten Volumen* wird mit  $c_V$  bezeichnet:

$$dQ = c_V m dT \quad (V = \text{const.}).$$
Spezifische Wärmekapazität  $c_V$ 
**(5.17)**

Die zuführte Wärmeenergie  $dQ$  bei  $V = \text{const.}$  bleibt im Gas und erhöht die *innere Energie U*:

$$dU = c_V m dT$$
**(5.18)**

(5.18) bedeutet, dass die Wärmemenge  $dQ$  bei  $V = \text{const.}$  zur Erhöhung der inneren Energie  $dU$  des Gases dient und nicht auch noch zur Arbeit bei Ausdehnung des Gases.

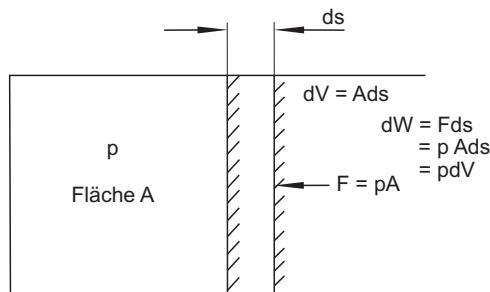
### Wärmekapazität von Gasen bei $p = \text{const.}$

Ist bei der Erwärmung um  $dT$  der Druck  $p = \text{const.}$ , dehnt sich das Gas aus und leistet die Arbeit

$$-dW = pdV. \quad \text{Arbeit bei Expansion} \quad (5.19)$$

Druck und Volumenänderung werden durch  $p$  und  $dV$  beschrieben. In der Thermodynamik gilt folgende Vereinbarung der Vorzeichen:

*Arbeit  $dW$ , die in das Gas hineingebracht wird, trägt ein positives Vorzeichen. Leistet dagegen das Gas Arbeit, z. B. bei einer Expansion, wird sie als negativ angesehen.*



**Bild 5-9**  
Arbeit bei der Kompression  
eines Gases

Zur Ableitung von (5.19) dient Bild 5-9. Es wird ein Gas mit einem Kolben der Fläche  $A$  mit der Kraft  $F$  um die Strecke  $ds$  zusammengedrückt. Die Arbeit beträgt  $dW = Fds$ . Führt man den Druck  $p = F/A$  ein, erhält man mit  $dV = Ads$  unter Berücksichtigung der Vorzeichenregel (5.19).

Bei der Ausdehnung eines erwärmten Gases dient nur ein Teil der zugeführten Wärme  $dQ$  zur Erhöhung der inneren Energie  $dU$ . Der andere Teil führt zur Arbeit  $-dW$ . Es gilt der Energiesatz, der in dieser Form *erster Hauptsatz der Wärmelehre* genannt wird:

$$dQ = dU - dW \quad \text{oder} \quad dQ = dU + pdV. \quad 1. \text{ Hauptsatz} \quad (5.20a)$$

*Erster Hauptsatz der Wärmelehre: Die zugeführte Wärmeenergie dient zur Erhöhung der inneren Energie und zur Erbringung von Arbeit.*

Mit  $dU = c_V mdT$  (5.18) resultiert:

$$dQ = c_V mdT + pdV. \quad (5.20b)$$

Eine Erwärmung bei  $p = \text{const.}$  wird durch die *Wärmekapazität bei konstantem Druck*  $c_p$  beschrieben:

$$dQ = c_p mdT \quad (p = \text{const.}) . \quad \text{Spezifische Wärmekapazität } c_p \quad (5.21)$$

Aus (5.20b) und (5.21) entsteht:

$$mc_p = mc_V + p \frac{dV}{dT}. \quad (5.22)$$

Die Zustandsgleichung (5.4c) lautet:  $pV = mR'T$       oder       $\frac{dV}{dT} = \frac{mR'}{p}$ .

Setzt man dies in (5.22) ein, folgt für die spezifischen Wärmekapazitäten  $c_p$  und  $c_V$ :

$c_p - c_V = R' \quad [R'] = \frac{\text{J}}{\text{kg K}}.$       Gaskonstante  $R'$       (5.23)

Die spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck und Volumen  $c_p$  und  $c_V$  sind mit der speziellen Gaskonstanten  $R'$  verknüpft.

### Molare Größen

Die Thermodynamik idealer Gase wird einheitlicher, wenn man für die Massen  $m$  die molare Darstellung  $m_m$  benutzt:

$$m_m = \frac{m}{n} \quad [m_m] = \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}. \quad (5.6)$$

Statt der spezifischen Wärmekapazitäten  $c_V$  und  $c_p$  ergeben sich *molare Größen*  $c_{Vm}$  und  $c_{pm}$  mit den Einheiten J/(kmol K). Es gilt

$$c_{Vm} = c_V m_m \quad \text{und} \quad c_{pm} = c_p m_m.$$

Es folgt mit (5.23) und (5.4e) der Zusammenhang mit der Gaskonstanten  $R = 8314 \text{ J/(kmolK)}$ :

$c_{pm} - c_{Vm} = R \quad [R] = \frac{\text{J}}{\text{kmol K}}.$       Gaskonstante  $R$       (5.24a)

Nach der kinetischen Gastheorie hängen die molaren Wärmekapazitäten von der Zahl der Freiheitsgrade  $f$  der Moleküle ab, die aus mindestens  $f = 3$  Translationen bestehen:

$c_{pm} = \frac{(f+2)}{2} R \quad \text{und} \quad c_{Vm} = \frac{f}{2} R.$       (5.24b)

Für einatomige Gase ( $f = 3$ ) gilt demnach  $c_{pm} = 5R/2$ , für zweiatomige ( $f = 5$ )  $c_{pm} = 7R/2$  und für Moleküle mit drei Rotationsachsen ( $f = 6$ )  $c_{pm} = 8R/2$ . Das Verhältnis

$\kappa = \frac{c_{pm}}{c_{Vm}} = \frac{c_p}{c_V} = \frac{f+2}{f}$       Adiabatenexponent  $\kappa$       (5.25)

ist der *Adiabatenexponent*  $\kappa$ .

**Beispiel 5.3.1 (b)** Der Adiabatenexponent beträgt nach (5.25) für einatomige Gase  $\kappa = 5/3 = 1,67$ , für zweiatomige  $\kappa = 7/5 = 1,4$  und für dreiatomige  $\kappa = 8/6 = 1,33$ .

### 5.3.2 Erster Hauptsatz der Wärmelehre

Der *erste Hauptsatz* erweitert das Prinzip der Energieerhaltung, wie es für die Mechanik formuliert wurde (Abschnitt 2.3.4), für die Thermodynamik.

Die einem System zugeführte Wärmeenergie  $dQ$  und die zugeführte Arbeit  $dW$  erhöhen die innere Energie  $dU$ :

$$dU = dQ + dW.$$

1. Hauptsatz

(5.20a)

Dabei gilt die Vorzeichenregel: Größen  $dQ$  oder  $dW$ , die in das Gas eingebracht werden, tragen ein positives Vorzeichen. Wird Wärmeenergie  $dQ$  oder Arbeit  $dW$  vom Gas abgegeben tritt ein negatives Vorzeichen auf.

Eine andere Formulierung des ersten Hauptsatzes geht auf den in früheren Zeiten immer wieder vergeblich angestrebten Versuch zurück, eine Maschine zu bauen, die ohne Energiezufuhr und bei unveränderter innerer Energie nach außen Arbeit abgibt. Eine solche Maschine wird ein *Perpetuum mobile erster Art* genannt. (5.20a) besagt, dass bei fehlender Energiezufuhr ( $dQ = 0$ ), die nach außen abgegebene Arbeit ( $-dW$ ) auf Kosten der inneren Energie  $U$  geht. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik lautet somit: Ein Perpetuum mobile erster Art ist unmöglich.

### 5.3.3 Zustandsänderungen

Zustandsänderungen von Gasen werden durch die Grundgrößen ( $p, V, T$ ) beschrieben. In einfachen Fällen wird eine der Größen konstant gehalten. Allgemeine Zustandsänderungen der Gase lassen sich durch eine Reihe derartiger elementarer Zustandsänderungen darstellen.

#### Isobare Zustandsänderungen ( $p = \text{const.}$ )

Bei einer *isobaren Zustandsänderung* ist der Druck  $p = p_0 = \text{const.}$ . Aus der Zustandsgleichung idealer Gase  $pV = mR' T$  (5.4c) resultiert (Bild 5-10a):

$$\frac{V}{T} = \text{const.} \quad \text{oder} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad (p = \text{const.}).$$

Isobar

(5.26)

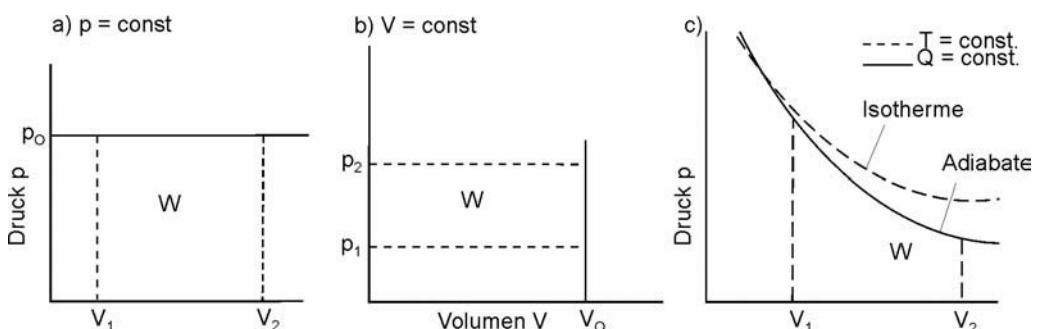


Bild 5-10

Zustandsänderungen idealer Gase: a) Isobare Änderung ( $p = \text{const.}$ ), b) Isochore Änderung ( $V = \text{const.}$ ), c) Isotherme ( $T = \text{const.}$ ) und adiabatische Änderung ( $Q = \text{const.}$ )

Für die Expansionsarbeit gilt (Bild 5-9)  $dW = pdV$  oder:

$$\int_{V_1}^{V_2} p_0 dV = p_0(V_2 - V_1) \quad \text{oder}$$

$$W = -p_0(V_2 - V_1) = -mR'(T_2 - T_1). \quad \text{Arbeit } W \quad (5.27)$$

**Beispiel 5.3.3 (a)** In einem Zylinder mit reibungsfreien Kolben befinden sich  $V_1 = 1,0 \text{ m}^3$  Luft mit  $T_1 = 300 \text{ K}$  bei einem Druck von 0,9 bar. Bei konstantem Druck wird die Luft auf  $T_2 = 1000 \text{ K}$  erwärmt. Wie groß ist das Endvolumen?

Für *isobare* Änderungen gilt:  $V_2 = V_1 T_2 / T_1 = 3,33 \text{ m}^3$

### Isochore Zustandsänderung ( $V = \text{const.}$ )

*Isochor* bedeutet, dass das Volumen  $V$  konstant gehalten wird (Bild 5-10.b). Aus der Zustandsgleichung (5.4c)  $pV = mR'T$  folgt:

$$\frac{p}{T} = \text{const.} \quad \text{oder} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (V = \text{const.}). \quad \text{Isochor} \quad (5.28)$$

Da  $V = \text{const.}$  ist, wird keine Arbeit verrichtet.

**Beispiel 5.3.3 (b)** In einem verschlossenen Behälter befinden sich  $V_1 = 0,9 \text{ m}^3$  Luft mit  $p_1 = 0,9 \text{ bar}$  und  $T_1 = 300 \text{ K}$ . Bei welcher Temperatur  $V_2$  steigt er auf  $p_2 = 3,0 \text{ bar}$ ?

Für *isochore* Änderungen gilt:  $T_2 = T_1 p_2 / p_1 = 1000 \text{ K}$ .

### Isotherme Zustandsänderung ( $T = \text{const.}$ )

Für *isotherme Zustandsänderungen* (Bild 5-10c.) gilt das schon zitierte *Boyle-Mariotte'sche Gesetz*, das aus der Zustandsgleichung (5.4c)  $pV = mR'T$  folgt:

$$pV = \text{const.} \quad \text{oder} \quad p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad (T = \text{const.}). \quad \text{Isotherm} \quad (5.29)$$

Die Expansionsarbeit beträgt  $W = -\int pdV$ . Mit  $p = mR'T/V$  entsteht daraus

$W = mR'T \int dV/V$ . Als Lösung des Integrals erhält man:

$$W = -mR'T \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad \text{Arbeit } W \quad (5.30)$$

### Adiabatische Zustandsänderung ( $Q = \text{const.}$ )

Die *adiabatische* oder *isentropische Zustandsänderung* hat zur Voraussetzung, dass kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet:  $Q = \text{const.}$  oder  $dQ = 0$ . In Bild 5-10c ist der Verlauf einer so genannten *Adiabaten* im Vergleich zu einer Isothermen gezeichnet. Es ändern sich Druck  $p$ , Volumen  $V$  und Temperatur  $T$ . Die Arbeit, die in Bild 5-10c angegeben ist, muss aus der inneren Energie  $U$  des Gases entnommen werden (Abkühlung) oder bei Kompression an dieses abgegeben werden (Erwärmung).

Für den Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen  $p$ ,  $V$  und  $T$  bei adiabatischen Prozessen findet man aus der allgemeinen Zustandsgleichung und dem ersten Hauptsatz der Wärmelehre:

$$pV^\kappa = \text{const.} \quad \text{und} \quad Tp^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \text{const.} \quad (Q = \text{const.}). \quad \text{Adiabatisch} \quad (5.31)$$

Der Adiabatenexponent  $\kappa$  wird durch (5.25) beschrieben:

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V}. \quad \text{Adiabatenexponent } \kappa \quad (5.25)$$

Der Beweis der Adiabatengleichung 5.31 soll kurz angedeutet werden. Aus dem ersten Hauptsatz folgt mit  $dQ = 0 : mc_V dT = -pdV$ . Setzt man für den Ausdruck aus der allgemeinen Zustandsgleichung  $p = mR'T/V$  ein, entsteht  $c_V dT/T = -R' dV/V$ . Mit  $c_p - c_V = R'$  resultiert  $dT/T = -(\kappa-1)dV/V$ . Durch Integration folgt:  $TV^{\kappa-1} = \text{const.}$  Aus der allgemeinen Zustandsgleichung ergibt sich daraus (5.31):  $pV^\kappa = \text{const.}$

**Beispiel 5.3.3 (c)** Ein Gas mit dem Druck  $p$  wird sehr schnell auf die Hälfte seines Volumens  $V$  zusammengedrückt. Wie groß ist danach der Druck  $p'$ ?

Da der Vorgang schnell geht, wird zunächst keine Wärme abgeführt, so dass der Vorgang *adiabatisch* ist:

$$pV^\kappa = p'V'^\kappa. \quad \text{Daraus folgt } p' = p(V'/V)^\kappa = p \cdot 2^\kappa \quad (\text{z.B. } \kappa = 1,4 \text{ für zweiatomige Gase}).$$

### Polytrope Zustandsänderung

Bei ungehindertem Wärmeaustausch verläuft eine Zustandsänderung *isotherm*. Bei idealer Wärmeisolation dagegen *adiabatisch*. In der Praxis ist keiner dieser Fälle erfüllbar. Jeden Prozess zwischen diesen Grenzfällen nennt man *polytrop*. Für die polytropen Zustandsänderungen gilt:

$$pV^\nu = \text{const.} \quad \text{Polytrop} \quad (5.32)$$

Die Polytropengleichung 5.32 beschreibt jede der erwähnten Zustandsänderungen. Der Exponent  $\nu$  nimmt dabei folgende Werte an:

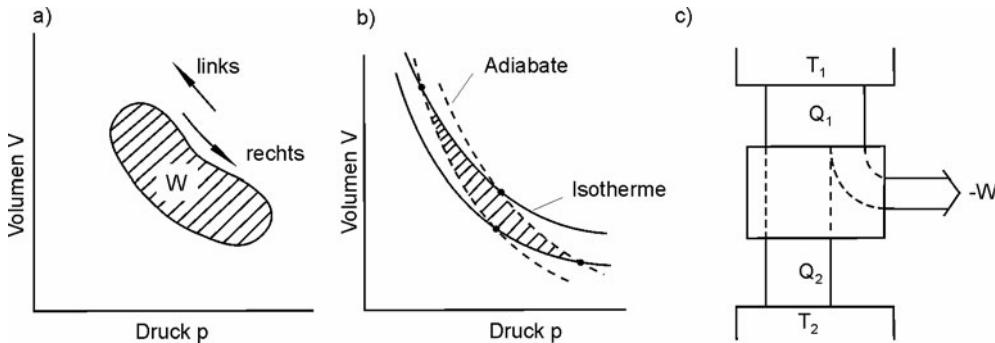
$\nu = 0 :$	isobar	$p = \text{const.}$
$\nu = 1 :$	isotherm	$T = \text{const.}$
$\nu = \kappa :$	adiabatisch	$Q = \text{const.}$
$\nu = \infty :$	isochor	$V = \text{const.}$
$1 < \nu < \kappa :$	polytrop.	

### 5.3.4 Kreisprozesse

Wärmekraftmaschinen durchlaufen periodische Kreisprozesse. Diese bestehen aus einer Reihe von Zustandsänderungen, nach denen das Gas in den Ausgangszustand zurückkehrt. Es ist üblich, derartige Vorgänge im  $p$ - $V$ -Diagramm darzustellen. In Bild 5-11a ist ein so genannter rechtsläufiger Kreisprozess gezeichnet. Die umfahrene Fläche ist die Nutzarbeit:

$$W = -\oint pdV. \quad \text{Nutzarbeit} \quad (5.33)$$

Bei einem rechtsläufigen *Kreisprozess* verrichtet das Gas Arbeit. Nach den Vorzeichenregeln ist  $W$  negativ. Beispiele für Kreisprozesse findet man bei Wärmekraftmaschinen und Verbrennungsmotoren. Wird der Kurvenzug links herum umfahren, so wird mechanische Arbeit in das Gas hineingebracht, z. B. bei der Kältemaschine oder der Wärmepumpe.



**Bild 5-11** Darstellung von Kreisprozessen im  $p$ - $V$ -Diagramm:  
a) Allgemein b) Carnot-Kreisprozess c) Energiefluss bei einer Wärmekraftmaschine

### Carnot-Prozess

Der von Carnot vorgeschlagene Kreisprozess ist von theoretischem Interesse, da er optimalen Wirkungsgrad  $\eta$  aufweist. Er läuft zwischen je zwei Isothermen und Adiabaten ab (Bild 5-11b). Es handelt sich um einen idealisierten Vorgang, der umkehrbar oder reversibel abläuft. Reibung und Verluste durch Wärmeleitung werden vernachlässigt.

Wird der Carnot-Prozess rechtsläufig umfahren, so wird Wärme teilweise in Arbeit umgewandelt. Der Wirkungsgrad  $\eta$  ist durch die abgeführte Arbeit  $-W$  und der zugeführten Wärme  $Q$  definiert  $\eta = -W/Q$ . Die gewonnene Arbeit ist gleich der Differenz der zugeführten und abgeführten Wärme:  $-W = Q_1 - |Q_2|$ . Damit wird der Wirkungsgrad  $\eta$  einer Wärmekraftmaschine:

$$\eta = -\frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}. \quad \text{Wirkungsgrad } \eta \quad (5.34)$$

Man kann den Carnot'schen Prozess mit Hilfe der Gasgesetze berechnen und findet für den *Carnot-Wirkungsgrad*  $\eta_C$ :

$$\eta_C = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad \text{Maximaler thermischer Wirkungsgrad } \eta_C \quad (5.35)$$

Die Maschine arbeitet zwischen den maximalen und minimalen Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ , die allein den Wirkungsgrad bestimmen.  $\eta_C$  nähert sich dem Wert 1 an, wenn die untere Arbeits temperatur im Bereich des absoluten Nullpunktes  $T \approx 0$  K liegt. Im Allgemeinen ist bei Wärmekraftmaschinen  $T_2$  durch die Temperatur des Kühlmittels um 300 K gegeben. Damit wird klar, dass die obere Arbeitstemperatur  $T_1$  möglichst hoch liegen muss. Für  $T_1 = 600$  K und  $T_2 = 300$  K erhält man beispielsweise  $\eta_C = 50\%$ . Der Wirkungsgrad nach (5.35) dient häufig zur Abschätzung auch für andere Prozesse.

**Beispiel 5.3.4** Wie groß ist der maximale Wirkungsgrad  $\eta$  einer Wärmekraftmaschine, der ein Gas mit 900 °C zugeführt und mit 20 °C abgeführt wird.

$$\text{Es gilt: } \eta = \frac{1173 - 293}{1173} = 0,75 \triangleq 75\% .$$

### Beweis

Der Carnot-Prozess ist technisch nur unter hohem Aufwand zu realisieren, so dass er in der Praxis wenig Bedeutung hat. Wegen der theoretischen Relevanz soll im Folgenden die Berechnung von (5.35) skizziert werden. Bei einer hohen Temperatur  $T_1$  wird dem Gas die Wärmemenge  $Q_1$  zugeführt. Es dehnt sich auf das Volumen  $V_2$  aus. Nun lässt man das Gas schnell expandieren. Es findet kein Austausch von Wärme mit der Umgebung statt. Das Gas kühlst sich bei dieser adiabatischen Expansion auf die Temperatur  $T_2$  ab. Eine isotherme Kompression von  $V_3$  auf  $V_4$  führt nicht zu einer Erwärmung, da die Wärme  $Q_2$  abgeführt wird. Die anschließende adiabatische Kompression von  $V_4$  auf  $V_1$  erwärmt das Gas auf die ursprüngliche Temperatur  $T_1$ .

Für die Berechnung des Wirkungsgrades  $\eta$  brauchen nur die isothermen Anteile betrachtet zu werden. Man kann beweisen, dass sich die beiden Adiabatenanteile gerade aufheben und dass  $V_1/V_2 = V_4/V_3$  ist. Die nach außen abgegebene Arbeit  $W$  berechnet man als Differenz der beiden isothermen Arbeitsanteilen. Nach (5.30) gilt:

$$W_1 = m R' T_1 \ln \frac{V_1}{V_2} \quad \text{und} \quad W_2 = m R' T_2 \ln \frac{V_4}{V_3} .$$

Die Nutzarbeit  $W$  ist durch die Differenz gegeben:

$$W = W_2 - W_1 = m R' (T_2 - T_1) \ln \frac{V_1}{V_2} .$$

Der Wirkungsgrad  $\eta$  ist das Verhältnis von gewonnener Arbeit  $-W$  zu hineingebrachter Wärmeenergie  $Q_1$ , also  $\eta = -W/Q_1$  (5.34). Da sich bei einem isothermen Prozess die innere Energie  $U$  nicht ändert, gilt  $Q_1 = W_1$  und  $\eta = -W/W_1$ . Damit errechnet sich der Wirkungsgrad für den Carnot-Prozess  $\eta_c$  zu (5.35). Bild 5-11c macht deutlich, dass von der aufgewendeten Energie  $Q_1$  ein Teil in Arbeit  $W$  umgewandelt wird und ein Teil als Abwärme  $Q_2$  das System verlässt.

### Thermodynamische Temperatur

In Abschnitt 5.1.1 wurde auf die Problematik der Definition der Temperatur durch die Ausdehnung von Flüssigkeiten oder Gasen hingewiesen. Es treten Nichtlinearitäten auf, die beim Gasthermometer durch die Abweichung vom Verhalten idealer Gase im Bereich der Verflüssigung entstehen. Eine von den Stoffeigenschaften des Messgerätes unabhängige Definition der Temperatur kann durch den Carnot-Prozess erfolgen. Bei der *thermodynamischen Temperatur* ermittelt man den Wirkungsgrad nach (5.35):  $\eta_c = (T_1 - T_2)/T_1$ . Der absolute Nullpunkt ist durch  $\eta_c = 1$  definiert. Die thermodynamische Definition der Temperatur, die auch in Kelvin angegeben wird, hat nur theoretische Bedeutung.

## 5.3.5 Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre

Der *erste Hauptsatz der Wärmelehre* stellt den Satz von der Erhaltung der Energie dar. Der *zweite Hauptsatz* gibt Informationen über den Wirkungsgrad bei der Umwandlung von Wärmeenergie in mechanische Arbeit.

### Reversible Vorgänge

Bewegungsabläufe in der Mechanik sind bei Vernachlässigung von Reibung umkehrbar oder *reversibel*. Dreht man von einem Vorgang einen Film, z. B. dem elastischen Stoß zweier Kugeln, so kann er vorwärts oder rückwärts abgespielt werden. Beide Bewegungsabläufe sind physikalisch möglich. Reversible Vorgänge erlauben eine Umkehrung der Zeitrichtung. Es kann, wie beim reibungsfreien Pendel, kinetische Energie vollständig in potentielle umgewandelt werden und umgekehrt. Ein Vorgang ist reversibel, wenn der Ausgangszustand ohne jede Veränderung wieder hergestellt werden kann.

Auch der Carnot-Prozess, bei dem zu jedem Zeitpunkt Gleichgewicht mit der Umgebung herrscht, ist reversibel. Die Laufrichtung kann umgekehrt und der Ausgangszustand wieder erreicht werden. Eine rückwärts laufende Carnot-Maschine arbeitet als Wärmepumpe.

### Irreversible Vorgänge

Beliebige thermische Prozesse sind in der Regel nicht umkehrbar oder *irreversibel*. Irreversible Vorgänge verlaufen nur in eine Richtung und eine Umkehrung ist ohne äußere Arbeit nicht möglich. Ein Beispiel ist die Wärmeleitung zwischen Bereichen hoher und niedriger Temperatur. Transport von Wärmeenergie findet ohne äußere Einwirkung nur in einer Richtung statt. Will man den Vorgang der Wärmeleitung umkehren, muss Arbeit an einer Wärmepumpe eingesetzt werden. Einen anderen irreversiblen Vorgang stellt die Bewegung eines Körpers auf der schiefen Ebene bei Wirkung von Reibung dar. Es wird beim Abgleiten potentielle Energie in kinetische umgewandelt. Da dabei durch Reibung thermische Energie erzeugt wird, ist der Ausgangszustand ohne äußere Energiezufuhr nicht wieder herstellbar.

### Zweiter Hauptsatz

Der Umwandlung von Wärmeenergie in mechanische Arbeit sind Grenzen gesetzt. Die Erzeugung von Arbeit setzt zwei Systeme unterschiedlicher Temperatur voraus und führt zu einer Annäherung an das Temperaturniveau. Der *zweite Hauptsatz* der Wärmelehre beschreibt dies in unterschiedlichen Formulierungen:

*Es gibt keine Maschine, die Wärme aus einem Reservoir entnimmt und vollständig in Arbeit umwandelt.*

Eine derartige Maschine, die man *Perpetuum mobile zweiter Art* nennt, wäre nach dem ersten Hauptsatz der Wärmelehre durchaus möglich. Eine präzisere Formulierung des zweiten Hauptsatzes lautet:

*Ein höherer Wirkungsgrad als der des Carnot-Prozesses ist nicht erreichbar:*

$$\eta \leq \eta_C = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Zum Beweis, dass diese Aussage aus der ersten Formulierung folgt, wird nach Bild 5-12 eine reversible Carnot-Maschine als Wärmepumpe eingesetzt. Parallel arbeitet eine beliebige Wärmekraftmaschine. Die gewonnene Arbeit dient zum Antrieb der Carnot-Wärmepumpe. Hat die Wärmekraftmaschine, wie in Bild 5-12 gezeigt, einen höheren Wirkungsgrad als die Carnot-Wärmepumpe, widerspricht das dem zweiten Hauptsatz: es wird Arbeit gewonnen und dem oberen Behälter wird Wärme entzogen, ohne dass ein Teil dem unteren zugeführt wird.

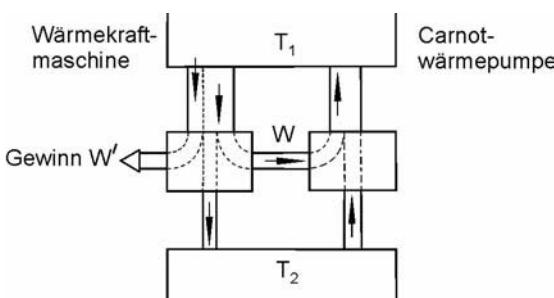


Bild 5-12

Kombination einer beliebigen Wärmekraftmaschine mit einer Carnot-Wärmepumpe. Eine Nutzarbeit  $W'$  kann nicht gewonnen werden

Arbeitet die beliebige Wärmekraftmaschine reversibel und besitzt sie einen Wirkungsgrad  $\eta_C < \eta_{irrev}$  (5.35), widerspricht dies ebenfalls dem zweiten Hauptsatz. Zum Beweis setzt man beide Maschinen wie in Bild 5-12 ein und lässt das System vorwärts und rückwärts laufen. Eine der Laufrichtungen widerspricht der ersten Formulierung des zweiten Hauptsatzes.

*Der Wirkungsgrad irreversibler Maschinen ist kleiner als der reversiblen. Alle reversiblen Prozesse haben den Wirkungsgrad der Carnot-Maschine:*

$$\eta_{irrev} < \eta_{rev} = \eta_C = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (5.36)$$

## 5.4 Thermische Maschinen

Die Funktion und Berechnung von thermischen Motoren kann durch die Darstellung als Kreisprozess veranschaulicht werden. Beispiel dafür sind Kfz- und Flugzeugantriebe, Kühlmaschinen und Wärmepumpen.

### 5.4.1 Wärmekraftmaschinen

Obwohl Verbrennungsmotore offene Systeme sind, können sie näherungsweise als geschlossenen vereinfacht werden. Die Verbrennung wird als Wärmeaufnahme und das Ausströmen der Auspuffgase als Wärmeabgabe angesehen.

#### Ottomotor

Der Arbeitsablauf im Ottomotor erfolgt nach dem Ansaugen des Gemisches in vier Taktten:, Verdichtung, Verbrennung, Ausdehnung und Ausstoßen. Bild 5-13a zeigt das  $p$ -V-Diagramm zur Berechnung des idealen Motors. Die Verdichtung (1 – 2) des Gasgemisches erfolgt so schnell, dass kein Wärmeaustausch stattfindet, d.h. adiabatisch. Bei der Verbrennung (2 – 3) entsteht Wärmeenergie und der Druck steigt schlagartig bei konstantem Volumen an; es handelt sich somit um einen isochoren Vorgang. Die anschließende Ausdehnung des Gases verrichtet Arbeit (3 – 4). Sie verläuft nahezu adiabatisch. Anschließend wird das Auslassventil geöffnet (4 – 1), und der Druck fällt bei konstantem Volumen, d. h. isochor. Ausstoßen der Abgase und Ansaugen des neuen Gemisches verläuft isobar und dabei wird keine Arbeit verrichtet. Die gestrichelte Linie in Bild 5-13a hat somit für die Berechnung keine Bedeutung, sofern man die abgeführte Wärmemenge  $Q_{ab}$  der Isochoren zuschlägt.

Der Ottomotor arbeitet somit zwischen je zwei Adiabaten und Isochoren. Die Nutzarbeit entspricht der Fläche des Kreisdiagramms:

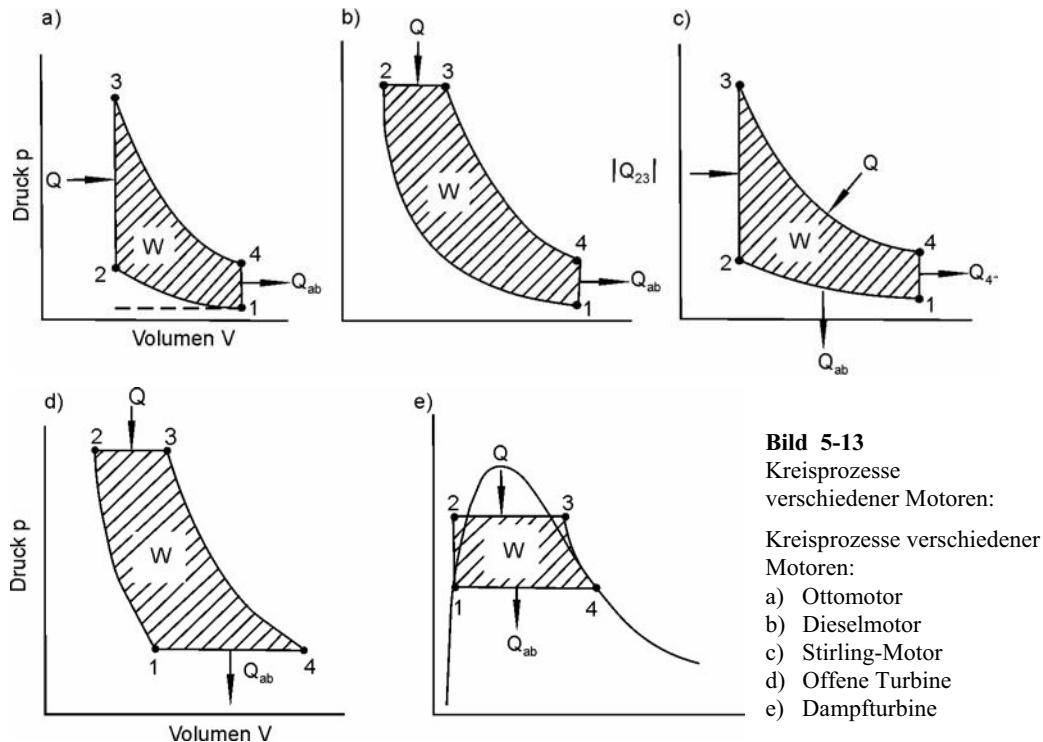
$$W = -\oint p dV = -\int_3^4 p dV - \int_2^1 p dV.$$

Da die begrenzenden Adiabaten-Kurven bekannt sind, ist das Integral mit Hilfe der Gasgleichungen berechenbar. Die zugeführte Wärmeenergie  $Q$  kann ebenfalls angegeben werden. Sie führt zu dem Temperaturanstieg von  $T_2$  nach  $T_3$  und damit nach den Gasgesetzen zur Druckerhöhung von  $p_2$  nach  $p_3$ . Aus den Rechnungen erhält man den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{|W|}{Q} = 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} - 1 \right)^{1-\kappa}. \quad \text{Otto-Motor} \quad (5.37)$$

Der Wirkungsgrad  $\eta$  nimmt mit steigendem Verdichtungsverhältnis  $\frac{V_1}{V_2}$  zu. (Eine hohe Kompression erfordert Super-Benzin.)

**Beispiel 5.4.1** Wie groß ist der theoretische Wirkungsgrad  $\eta$  eines Ottomotors mit einem Verdichtung von  $V_1/V_2 = 8$  und mit  $\kappa = 1,4$ ?  
Mit Hilfe von (5.37) erhält man:  $\eta = 0,54$ . (In der Praxis wird etwa nur die Hälfte dieses Wertes erreicht.)



**Bild 5-13**  
Kreisprozesse  
verschiedener Motoren:

- Kreisprozesse verschiedener Motoren:  
 a) Ottomotor  
 b) Dieselmotor  
 c) Stirling-Motor  
 d) Offene Turbine  
 e) Dampfturbine

### Diesel-Motor

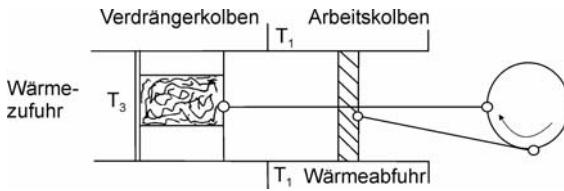
Beim Dieselmotor wird der Kraftstoff in die komprimierte Luft eingespritzt, und die Verbrennung verläuft nahezu isobar. Bild 5-13b zeigt das idealisierte  $p$ - $V$ -Diagramm, das aus zwei Adiabaten, einer Isobaren und einer Isochoren besteht. In der Praxis ist der Wirkungsgrad günstiger als beim Otto-Motor, da das Verdichtungsverhältnis  $\frac{V_1}{V_2} \approx 20$  beträgt.

### Stirling-Motor

Der Stirlingmotor arbeitet mit erwärmten Gasen. Es handelt sich nicht um einen Verbrennungsmotor. Das Kreisdiagramm besteht aus je zwei Isochoren und Isothermen (Bild 5-13c). Technisch wird der Stirlingmotor im *Heißluftmotor* realisiert. Die Erwärmung der Luft erfolgt kontinuierlich, z. B. durch eine elektrische Heizung. Es gelingt, die bei der isochoren Abkühlung abgegebene Wärme zwischenzuspeichern und dem Motor bei der Erwärmung wieder zuzuführen:  $Q_{23} = |Q_{41}|$ . Es muss von außen nur die Wärme  $Q$  eingebracht werden. Die Be-

rechnung des Wirkungsgrades ist analog zum Carnot-Prozess und man erhält das gleiche Ergebnis  $\eta = (T_3 - T_1)/T_1$ . Wegen des optimalen Wirkungsgrades findet der Stirling-Motor neuerdings wieder Interesse.

Die technische Realisierung des Heißluftmotors zeigt Bild 5-14. Ein Arbeits- und ein Verdrängerkolben bewegen sich um  $90^\circ$  phasenverschoben. Der Verdrängerkolben schiebt die Luft hin und her und bringt sie in Berührung mit dem geheizten und gekühlten Teil der Maschine. Die Luft bewegt sich durch diesen Kolben an Metallspänen vorbei, die als Wärmespeicher dienen. Strömt heiße Luft, so nehmen sie Wärme auf, die im späteren Zyklus an die kalte Luft abgegeben wird. Leider gelingt diese Wärmeübertragung ( $Q_{23} = |Q_{41}|$ ) nur unvollständig, so dass der maximale Wirkungsgrad nicht erreicht wird.



**Bild 5-14**  
Aufbau eines Heißluftmotors

### Gasturbinen

Flugzeugmotoren arbeiten mit offenen Gasturbinen, bei denen der so genannte Joule'sche Prozess abläuft (Bild 5-13d). Luft wird im Kompressor adiabatisch komprimiert und erwärmt. In der Brennkammer wird eingespritztes Kerosin in der heißen Luft verbrannt. Dabei steigt die Temperatur bei konstantem Druck. Es handelt sich also um eine isobare Erwärmung. In der Turbine expandiert das Gas adiabatisch. Danach werden die Abgase bei konstantem Druck, d. h. isobar ausgestoßen.

### Dampfturbine

In Dampfturbinen läuft der Kreisprozess nach Bild 5-13e ab. Die Speisewasserpumpe erhöht den Druck des Wassers von  $p_1$  nach  $p_2$ . Durch Wärmezufuhr wird das Wasser isobar verdampft (2 – 3). Der Heißdampf wird in der Turbine von 3 nach 4 adiabatisch entspannt. Im Kondensator verflüssigt sich der entspannte Dampf und gibt Wärme an das Kühlwasser ab. Das Kondensat wird wieder dem Speisewasser zugeleitet.

### 5.4.2 Wärmepumpe

Bei Wärmekraftmaschinen läuft der Kreisprozess im Uhrzeigersinn, d. h. rechts herum und Wärme wird teilweise in Arbeit umgewandelt. Bei der Wärmepumpe ist die Umlaufrichtung linksläufig. Es wird Arbeit in Wärme transformiert. Es ergeben sich zwei wichtige Anwendungen, die auf den gleichen Prinzipien beruhen: der Kühlschrank und die Wärmepumpe als Heizungssystem.

### Leistungszahl

Bei der Wärmepumpe ist die Wärmequelle die Luft, das Erdreich oder das Grundwasser. Diesen Systemen wird Wärme entzogen und der Wärmesenke, z. B. der Zentralheizung eines Hauses unter Aufwand von Arbeit zugeführt (Bild 5-15). Dabei kann mehr Wärme abgeführt werden als bei direkter Umwandlung von Arbeit in thermische Energie. Es handelt sich also

um ein sehr effektives Heizungssystem. Man definiert die Leistungszahl  $\varepsilon$  als das Verhältnis der abführbaren Wärme  $Q_{ab}$  und der eingesetzten Arbeit  $W$ :

$$\varepsilon = \frac{|Q_{ab}|}{W} > 1. \quad \text{Wärmepumpe} \quad (5.38a)$$

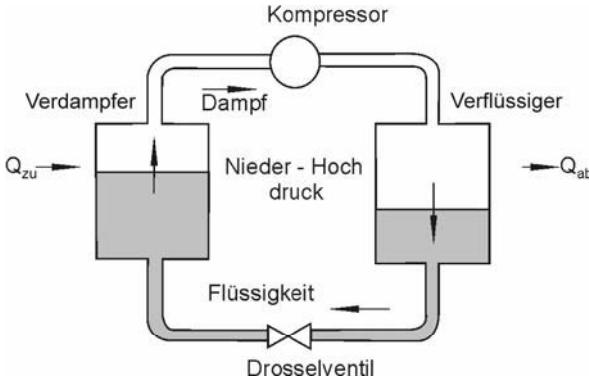


Bild 5-15

Prinzip einer Kompressor-Kältemaschine oder einer Wärmepumpe

Mit zunehmender Leistungszahl  $\varepsilon$  steigt die Effektivität des Systems. Für den Carnot-Prozess berechnet man:

$$\varepsilon = \frac{1}{\eta} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \quad \text{Leistungszahl } \varepsilon \quad (5.39)$$

Die Leistungszahl  $\varepsilon$  ist umgekehrt proportional zum Wirkungsgrad  $\eta$  des rechtsläufigen Prozesses. Je kleiner die Temperaturdifferenz  $T_1 - T_2$  ist, umso höher ist die Leistungszahl  $\varepsilon$ . Für elektrisch betriebene Luft-Wasser-Wärmepumpen erreicht man beispielsweise eine Leistungszahl von  $\varepsilon = 3$ , d. h. sie sind dreimal so effektiv wie eine direkte elektrische Heizung. Bei großen Anlagen mit Dieselmotoren ist die Leistungszahl größer.

**Beispiel 5.4.2** Berechnen Sie die Leistungszahl einer Wärmepumpe, wenn zwischen dem geheizten Raum und der kühlen Umgebung eine Temperaturdifferenz von 25 °C herrschen.

Aus (5.39) erhält man mit  $T_1 = 293$  K und  $T_1 - T_2 = 25$  K :  $\eta = 11,7$ . Dieser maximale theoretische Wert wird in der Praxis nicht erreicht. Ein realistischer Wert beträgt  $\eta \approx 4,5$ .

## Kältemaschinen

Kühlmaschinen und Wärmepumpen benutzen Kältemittel, die einen Kreisprozess mit Phasenänderungen durchlaufen. Früher wurden FCKW-Substanzen verwendet, die in der oberen Atmosphäre Chlor freisetzen und dadurch zur Zerstörung der Ozonschicht beitragen. Das Prinzip einer Kältemaschine zeigt Bild 5-15. Im Verdampfer wird dem flüssigen Kältemittel bei niedrigem Druck und niedriger Temperatur Wärme zugeführt. Beim Kühlschrank geschieht dies im Kühlfach, bei der Wärmepumpe beispielsweise im Erdreich. Der Dampf wird mit einem Kompressor verdichtet und dabei erwärmt. Im Kondensator wird Wärme abgeführt und es findet eine Kondensation statt. Beim Kühlschrank gibt es dafür im hinteren Teil Kühlrippen: Bei der Wärmepumpe übernimmt diese Aufgabe das Heizungssystem eines Hauses. Die Flüssigkeit unter hohem Druck wird an einem Drosselventil unter Abkühlung entspannt und wieder dem Verdampfer zugeführt. Beim Kühlschrank interessiert die Wärme  $|Q_{zu}|$ , die dem Kühlgut

entzogen wird. Die Leistungszahl  $\varepsilon$  lautet dementsprechend in Abweichung zur Wärmepumpe (5.38a):

$$\varepsilon = \frac{|Q_{zu}|}{W} . \quad \text{Kältemaschine} \quad (5.38b)$$

## 5.5 Wärmetransport

Wärmeenergie wird durch *Wärmeleitung*, *Konvektion* und *Wärmestrahlung* übertragen.

### 5.5.1 Wärmeleitung

#### Grundlegendes

Als *Wärmeleitung* bezeichnet man den Transport von Wärmeenergie in Materie ohne eine Übertragung von Materie, wie es bei der Konvektion der Fall ist. Die Übergabe der thermischen Energie findet in Richtung des Temperaturgefälles statt.

Zur Vereinfachung der mathematischen Beschreibung, betrachtet man einen Stab der Länge  $l$  mit dem Querschnitt  $A$ , der an den Enden auf den Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  gehalten wird. Die transportierte Wärmeenergie  $Q$  ist proportional zur Querschnittsfläche  $A$ , Zeitdauer  $t$  und Temperaturdifferenz  $\Delta T = T_2 - T_1$  sowie umgekehrt proportional zur Länge  $l$ :

$$Q = \lambda \frac{At\Delta T}{l} \quad [\lambda] = \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \quad \text{oder}$$

$$j = \frac{Q}{At} = \lambda \frac{\Delta T}{l} \quad [j] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} .$$
Wärmeleitung (5.40a)

Der Proportionalitätsfaktor ist die *Wärmeleitfähigkeit*  $\lambda$ . (5.40a) setzt ein Temperaturliegengewicht voraus und stellt die eindimensionale stationäre Form des Wärmetransports dar. Die Größe  $j = \frac{Q}{At}$  gibt die pro Fläche  $A$  und Zeit  $t$  transportierte Wärme  $Q$  an. Man nennt  $j$  *Dichte des Wärmestroms*.

**Beispiel 5.5.1** Welche Energie  $Q$  geht durch Wärmeleitung in  $t = 1$  Stunde durch eine  $l = 30$  cm dicke Ziegelwand von  $A = 12 \text{ m}^2$ ? (Temperaturdifferenz  $24^\circ\text{C}$ , Wärmeleitfähigkeit  $\lambda = 0,8 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ )  
Man setzt die Werte in (5.40a) ein und erhält:  $Q = 2760 \text{ kJ} = 0,77 \text{ kWh}$ .

Bei der Wärmeleitung wird kinetische Energie der Moleküle, d. h. Wärme, auf die Nachbar teilchen übertragen. Bei Gasen ist die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  klein (Tabelle 5.7), da die Moleküle wegen der geringen Dichte große Abstände aufweisen. Bei Festkörpern kann der Energieübertrag durch zwei Prozesse erfolgen:

- (1) Die Moleküle sind im Kristallgitter fest gebunden und führen infolge der thermischen Energie Gitterschwingungen aus. Bei der Wärmeleitung wird Wärmeenergie, d. h. Gitterschwingungen von einem Molekül zum anderen übertragen. Die Quantenmechanik zeigt, dass Gitterschwingungen im Kristall in Form von Phononen auftreten, die sich ähnlich wie Teilchen verhalten. Wärmeleitung kann als die *Wechselwirkung von Phononen* mit dem Kristallgitter gedeutet werden.

(2) In Metallen sind im Gitter *freie Elektronen* vorhanden. Auch diese können zur Wärmeausbreitung im Festkörper beitragen. Dadurch kann die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  groß werden (Tabelle 5.7). In Metallen mit vielen freien Elektronen gilt das *Wiedemann-Franz'sche Gesetz*, das eine Proportionalität zwischen der elektrischen Leitfähigkeit  $\kappa$  und  $\lambda$  formuliert:

$$\lambda = LT\kappa \quad \text{Wiedemann-Franz'sche Gesetz} \quad (5.41)$$

(5.41) gilt für nicht zu tiefe Temperaturen  $T$ . Die so genannte Lorentz'sche Zahl  $L$  hat für Metalle ungefähr denselben Wert:  $L = 2,45 \cdot 10^{-8} \frac{\text{V}^2}{\text{K}^2}$ .

In Tabelle 5.7 sind einige Werte für die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  von Metallen, Nichtmetallen, Flüssigkeiten und Gasen aufgeführt. Die Werte für Nichtmetalle sind wesentlich geringer als von Metallen. Baustoffe mit geringem  $\lambda$  besitzen luftgefüllte Poren oder es handelt sich um geschäumte Materialien. Auch in Doppelfenstern wird die geringe Wärmeleitfähigkeit von Gasen ausgenutzt.

### Mehrere Schichten

In der Technik werden beim Bau von Wänden mehrere Schichten übereinander verwendet. Im Gleichgewicht muss durch jede Schicht der gleiche Wärmestrom  $j$  transportiert werden. Aus diesen Bedingungen kann man folgende Gleichung ableiten:

$$j = \frac{Q}{At} = \frac{\Delta T}{R},$$

wobei  $R$  den gesamten *Wärmedurchlasswiderstand* angibt. Er lässt sich aus der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_i$  und der Dicke  $d_i$  der einzelnen ebenen Schichten ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) berechnen:

$$R = \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \dots$$

### 5.5.2 Konvektion

Konvektion stellt eine Wärmeübertragung in Flüssigkeiten und Gasen dar, die mit einem Massentransport verbunden ist. Bei der *freien Konvektion* führen Dichteunterschiede durch Erwärmung zu Strömungen, die eine Übertragung von Wärme zur Folge haben. Ein bekanntes Beispiel ist die Zentralheizung, die prinzipiell auch ohne Umwälzpumpe funktioniert. Das erwärmte Wasser steigt nach oben, das abgekühlte nach unten. Es entsteht eine zirkulierende Strömung im Heizsystem. Nach einem ähnlichen Prinzip arbeitet die Kühlung der Heizkörper und die Erwärmung des Raumes durch die Konvektionsströmung der Luft- oder die Wärmeabfuhr an den Kühlrippen elektrischer Geräte. Auch an den äußeren Schichten der Sonne findet Wärmetransport durch Konvektionsströme von Wasserstoff statt. Mathematisch sind die Differentialgleichungen der konvektiven Wärmeübertragung kompliziert. Die Wärmestromdichte  $j$  an einer ebenen Fläche  $A$  hängt näherungsweise linear von der Temperaturdifferenz von Wand und Fluid  $\Delta T$  ab:

$$j = \frac{Q}{At} = \alpha \Delta T \quad [j] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \quad \text{Konvektion} \quad (5.42a)$$

$\alpha$  ist der *Wärmeübergangskoeffizient*. Er ist im Allgemeinen schwer zu ermitteln, da er von den genaueren Randbedingungen abhängt. Es gelten folgende grobe Richtwerte:

$$\begin{aligned} \text{Wasser: } \alpha &= 350 \quad \text{bis} \quad 600 \quad \text{J/(m}^2\text{sK)} \\ \text{Luft: } \alpha &= 4,0 \quad \text{bis} \quad 4,5 \quad \text{J/(m}^2\text{sK)} \end{aligned} \quad (5.42b)$$

Bei der *erzwungenen Konvektion* hängt der Wärmestrom von der Geschwindigkeit der kühlen- den Strömung ab.

### 5.5.3 Wärmestrahlung

Theoretisch fällt die Emission und Absorption von Wärmestrahlung in den Abschnitt 9.3 (Quantenoptik). Vom praktischen Gesichtspunkt aus handelt es sich um ein Gebiet der Wärme- lehre und Solarenergie.

#### Entstehung der Strahlung

In Materie bewegen sich die Atome, Ionen oder Elektronen aufgrund ihrer thermischen Energie. Dies hat die Abstrahlung oder *Emission* elektromagnetischer Wellen zur Folge, der *Wärmestrahlung*. Mit zunehmender Temperatur verkürzt sich die Wellenlänge vom infraroten bis in den sichtbaren Spektralbereich und der Körper beginnt zu glühen. Beim umgekehrten Vorgang, der *Absorption*, trifft Strahlung auf Materie und wird in Wärmeenergie umgewan- delt.

Ein Strahler wird durch die Strahlungsleistung  $\Phi$  beschrieben, welche die in der Zeit  $dt$  emit- tierte Energie  $dW$  angibt:

$$\Phi = \frac{dW}{dt} \quad [\Phi] = \text{W} \quad \text{Strahlungsleistung } \Phi \quad (5.43)$$

Bezieht man die abgestrahlte Leistung auf ein Flächenelement  $dA_s$  des Strahlers, erhält man die spezifische Ausstrahlung  $M$ :

$$M = \frac{d\Phi}{dA_s} \quad [M] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} . \quad \text{Spezifische Ausstrahlung } M \quad (5.44a)$$

Fällt Strahlung auf ein Flächenelement eines Empfängers  $dA_e$ , der senkrecht zur Strahlrich- tung steht, wird dort die Bestrahlungsstärke  $E$  erzeugt:

$$E = \frac{d\Phi}{dA_e} \quad [E] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} . \quad \text{Bestrahlungsstärke } E \quad (5.44b)$$

Die Bestrahlungsstärke der Sonne auf der Erde beträgt im Mittel  $E \approx 1,4 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$ . Man nennt diesen Wert *Solarkonstante*.

#### Absorptions- und Emissionsgrad

Bei Bestrahlung eines Materials wird von der einfallenden Bestrahlungsstärke  $E$  ein Teil  $E_a$  absorbiert, der Rest wird zurückgestrahlt oder hindurchgelassen. Der *Absorptionsgrad*  $\alpha$  be- schreibt den absorbierten Teil der einfallenden Strahlung:

$$\alpha = \frac{E_a}{E} \quad [\alpha] = 1. \quad \text{Absorptionsgrad } \alpha \quad (5.45a)$$

Körper mit vollständiger Absorption  $\alpha = 1$  wirken schwarz, da keine Strahlung reflektiert wird. So genannte *Schwarze Körper* werden durch Hohlräume mit absorbierenden Wänden realisiert, in denen sich eine Öffnung befindet. (Als Beispiel sei das Auge erwähnt; die Pupille ist schwarz.)

Die Erfahrung zeigt, dass Körper mit hoher Absorption eine starke Emission von Wärmestrahlung zeigen. Man definiert als *Emissionsgrad*  $\varepsilon$  das Verhältnis der spezifischen Ausstrahlung  $M$  zum entsprechenden Wert  $M_s$  eines schwarzen Körpers (mit  $\alpha = 1$ ).  $M_s$  stellt den maximal möglichen Wert dar:

$$\varepsilon = \frac{M}{M_s} \quad [\varepsilon] = 1. \quad \text{Emissionsgrad } \varepsilon \quad (5.45b)$$

Der Emissionsgrad  $\varepsilon$  eines Temperaturstrahlers ist seinem Absorptionsgrad  $\alpha$  gleich:

$$\varepsilon = \alpha \quad \text{Kirchhoff'sches Strahlungsgesetz} \quad (5.46)$$

Zum Verständnis dieser Aussage denke man sich zwei parallele Flächen gleicher Temperatur, die miteinander im Strahlungsaustausch stehen. Andere Wärmeverluste sollen nicht auftreten. Jede Fläche strahlt soviel Energie ab, wie sie absorbiert. Wäre das nicht der Fall, würde sich eine Fläche erwärmen. Dies widerspricht dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik.

Die Emissionsgrade einiger Werk- und Baustoffe sind in Tabelle 5.8 angegeben.

**Tabelle 5.8** Emissionsgrad  $\varepsilon$  einiger Stoffe bei der Temperatur  $\vartheta$

Metall	$\vartheta$ (°C)	$\varepsilon$	Material	$\vartheta$ (°C)	$\varepsilon$
Al, poliert	20	0,04	Beton	20	0,94
Al, oxidiert	20	0,25	Mauerwerk	20	0,93
Messing	25	0,04	Holz	25	0,9
Messing, oxidiert	200	0,61	Dachpappe	20	0,9
Eisen, poliert	100	0,20	Glas	20	0,88
Eisen, angerostet	20	0,65	Lacke	100	~0,95
Eisen, verzinkt	25	0,25	Kunststoffe	20	0,9
Chrom, poliert	150	0,07	Wasser	20	0,9

### Stefan-Boltzman'sches Gesetz

Die spezifische Ausstrahlung  $M_s$  eines *schwarzen Temperaturstrahlers* steigt mit der vierten Potenz der Temperatur (in K):

$$M_s = \sigma \cdot T^4 \quad \sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}. \quad \text{Schwarzer Strahler} \quad (5.47a)$$

$\sigma$  ist die *Stefan-Boltzmann'sche Konstante*. Die Ausstrahlung eines nicht-schwarzen oder *grauen Körpers* beträgt dementsprechend  $M = \varepsilon \sigma T^4$ . Neben der Emission nimmt der Körper Strahlung aus seiner Umgebung mit der Temperatur  $T'$  auf. Damit wird die resultierende spezifische Ausstrahlung:

$$M = \varepsilon \sigma (T^4 - T'^4).$$

Thermische Strahlung

(5.47b)

Kühlkörper sollen ein hohes Emissionsvermögen  $\varepsilon$  aufweisen. Dies wird durch schwarze Oberflächen erreicht. Bei niedrigen Temperaturen wird die Wärmestrahlung im Infraroten emittiert. Bei hohen Temperaturen wird auch im Sichtbaren emittiert und der Körper glüht.

Zur Reduzierung der Verluste von Wärmestrahlung werden reflektierende Folien oder Schichten eingesetzt. Beispiele sind die Verwendung von Aluminium-Folien und die Verspiegelung bei Thermosgefäßen.

**Beispiel 5.5.3a** Ein heiße Fläche (z. B. Bügeleisen) mit  $227^\circ\text{C}$  ( $T = 450\text{ K}$ ) gibt nach (5.47a) eine spezifische Abstrahlung von  $M = \sigma T^4 = 2325\text{ W/m}^2$  ( $\varepsilon = 1$ ).

Genauer ist (5.47b). Bei einer Umgebungstemperatur von  $27^\circ\text{C}$  ( $T' = 300\text{ K}$ ):  $M = 1866\text{ W/m}^2$ .

### Planck'sches Strahlungsgesetz

Das Spektrum der Wärmestrahlung eines schwarzen Körpers wird durch das Planck'sche Strahlungsgesetz beschrieben:

$$M_s(\lambda) d\lambda = \frac{2\pi hc_0}{\lambda^5 (e^{hc_0/\lambda kT} - 1)} d\lambda \quad [M_s(\lambda)] = \frac{\text{W}}{\text{m}^3}. \quad \text{Planck'sches Gesetz} \quad (5.48)$$

Die Größe  $M_s(\lambda)$  gibt die abgestrahlte Energie pro Fläche und pro Wellenlängenintervall  $d\lambda$  an (daher in  $\text{W/m}^3$ ). Die Wellenlänge der Strahlung wird durch  $\lambda$  gegeben.  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}\text{ Js}$  ist das Planck'sche Wirkungsquantum,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}\text{ J/K}$  die Boltzmann-Konstante und  $c_0$  die Lichtgeschwindigkeit. Mit zunehmender Temperatur verschiebt sich das Spektrum vom infraroten in den sichtbaren Spektralbereich (Bild 5-16).

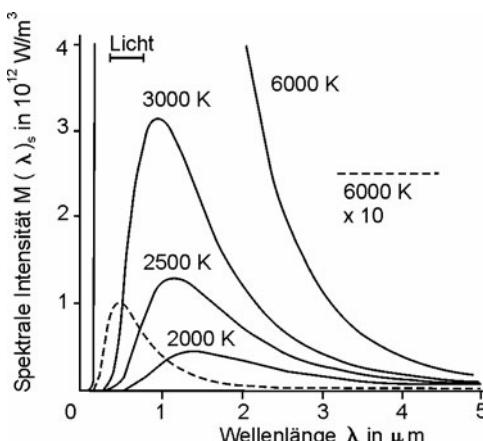


Bild 5-16

Spektrale Abstrahlung  $M(\lambda)_s$  schwarzer Körper (Planck'sche Strahlungsformel (5.48))

### **Wien'sches Verschiebungsgesetz**

Das Maximum der spektralen Ausstrahlung kann aus (5.48) berechnet werden. Es tritt bei der Wellenlänge  $\lambda_{\max}$  auf:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} \quad \text{mit } b = 2897,79 \mu\text{m K} . \quad \text{Wien'sches Verschiebungsgesetz} \quad (5.49)$$

$b$  ist die *Wien'sche Konstante*. Die Oberflächentemperatur der Sonne beträgt etwa 6000 K und das Maximum des Spektrums liegt daher bei etwa 0,5  $\mu\text{m}$ . Ungünstiger ist die Lichtausbeute bei Glühfadenlampen mit  $T = 3000$  K, deren spektrales Maximum bei etwa 1  $\mu\text{m}$  auftritt.

**Beispiel 5.5.3b** Das Maximum der Sonnenstrahlung liegt bei  $\lambda_{\max} = 555 \text{ nm}$ . Nach (5.49) erhält man eine Sonnen-temperatur (an der Oberfläche) von  $T = 2897,8/0,5 \text{ K} = 5221 \text{ K}$ . Eine Glühlampe mit  $T = 2900 \text{ K}$  hat ihr Strahlungsmaximum bei  $\lambda_{\max} = 2897,8/2900 \mu\text{m} \approx 1 \mu\text{m}$ .

### **Optische Temperaturmessung**

Aufgrund der Wärmestrahlung ist eine optische Messung von möglich (Tabelle 5.2). Glüh-fadenpyrometer bestehen aus einem Fernrohr, mit einem Glühfaden an der Stelle des Zwi-schenbildes. Durch eine Stromregelung wird die Temperatur des Fadens so eingestellt, dass die Farbe des beobachteten glühenden Körpers entspricht.

Auch niedrigere Temperaturen nicht glühender Körper können optisch vermessen werden. Im einfachsten Fall kann dies durch zwei Photodioden erfolgen, die für zwei verschiedene Spekt-ralbereiche im Infraroten empfindlich sind. Aufgrund der Strahlungsgesetze kann aus dem Verhältnis der Strahlungsintensitäten die Temperatur ermittelt werden.

Wärmebildgeräte sind im Prinzip Fernsehkamera-Systeme mit einer Photokathode, die zwi-schen 3 bis 5  $\mu\text{m}$  oder 8 bis 14  $\mu\text{m}$  empfindlich sind. Die Intensitäten im Bild können durch eine Bildverarbeitung in Farbwerte auf dem Monitor umgewandelt werden. Jede Farbe ent-spricht dann einer bestimmten Temperatur. Ähnlich arbeiten Infrarot-Sichtgeräte, die mit ei-nem so genannten Bildverstärker versehen sind.

### **Solarkollektoren**

Solarkollektoren erwärmen Wasser durch die Einwirkung von Sonnenstrahlung. Der Wir-kungsgrad kann durch Absorber mit selektiver Wirkung erhöht werden: im Bereich des Son-nenspektrums zwischen 0,4 und 2  $\mu\text{m}$  findet eine hohe Absorption mit  $\alpha \approx 0,97$  statt. Die Wassertemperatur beträgt etwa 80 °C = 353 K und das Maximum des emittierten Spektrums liegt bei  $\lambda_{\max} \approx 8 \mu\text{m}$ . Die Abstrahlung kann dadurch reduziert werden, dass die Absorber-schichten bei Wellenlängen oberhalb von 6  $\mu\text{m}$  nur sehr geringfügig absorbieren und emittie-ren, beispielsweise  $\epsilon = \epsilon \approx 0,05$ . Damit wird die Strahlung reflektiert.

### **Treibhauseffekt**

Nach ähnlichen Prinzipien entsteht die Wärme in Treibhäusern. Die Strahlung tritt ungehindert durch die Glasscheiben und durch die Absorption der Strahlung erwärmt sich der Boden und die Luft. Die Abstrahlung, die bei Zimmertemperatur ein Maximum bei etwa 10  $\mu\text{m}$  aufweist, wird durch die Scheiben verhindert, die bei dieser Wellenlänge nicht transparent sind.

Gegenwärtig stellt die Erde ein Treibhaus dar, in dem es zu warm wird. Die notwendige Abstrahlung der Wärme wird durch einen erhöhten CO<sub>2</sub>-Gehalt der Atmosphäre reduziert. Diese Moleküle besitzen zahlreiche Rotations-Vibrations-Niveaus (Abschnitt 10.3.4), welche die Wärmestrahlung der Erde absorbieren. Eine Erwärmung der Erde um wenige Grad führt zur Abschmelzung des polaren Eises und anderen unerwünschten Folgen. Zur Vermeidung muss die CO<sub>2</sub>-Produktion eingeschränkt werden.

## 6 Schwingungen und Wellen

Systeme, deren Gleichgewichtszustand gestört wird, kehren durch Hin- und Herschwingen in ihre ursprüngliche Lage zurück. Man bezeichnet Vorgänge, bei denen sich eine Messgröße zeitlich periodisch ändert, als *Schwingungen*. Die Größe kann beispielsweise die Auslenkung eines mechanischen Systems aus der Ruhelage, die Druckschwankung in einer Schallwelle oder die elektrische Feldstärke sein. Schwingungen spielen in vielen Bereichen des Lebens und der Technik eine wichtige Rolle, z. B. beim Pendel, bei Federungen, beim Schall und in der Elektronik. Sind mehrere schwingungsfähige Systeme miteinander gekoppelt, z. B. die Atome eines Festkörpers, kann sich die Schwingung räumlich ausbreiten. Das Phänomen der Ausbreitung von Schwingungen, bei denen ein Energietransport stattfindet, nennt man *Welle*. Wellen treten unter anderem in der Mechanik, Akustik, Optik und Elektronik auf.

### 6.1 Schwingungen

Man unterscheidet freie und erzwungene, sowie ungedämpfte und gedämpfte Schwingungen. Bei der *freien Schwingung* wird der Oszillator, d. h. ein schwingfähiges System, einmalig aus der Ruhelage ausgelenkt und dann sich selbst überlassen. Im *ungedämpften Fall*, der mathematisch besonders leicht zu beschreiben ist, in der Praxis aber nur näherungsweise vorkommt, bleibt die maximale Auslenkung (Amplitude) konstant. Reale Schwingungen werden durch Energieverluste, z. B. Reibung, *gedämpft* und die Amplitude nimmt ab. Bei der *erzwungenen Schwingung* wird das System periodisch von außen angeregt. Sinusförmige Schwingungen nennt man *harmonisch*, nicht-sinusförmige *anharmonisch*.

#### 6.1.1 Freie ungedämpfte Schwingung

Eine ungedämpfte Schwingung ist eine periodische Funktion der Zeit  $t$ .

Die Auslenkung  $y$  eines Oszillators (oder eine andere physikalische Größe wie die elektrische Feldstärke) bleibt nach der Periodendauer  $T$  gleich:

$$y(t) = y(t + T). \quad (6.1)$$

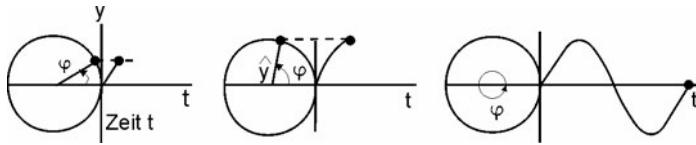
Eine Schwingung wird durch eine in der Zeit periodische Funktion beschrieben.

In der Technik treten häufig sinus- oder kosinusförmige Schwingungen auf. Für diese *harmonischen Schwingungen* gilt:

$y(t) = \hat{y} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = \hat{y} \sin(2\pi ft).$	Schwingung	(6.2a)
-----------------------------------------------------------------------------	------------	--------

Man kann leicht prüfen, dass diese Beziehung periodisch in  $T$  ist, so wie es in (6.1) gefordert wird.  $\hat{y}$  stellt die maximale Auslenkung dar, die man *Amplitude* nennt. Die *Periodendauer*  $T$  ist mit der *Frequenz*  $f$  verknüpft:

$f = \frac{1}{T} \quad [f] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz} = \text{Hertz}.$	Frequenz $f$	(6.3a)
------------------------------------------------------------------------------	--------------	--------



**Bild 6-1** Analogie zwischen einer Schwingung und einer Kreisbewegung

Es besteht eine Analogie zwischen einer Kreisbewegung und einer Sinusschwingung. Nach Bild 6-1 rotiert ein Punkt mit der Winkelgeschwindigkeit oder *Kreisfrequenz*  $\omega$ . Der momentane Drehwinkel  $\varphi$  beträgt:

$$\varphi = \omega t = 2\pi \frac{t}{T} = 2\pi f t.$$

Projiziert man die Position des rotierenden Punktes in Bild 6-1 auf die  $y$ -Achse, erhält man  $y = \hat{y} \sin(2\pi f t)$ . Dieses Ergebnis stimmt mit (6.2a) überein. Wegen dieser Analogie zur Kreisbewegung führt man zur Beschreibung von Schwingungen die *Winkelgeschwindigkeit* oder *Kreisfrequenz*  $\omega$  ein:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad [\omega] = \frac{1}{s}. \quad \text{Kreisfrequenz } \omega \quad (6.3b)$$

Man bezeichnet den Drehwinkel  $\varphi = \omega t$  als *Phase* oder *Phasenwinkel*  $\varphi$ . Die Schwingung kann auch um die Phase  $\varphi_0$  verschoben sein. In diesem Fall ist die Auslenkung nicht  $y = 0$  zur Zeit  $t = 0$ . Allgemein gilt somit für eine harmonische Schwingung:

$$y = \hat{y} \sin(2\pi f t + \varphi_0) = \hat{y} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad \text{Schwingung} \quad (6.2b)$$

Dabei ist  $y$  die Auslenkung der Schwingung zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$ ,  $\hat{y}$  die Amplitude,  $f$  die Frequenz,  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $t$  die Zeit.

**Beispiel 6.1.1a** Eine Schwingung führt 4 volle Perioden in 9,5 s aus. Es betragen: die Periodendauer  $T = 9,5/4$  s = 2,38 s, die Frequenz  $f = 1/T = 0,42$  s<sup>-1</sup> = 0,42 Hz und die Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f = 2,64$  s<sup>-1</sup>.

### Schwingungsgleichung

Die Gleichung einer Schwingung kann aus den Kräften oder dem Energiesatz abgeleitet werden. Dies wird im nächsten Abschnitt an einigen Beispielen vorgeführt. Hier wird ein anderer einfacher Weg aufgezeigt. Gleichung 6.2b beschreibt die Auslenkung  $y$  einer mechanischen Schwingung (oder einer anderen physikalischen Größe, wie die elektrische Feldstärke). Die Geschwindigkeit in der Schwingung wird aus  $v = dy/dt$  ermittelt. Durch Differenzieren von (6.2b) erhält man:

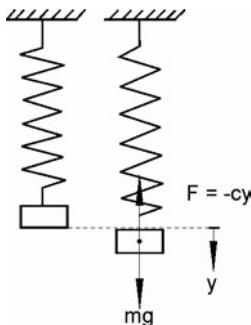
$$\frac{dy}{dt} = \hat{y}\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\hat{y}\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Die letzte Beziehung wird mit (6.2b) kombiniert und es entsteht die so genannte *Schwingungsgleichung*:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y \quad \text{oder} \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0. \quad \text{Diff.-Gleichung freie Schwingung} \quad (6.4)$$

Physikalische Größen, die dieser Gleichung gehorchen, führen freie harmonische Schwingungen mit der Kreisfrequenz  $\omega$  aus. Es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung zweiter

Ordnung, deren Lösung durch (6.2b) gegeben ist. Die so genannten *Anfangsbedingungen* legen die Amplitude und die Phase fest.



**Bild 6-2**  
Federschwingung. Die rücktreibende Kraft  $F$  ist der Auslenkung  $y$  entgegengerichtet

### Federschwingung

Im Folgenden wird die Schwingungsgleichung speziell für eine Federschwingung abgeleitet. Für eine Schraubenfeder gilt nach Bild 6-2: die rücktreibende Kraft  $F$  ist der Auslenkung  $y$  proportional aber entgegengerichtet (Gegenkraft zu (2.29)):

$$F = -cy \quad [c] = \frac{N}{m}.$$

Die Größe  $c$  ist die Federkonstante. Die Kraft  $F$  führt zu einer Beschleunigung  $a = \frac{d^2y}{dt^2}$ :

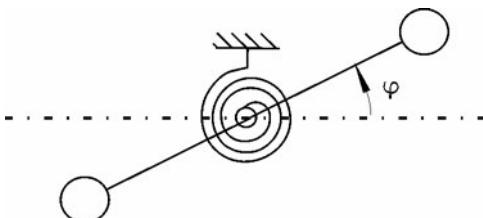
$$F = ma = m \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Durch Gleichsetzen beider Gleichungen erhält man die *Differentialgleichung einer Federschwingung*:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + cy = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{c}{m} y = 0. \quad (6.5)$$

Man kann dieses Ergebnis mit der Schwingungsgleichung (6.4) vergleichen und erhält für die Kreisfrequenz:  $\omega^2 = \frac{c}{m}$ . Daraus folgt für die *Frequenz f einer Federschwingung*:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{oder} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad \text{Elastische Schwingung} \quad (6.6)$$



**Bild 6-3**  
Dreherschwingung. Das rücktreibende Drehmoment  $M$  ist dem Drehwinkel  $\varphi$  entgegengerichtet

**Beispiel 6.1.1b** Es wird eine Masse von  $m = 500 \text{ g}$  an eine Schraubenfeder gehängt, die sich dabei um  $y = 5 \text{ cm}$  dehnt. Wie groß ist die Federkonstante  $c$ ? Wie groß sind Periodendauer  $T$  und Frequenz  $f$  der Federschwingung?

$$\text{Federkonstante: } c = |F/y| = mg/y = 0,5 \cdot 9,81 / 0,05 \text{ N/m} = 98,1 \text{ N/m}$$

$$\text{Frequenz: } f = (1/2\pi)\sqrt{c/m} = 2,23 \text{ Hz.} \quad \text{Schwingungsdauer: } T = 1/f = 0,449 \text{ s.}$$

## Drehschwingungen

Bei Drehungen betrachtet man statt der Kräfte die auftretenden Drehmomente. Der Drehwinkel  $\varphi$  eines *Drehschwingers* nach Bild 6-3 ist proportional zum rücktreibenden Drehmoment  $M$ :

$$M = -D \varphi \quad [M] = \text{Nm} \quad [D] = \text{Nm},$$

wobei  $D$  als *Richtmoment* bezeichnet wird. Das Drehmoment  $M$  führt zu einer Winkelbeschleunigung  $\alpha = d^2\varphi/dt^2$  (Abschnitt 2.5.2):

$$M = J\alpha = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad [J] = \text{kg m}^2.$$

Das Massenträgheitsmoment ist  $J$ . Durch Gleichsetzen ergibt sich analog zu (6.5):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{D}{J}\varphi = 0. \quad (6.7)$$

Der Vergleich mit der Schwingungsgleichung 6.4 liefert für die *Frequenz*  $f$  einer *Dreh-* oder *Torsionsschwingung*:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}} \quad \text{bzw.} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{J}}. \quad \text{Torsionsschwingung} \quad (6.8)$$

## Anwendungen

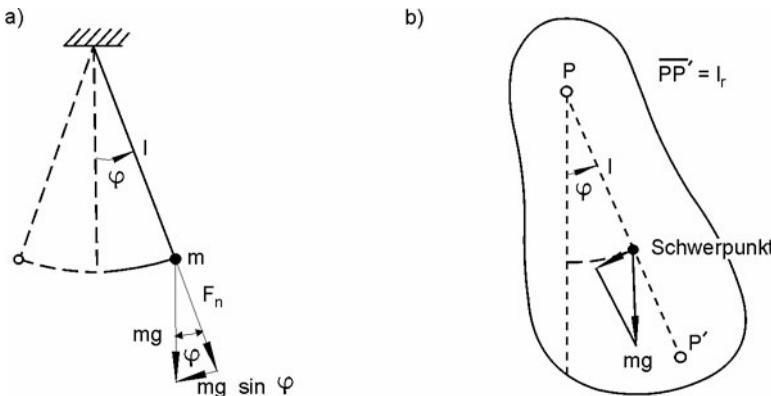
Trägheitsmomente  $J$  von Körpern können durch Messung der Frequenz von Drehschwingungen  $f$  ermittelt werden (6.8), indem sie an Drähte gehängt werden. Als Vergleichsmessung wird die Frequenz der Drehschwingung  $f'$  mit einem Probekörper bestimmt, z. B. einen Zylinder mit berechenbarem  $J'$ :

$$f' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{D/J'} \text{. Für den Körper mit unbekanntem } J \text{ erhält man die Frequenz} \\ f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{D/J}. \quad$$

Durch Division beider Gleichungen resultiert für das unbekannte Trägheitsmoment  $J$ :

$$J = J' \frac{f'^2}{f^2}. \quad (6.9)$$

Zur Messung von  $J$  kann der Körper auch auf einen Drehtisch gelegt werden. Genau wie oben wird eine Messung mit einem Probekörper mit  $J'$  durchgeführt. Allerdings müssen hierbei drei Frequenzen gemessen werden: mit leerem Drehtisch, mit bekanntem Probekörper und mit zu messenden Körper.



**Bild 6-4 a)** Das *mathematische Pendel* besteht aus einem schwingenden Massenpunkt.

**b)** Beim *physikalischen Pendel* greift die rücktreibenden Kraft im Schwerpunkt an. Die Schwingungsdauer wird durch das Massenträgheitsmoment  $J$  gegeben,  $l_r = \overline{PP'} = l_r$  stellt die reduzierte Pendellänge dar.

### Pendel

Ein *mathematisches Pendel* besteht aus einer punktförmigen Masse  $m$  und einem massenlosen Faden der Länge  $l$ . Mehr der Realität entspricht ein *physikalisches Pendel*; es handelt sich um einen starren pendelnden Körper mit dem Trägheitsmoment  $J$  um die Pendelachse. Die folgende Berechnung gilt für beide Pendel. Nach Bild 6-4a beträgt das rücktreibende Drehmoment  $M$  bei Auslenkung aus der Ruhelage um den Winkel  $\varphi$  (Abschnitt 2.5.2):

$$M = -mg l \sin \varphi .$$

Dieses Drehmoment  $M$  verursacht eine Winkelbeschleunigung  $\alpha = d^2\varphi / dt^2$ :

$$M = J\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2} .$$

Analog zum Abschnitt Drehschwingungen erhält man durch Gleichsetzen:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mg l}{J} \sin \varphi = 0$$

Dieser Ausdruck entspricht nicht der Schwingungsgleichung (6.4) und die Lösung kann nur als Reihenentwicklung dargestellt werden. Die Schwingungsdauer  $T$  hängt vom maximalen Auslenkwinkel  $\varphi$  ab:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 - (1/2)^2 \sin^2(\varphi/2) + (1/2)^2 (3/4)^2 \sin^2(\varphi/2) + \dots) .$$

Ein Pendel führt also streng genommen keine harmonische Schwingung aus. Diese Tatsache hat jedoch für die Praxis wenig Bedeutung, da bei geringen Auslenkungen eine relativ genaue Näherung benutzt werden kann:  $\varphi \approx \sin \varphi$  ( $\varphi$  im Bogenmaß). Damit resultiert:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mg l}{J} \varphi = 0 . \quad (6.10)$$

Diese Form entspricht der Schwingungsgleichung (6.4). Durch Vergleich erhält man:

$$\omega^2 = \frac{mgl}{J} \quad \text{oder} \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgl}{J}}.$$

Daraus folgt für die *Schwingungsdauer T eines physikalischen Pendels*:

$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}$ .	Physikalisches Pendel	(6.11a)
-----------------------------------	-----------------------	---------

In dieser Gleichung ist  $l$  der Abstand des Schwerpunktes vom Drehpunkt. Bei einem mathematischen Pendel ist dies gleich der Pendellänge  $l$ . Das Massenträgheitsmoment beträgt in diesem Fall  $J = ml^2$  und es folgt für die *Schwingungsdauer T eines mathematischen Pendels*:

$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ .	Mathematisches Pendel	(6.11b)
---------------------------------	-----------------------	---------

**Beispiel 6.1.1c** Am Haken eines Krans befindet sich ein schweres Objekt, das mit 10 Schwingungen in 82 s pendelt. Wie lang ist das Kranseil? Welche Masse hat das Objekt?

Aus (6.11b) folgt für die Länge  $l = T^2 g / (4\pi^2)$ . Mit  $T = 8,2$  s folgt:  $l = 16,7$  m. Die Schwingung ist unabhängig von der Masse.

Die Schwingungsdauer hängt nicht von der Masse des Pendels sondern nur von der Länge  $l$  ab. Aus (6.11a und b) geht hervor, dass ein mathematisches Pendel gleiche Schwingungsdauer hat wie ein physikalisches, wenn seine Länge gleich der reduzierten Pendellänge  $l_r$  ist:

$$l_r = \frac{J}{ml},$$

wobei  $l$  der Abstand des Schwerpunkts vom Drehpunkt und  $J$  das Trägheitsmoment ist. Nach Bild 6-4b existiert beim physikalischen Pendel ein zweiter Drehpunkt in der Entfernung  $l_r$  vom ersten, um den die Schwingungsdauer gleich ist. Der Beweis für diese Aussage benutzt den Satz von Steiner (2.49). Beim Reversionspendel werden die reduzierte Pendellänge  $l_r$  und damit die Erdbeschleunigung  $g$  gemessen.

### Schwingungsenergie

Zum tieferen Verständnis von Schwingungen soll die Theorie nicht vom speziellen Aufbau der schwingenden Systeme (Oszillatoren) ausgehen, sondern von allgemeinen Prinzipien wie dem Energiesatz. Bei mechanischen Schwingungen findet eine periodische Umwandlung von kinetischer ( $E_{kin}$ ) in potenzielle ( $E_{pot}$ ) Energie statt. Die Summe der Energien  $E$  bleibt konstant:

$$E_{kin} + E_{pot} = E = const.$$

Man erhält für die Auslenkung  $y$  bei einer Federschwingung:

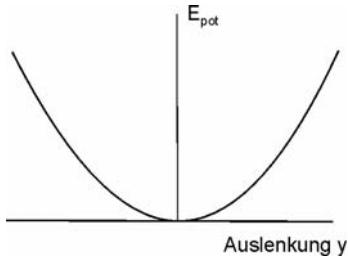
$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{y}^2}{2}, \quad E_{pot} = \frac{cy^2}{2} \quad (2.38) \quad \text{und} \quad \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{cy^2}{2} = const.$$

Durch Differenzieren erhält man  $m\ddot{y}\dot{y} + cy\dot{y} = 0$  oder in Übereinstimmung mit (6.4):

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}y = 0 \quad \text{oder} \quad m\ddot{y} + cy = 0. \quad (6.5)$$

Man kann also die Schwingungsgleichung auch aus dem Energiesatz ableiten. Die Punkte symbolisieren die erste und zweite Ableitung nach der Zeit  $t$ .

Die eindimensionale Bewegung eines elastisch gebundenen Teilchens, z. B. ein Atom in einem Kristallgitter oder eine Masse an einer Feder, lässt sich durch das Modell eines *harmonischen Oszillators* darstellen. Dazu ist in Bild 6-5 die potenzielle Energie  $E_{pot} = cy^2/2$  in Abhängigkeit von der Auslenkung  $y$  aufgetragen. Das Teilchen schwingt in einer so genannten Potenzialmulde.



**Bild 6-5**

Schwingungsenergie  $E_{pot}$  als Funktion der Auslenkung  $y$ .  
Harmonischer Oszillator

### 6.1.2 Freie gedämpfte Schwingung

In einer ungedämpften Schwingung wird periodisch potenzielle Energie  $E_{pot}$  in kinetische Energie  $E_{kin}$  umgewandelt, die Gesamtenergie  $E$  bleibt konstant. Dieser Idealfall kann in der Praxis nicht erreicht werden, da durch Reibung Energieverluste auftreten. Am Beispiel einer Federschwingung sollen die Reibungskräfte in die Schwingungsgleichung 6.4 oder 6.5 eingebracht werden. Mathematisch am einfachsten ist der Fall zu behandeln, bei dem die Reibungskräfte proportional zu Geschwindigkeit  $v = \dot{y}$  sind (Abschnitt 3.3.2).

Die Schwingungsgleichung 6.5 beschreibt das Kräftegleichgewicht: die Kraft  $m\ddot{y}$  ist so groß wie die Federkraft  $-cy$ , d. h.  $m\ddot{y} + cy = 0$ . Hinzu kommt nun die Reibungskraft  $-\beta v = -\beta \dot{y}$ . Hierbei wird angenommen, dass die Reibungskraft proportional aber entgegengesetzt zur Geschwindigkeit  $v = \dot{y}$  ist (Tabelle 2.4).  $\beta$  ist der Reibungskoeffizient. Damit lautet die Gleichung einer gedämpften Schwingung:

$$m\ddot{y} + \beta \dot{y} + cy = 0. \quad (6.12a)$$

Man führt die Dämpfungskonstante  $\delta$  ein

$$\delta = \frac{\beta}{2m} \quad (6.13)$$

und berücksichtigt die Kreisfrequenz  $\omega_0$  der ungedämpften Schwingung

$$\omega_0 = \sqrt{c/m}. \quad (6.6)$$

Damit wird die Schwingungsgleichung unabhängig vom konstruktiven Aufbau des Systems:

$$\ddot{y} + 2\delta \dot{y} + \omega_0^2 y = 0. \quad \text{Diff.-Gleichung gedämpfte Schwingung} \quad (6.12b)$$

### Schwingfall

Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung lautet:

$$y = \hat{y} e^{-\delta t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t + \varphi_0). \quad \text{Gedämpfte Schwingung} \quad (6.13)$$

Durch Bildung von  $\dot{y}$  und  $\ddot{y}$  und Einsetzen in (6.12b) kann die Lösung bestätigt werden. (Man findet das Ergebnis durch die Transformation  $u = y \exp -\delta t$ . Dadurch wird (6.12b) auf die bereits bekannte ungedämpfte Gleichung zurückgeführt.)

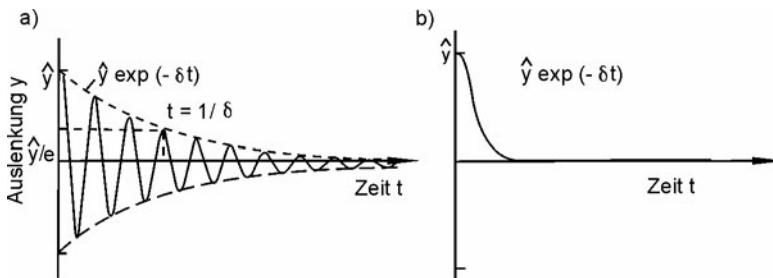
Durch die Dämpfung verringert sich die Kreisfrequenz der freien  $\omega$  Schwingung nach (6.13) zu:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad \text{Gedämpfte Schwingung} \quad (6.14)$$

wobei sich  $\omega_0$  auf den ungedämpften Fall bezieht (6.6).

Die Gleichung 6.13 der gedämpften Schwingung ist in Bild 6-6a graphisch dargestellt. Die Amplitude wird durch die Einhüllende  $\hat{y} \exp(-\delta t)$  begrenzt. Von einer Schwingung zur anderen nimmt die Amplitude um einen festen Prozentsatz ab. Das logarithmische Dekrement  $\Lambda$  beschreibt den Einfluss der Dämpfung zweier phasengleicher Zustände:

$$\Lambda = \ln \frac{y(t)}{y(t+T)} = \delta T. \quad \text{Logarithmisches Dekrement } \Lambda \quad (6.15)$$



**Bild 6-6** a) Verlauf einer gedämpften Schwingung im Schwingfall.  
b) Verhalten der Schwingung im aperiodischen Grenzfall

**Beispiel 6.1.2** Die Amplitude einer gedämpften Schwingung nimmt nach  $t = 30$  s von 15 cm auf 11,5 cm ab. Wie groß ist die Dämpfungskonstante  $\delta$ ?

Nach (6.15) gilt:  $\delta = \ln(y(t)/y(t+T))/T = \ln(15/11,5)/30 \text{ s}^{-1} = 8,9 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ .

### Aperiodische Dämpfung

Der periodische Verlauf der gedämpften Schwingung (*Schwingfall*) gilt nur für den Fall schwacher Dämpfung ( $\delta < \omega_0$ ). Bei starker Dämpfung, der *aperiodischen Dämpfung* oder dem *Kriechfall* ( $\delta > \omega_0$ ), wird die Frequenz in (6.14) komplex und verliert ihren Sinn. Schwingungen treten dann nicht mehr auf (Bild 6-6b). Der so genannte *aperiodische Grenzfall* entsteht für  $\delta = \omega_0$ . Man erhält  $\omega = 0$  und

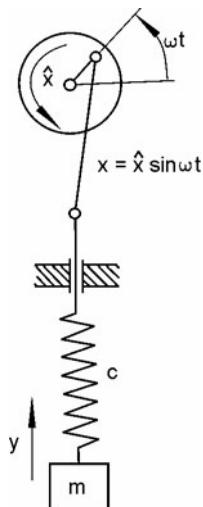
$$y(t) = e^{-\delta t}.$$

Das System geht nach seiner Auslenkung zur Zeit  $t = 0$  exponentiell in die Ruhelage zurück. In der Technik der Schwingungsdämpfung wird dieser Fall oft angestrebt.

### 6.1.3 Erzwungene Schwingungen

Im Fall *freier Schwingungen* wird ein System einmalig aus der Ruhelage ausgelenkt und dann sich selbst überlassen. Bei *erzwungenen Schwingungen* findet eine ständige Anregung durch äußere Kräfte  $F(t)$  statt. Damit wird die Summe aller Kräfte nicht Null, sondern man erhält statt (6.12a):

$$m\ddot{y} + \beta \dot{y} + cy = F(t) \quad \text{Diff.-Gleichung erzwungene Schwingung} \quad (6.16a)$$



Häufig ist nicht die Kraft  $F(t)$ , sondern der Ausschlag  $x(t)$  der Anregung bekannt. Man geht dann von (6.12b) aus. Interessant ist der Fall einer periodischen Anregung  $x(t) = \hat{x} \sin(\omega t)$  (Bild 6.7).  $\hat{x}$  ist die Amplitude und  $\omega$  die Kreisfrequenz der Anregung. Aus (6.12b) folgt:

$$\ddot{y} + 2\delta \dot{y} + \omega_0^2(y - \hat{x} \sin(\omega t)) = 0. \quad (6.16b)$$

**Bild 6-7**  
Anregung einer erzwungenen Schwingung  
mit konstanter Erregeramplitude  $\hat{x}$

### Amplituden- und Phasengang

Der Einschwingvorgang zu Beginn einer erzwungenen Schwingung ist kompliziert. Nach längerer Zeit jedoch schwingt das System mit der *Erregerkreisfrequenz*  $\omega = 2\pi f$ . Allerdings ist eine *Phasenverschiebung*  $\varphi$  zwischen der periodischen Anregung und der Schwingung vorhanden. Die Lösung der Schwingungsgleichung (6.16b) besitzt folgende Form:

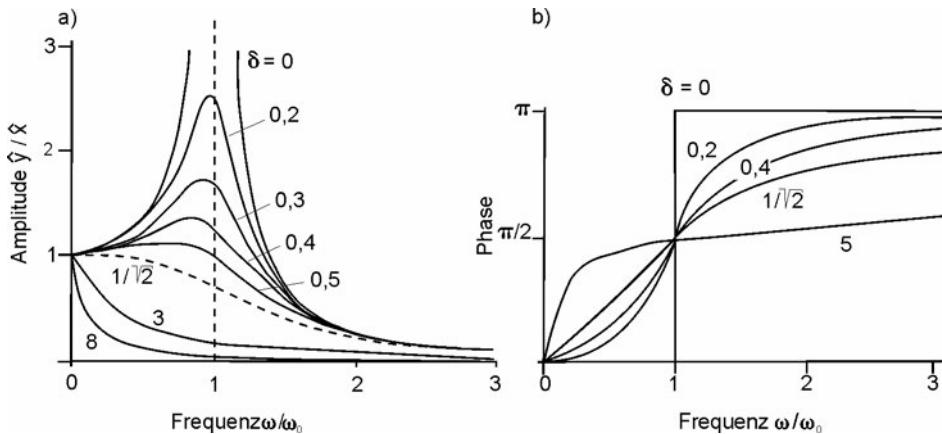
$$y = \hat{y} \sin(\omega t - \varphi).$$

Man setzt diesen Ansatz in (6.16b) ein und erhält nach einer elementaren aber längeren Rechnung für die *Phasenverschiebung*  $\varphi$ :

$$\tan \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad \text{Erzwungene Schwingung} \quad (6.17a)$$

Für die *Amplitude der Schwingung*  $\hat{y}$  und der *Amplitude der Anregung*  $\hat{x}$  ergibt sich:

$$\frac{\hat{y}}{\hat{x}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}. \quad \text{Erzwungene Schwingung} \quad (6.17b)$$



**Bild 6-8** Verhältnis der Amplitude der Schwingung zur Amplitude der Anregung  $\hat{y} / \hat{x}$  und Phase einer erzwungenen Schwingung bei unterschiedlicher Dämpfung in Abhängigkeit von der Erregerkreisfrequenz a) Amplitude b) Phase

Bild 6-8 zeigt eine graphische Darstellung des *Frequenzganges* der Phase  $\varphi$  und der *Amplitude*  $\hat{y}$  der erzwungenen Schwingung. Parameter ist die Dämpfungskonstante  $\delta$ . Für niedrige Kreisfrequenzen  $\omega \ll \omega_0$  folgt die erzwungene Schwingung mit geringer Verzögerung der Anregung. Das Amplitudenverhältnis ist nahezu  $\hat{x} / \hat{y} \approx 1$ . Mit wachsender Frequenz steigt die Amplitude  $\hat{y}$  und erreicht ein Maximum bei der *Resonanzkreisfrequenz*  $\omega_{res}$ , die in der Nähe der *Eigenkreisfrequenz*  $\omega_0$  liegt:

$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad \text{Resonanzfrequenz } \omega_{res} \quad (6.17c)$$

Bei *Resonanz* ist die Phasenverschiebung  $\varphi = \pi/2$ . Bei steigender Erregerfrequenz  $\omega$  fällt die Amplitude und nähert sich für  $\omega \gg \omega_0$  gegen null. In diesem Frequenzbereich reagiert das System kaum auf äußere Störungen:  $\hat{x} / \hat{y} \approx 0$ . Bild 6-8 zeigt den Einfluss der Dämpfung. Mit wachsendem  $\delta$  sinkt die Schwingungsamplitude  $\hat{y}$ , insbesondere im Bereich der Resonanz.

### Schwingungsisolierung

Liegt die Erregerkreisfrequenz weit über der Eigenfrequenz ( $\omega \gg \omega_0$ ), reagiert das System nur wenig auf äußere Störungen. In der Technik wird dieser Fall zur Isolierung von Schwingungen ausgenutzt. Schwingungsisolierte Systeme müssen mit niedriger Eigenfrequenz  $\omega_0$  und hoher Dämpfung  $\delta$  gelagert werden.

#### 6.1.4 Überlagerung von Schwingungen

Die harmonische Oszillation in Form einer Sinus- oder Kosinusfunktion ist die einfachste Schwingungsform. Sie ergibt sich, wenn in einem System die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist. In der Realität treten oft Abweichungen von der Sinusform auf, da das lineare Kraftgesetz nicht immer erfüllt ist. Dennoch ist das Verständnis der Sinusschwingung von fundamentaler Bedeutung, da sich beliebige Schwingungsvorgänge durch die Überlagerung harmonischer Schwingungen zusammensetzen lassen.

## Superposition

Harmonische Schwingungen werden überlagert, ohne dass sie sich gegenseitig stören. Im Folgenden wird dieses *Superpositonsprinzip* in verschiedenen Beispielen angewendet.

### Schwingungen gleicher Frequenz

Im Folgenden werden zwei Schwingungen  $y_1$  und  $y_2$  mit gleicher Raumrichtung und Kreisfrequenz  $\omega$  aber mit verschiedener Phase  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  überlagert (summiert):

$$y_1 = \hat{y}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{und} \quad y_2 = \hat{y}_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \quad (6.18a)$$

Durch Summation  $y_{res} = y_1 + y_2$  erhält man als Überlagerung eine phasenverschobene Schwingung unveränderter Kreisfrequenz  $\omega$ :

$$y_{res} = \hat{y}_{res} \sin(\omega t + \varphi_{res}). \quad (6.18b)$$

Die resultierende Amplitude  $\hat{y}_{res}$  und Phase  $\varphi_{res}$  erhält man mit Hilfe der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen:

$$\hat{y}_{res} = \sqrt{\hat{y}_1^2 + 2\hat{y}_1\hat{y}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \hat{y}_2^2} \quad (6.18c)$$

$$\tan \varphi_{res} = (\hat{y}_1 \sin \varphi_1 + \hat{y}_2 \sin \varphi_2) / (\hat{y}_1 \cos \varphi_1 + \hat{y}_2 \cos \varphi_2).$$

Es ergeben sich einige interessante Sonderfälle bei der Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Frequenz:

*Auslöschung:* Sind die Amplituden gleich ( $\hat{y}_1 = \hat{y}_2$ ), und beträgt die Phasenverschiebung beider Schwingungen  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi, 3\pi, 5\pi$  usw., löschen sich die Schwingungen aus:  $y_{res} = 0$ .

*Maximale Überlagerung:* Befinden sich zwei Schwingungen in gleicher Phase  $\varphi_1 = \varphi_2$ , entsteht bei der Überlagerung die maximale Amplitude  $\hat{y}_{res} = \hat{y}_1 + \hat{y}_2$ .

### Schwingungen verschiedener Frequenz

Besitzen zwei sich überlagernde Schwingungen verschiedene Kreisfrequenz  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , kann vereinfacht die Phasenverschiebung zu null angenommen werden:

$$y_1 = \hat{y}_1 \sin(\omega_1 t) \quad \text{und} \quad y_2 = \hat{y}_2 \sin(\omega_2 t). \quad (6.19)$$

Die resultierende Schwingung  $y_{res} = y_1 + y_2$  hat sehr unterschiedliche Struktur, so dass im Folgenden nur zwei Sonderfälle dargelegt werden:

*Schwebungen:* Bei kleinen Frequenzunterschieden erhält man einen Effekt, den man *Schwebung* nennt. Die resultierende Schwingung schwilkt periodisch auf und ab. Dies wird besonders deutlich, wenn die Amplituden der sich überlagernden Schwingungen gleich sind ( $\hat{y}_1 = \hat{y}_2 = \hat{y}$ ). Man erhält aus (6.19) mit Hilfe von Additionstheoremen:

$$\hat{y}_{res} = 2\hat{y} \cos(\omega_s t) \cdot \sin(\omega t)$$

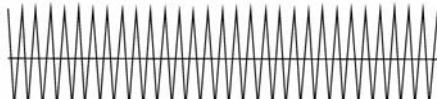
mit Schwebungen

**(6.20a)**

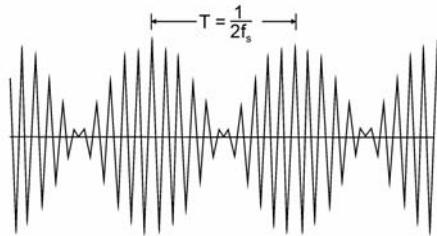
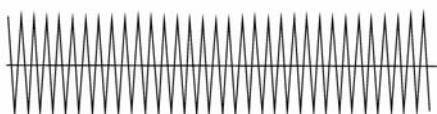
$$\omega = 2\pi f = (\omega_1 + \omega_2)/2 \quad \text{und} \quad \omega_s = 2\pi f_S = (\omega_1 - \omega_2)/2.$$

a) Schwebungen

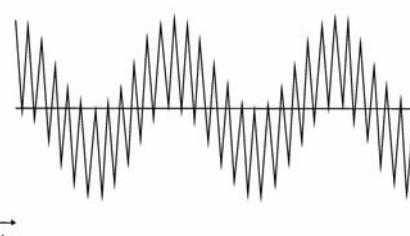
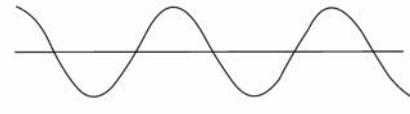
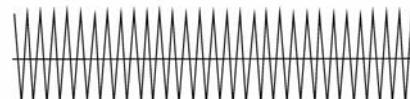
$$y_1 = \hat{y}_1 \sin \omega_1 t$$



$$y_2 = \hat{y}_2 \sin \omega_2 t$$



b) Große Frequenzunterschiede

**Bild 6-9** Überlagerung von Schwingungen:

- a) Erzeugung von Schwebungen durch zwei Schwingungen mit nahezu gleicher Frequenz,
- b) Überlagerung von Schwingungen mit unterschiedlicher Frequenz

Die Amplitude variiert periodisch mit der *Schwingungsfrequenz*  $f_S$ . Die Schwingungsfrequenz  $f$  entspricht dem Mittelwert der beiden ursprünglichen Frequenzen. Die Entstehung von Schwebung wird im Bild 6-9 veranschaulicht. Sind die Amplituden der einzelnen Schwingungen nicht gleich, so geht die Intensität der Schwebungen nicht auf null. Schwebungen haben Bedeutung in der Akustik, Laser- und Hochfrequenztechnik. Erzeugt man zwei Töne benachbarter Frequenz, so hört man periodische Schwankungen der Lautstärke mit der Periodendauer

$$T = 1/(2f_S).$$

Abstand der Schwebungen

(6.20b)

In der Elektronik und Optik benutzt man den Effekt, um kleine Frequenzunterschiede hochfrequenter Wellen zu messen.

**Beispiel 6.1.4a** Einem Ton mit  $f = 50$  Hz wird ein weiterer Ton überlagert. Es entstehen Schwebungen, wobei die Lautstärke periodisch nach  $T = 2$  s anschwillt. Welche Frequenz hat dieser Ton?

Nach (6.20b) gilt:  $f_S = 1/(2T) = 0,25 \text{ s}^{-1}$ . Nach (6.20a) gilt:  $f_S = (f_1 - f_2)/2$ . Mit  $f_1 = 50 \text{ s}^{-1}$  folgt:  $f_2 = f_1 - 2f_S = 49,5 \text{ Hz}$ . Es gibt eine zweite Lösung: mit  $f_2 = 50 \text{ s}^{-1}$  folgt:  $f_1 = f_2 + 2f_S = 50,5 \text{ s}^{-1}$ . Um zu wissen, welche Lösung richtig ist, muss die Mittenfrequenz  $(f_1 + f_2)/2$  bekannt sein.

**Große Frequenzunterschiede:** Die Kurvenform bei der Überlagerung von Schwingungen ändert sich, wenn die Frequenzunterschiede anwachsen. In Bild 6-9b ist ein Beispiel dargestellt. Die resultierende Schwingung wird konstruiert, indem zu jedem Zeitpunkt die einzelnen Amplituden abgelesen und addiert werden.

### Schwingungen in verschiedenen Richtungen

Im Vorangehenden wurden Schwingungen in einer Raumrichtung behandelt. Kann ein Oszillator in verschiedene Richtungen schwingen, beobachtet man typische Bahnkurven. Stehen bei zueinander senkrechten Schwingungen die Frequenzverhältnisse  $f_x / f_y$  im Verhältnis ganzer Zahlen, ergeben sich *Lissajous-Figuren* (Bild 6-10).

Im Folgenden wird die Überlagerung zweier senkrecht zueinander stehender Schwingungen mit gleicher Kreisfrequenz  $\omega$  und Amplitude  $k$  berechnet:

$$x = k \sin(\omega t) \quad \text{und} \quad y = k \sin(\omega t + \varphi). \quad (6.21)$$

Eliminiert man die Zeit  $t$  aus der Gleichung, erhält man eine Ellipse, deren Lage von der Phase  $\varphi$  abhängt. Für  $\varphi = \pi/2$  resultiert als Sonderfall:

$$x = k \sin(\omega t) \quad \text{und} \quad y = k \cos(\omega t). \quad (6.22a)$$

Durch Quadrieren und Summieren erhält man mittels der Rechenregel  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ :

$$x^2 + y^2 = k^2. \quad (6.22b)$$

Die Bahnkurve durchläuft einen Kreis (Bild 6-10). Ist die Phasenverschiebung  $\varphi = 0$ , ergibt sich mit

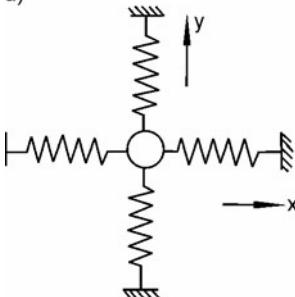
$$x = y \quad (6.22c)$$

eine Gerade unter  $45^\circ$  als Bahnkurve. Mit  $\varphi = \pi$  erhält man

$$x = -y \quad (6.22d)$$

Dies stellt eine Gerade unter  $-45^\circ$  dar. Weitere Lissajous-Figuren für andere Phasenwinkel und Frequenzverhältnisse stellt Bild 6-10b dar.

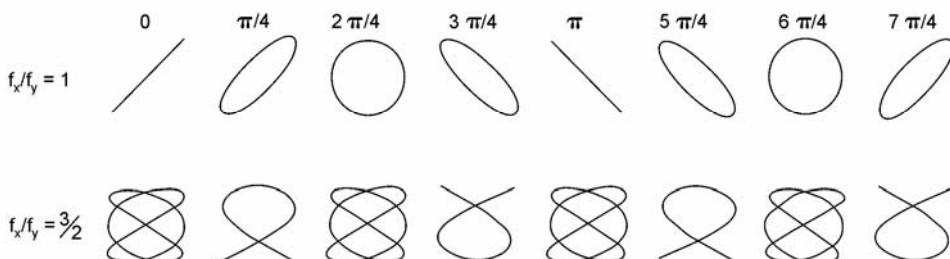
a)



**Bild 6-10 a)**

Überlagerung von senkrecht zueinander stehenden Schwingungen. Modell für ein schwingendes System in  $x$ - und  $y$ -Richtung,

b)



**Bild 6-10 b)** Darstellung von Lissajous'schen Figuren für die Frequenzverhältnisse  $f_x / f_y = 1$  und  $3/2$

**Beispiel 6.1.4b** Zwei senkrecht zueinander stehende Schwingungen überlagern mit einem Phasenunterschied von a)  $\pi/2$  und b)  $\pi$ . Wie sieht die Resultierende aus?

- Es entsteht nach Bild 6-10 eine zirkulare Schwingung. Anwendung beim Licht: Aus der Überlagerung von zwei linear polarisierten Strahlen entsteht zirkular polarisiertes Licht.
- Es entsteht nach Bild 6-10 eine um  $90^\circ$  gedrehte lineare Schwingung.

### Amplitudenmodulation

In der Nachrichtentechnik wird durch die Modulation einer hochfrequenten elektromagnetischen Schwingung Information übertragen. Man unterscheidet *Amplituden-, Frequenz- oder Phasenmodulation*. Als Beispiel soll die *Amplitudenmodulation* erläutert werden.

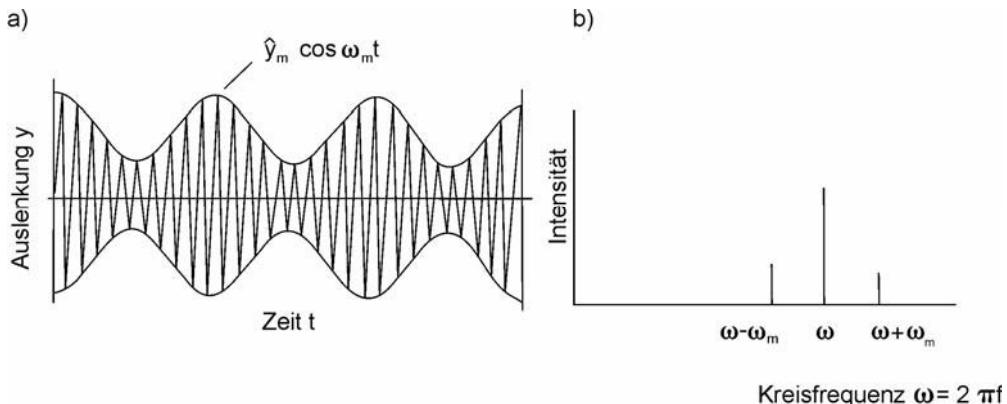
Bei ihr wird die Amplitude  $\hat{y}$  der Trägerschwingung  $y = \hat{y}_0 \sin(\omega t)$  mit der Modulationsfrequenz  $\omega_m = 2\pi f_m$  variiert:

$$\hat{y} = \hat{y}_0 + \hat{y}_m \cos(\omega_m t) \quad \text{oder} \quad y = (\hat{y}_0 + \hat{y}_m \cos(\omega_m t)) \sin(\omega t). \quad (6.23a)$$

Das Verhältnis beider Amplituden  $\hat{y}_m / \hat{y}_0$  nennt man *Modulationsgrad*. Mittels trigonometrischer Formeln erhält man:

$$y = \hat{y}_0 \sin(\omega t) + \frac{\hat{y}_m}{2} \sin((\omega - \omega_m)t) + \frac{\hat{y}_m}{2} \sin((\omega + \omega_m)t). \quad (6.23b)$$

Eine amplitudenmodulierte Schwingung besteht also aus drei Anteilen: der Trägerfrequenz  $\omega = 2\pi f$  und zwei Seitenbändern mit den Frequenzen  $\omega - \omega_m = 2\pi(f - f_m)$  und  $\omega + \omega_m = 2\pi(f + f_m)$  (Bild 6-11). Ähnliches kann für die Frequenzmodulation abgeleitet werden.



**Bild 6-11** a) Darstellung einer amplitudenmodulierten Schwingung.  
b) Frequenzspektrum der Schwingung

### 6.1.5 Fourier-Analyse

#### Fourier-Synthese

Durch die Überlagerung harmonischer Schwingungen entstehen komplizierte periodische Kurvenformen. In einer *Fourier-Reihe* wird eine Grundschwingung  $y_1 = \hat{y}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$  mit ihren *Oberschwingungen*  $y_n = \hat{y}_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n)$  überlagert, d. h. addiert. Die Oberschwin-

gungen haben ein ganzzahliges Vielfaches  $n$  der Grundfrequenz. Man kann beweisen, dass durch die Fourier-Reihe

$$y = \hat{y}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{y}_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad \text{Fourier-Reihe} \quad (6.24a)$$

jede beliebige Schwingungsform mit der Periodendauer  $T = 1/f_1 = 2\pi/\omega_1$  aus Sinusschwingungen entstehen kann. Die Zusammensetzung von periodischen Funktionen durch Sinusschwingungen nennt man *Fourier-Synthese*.

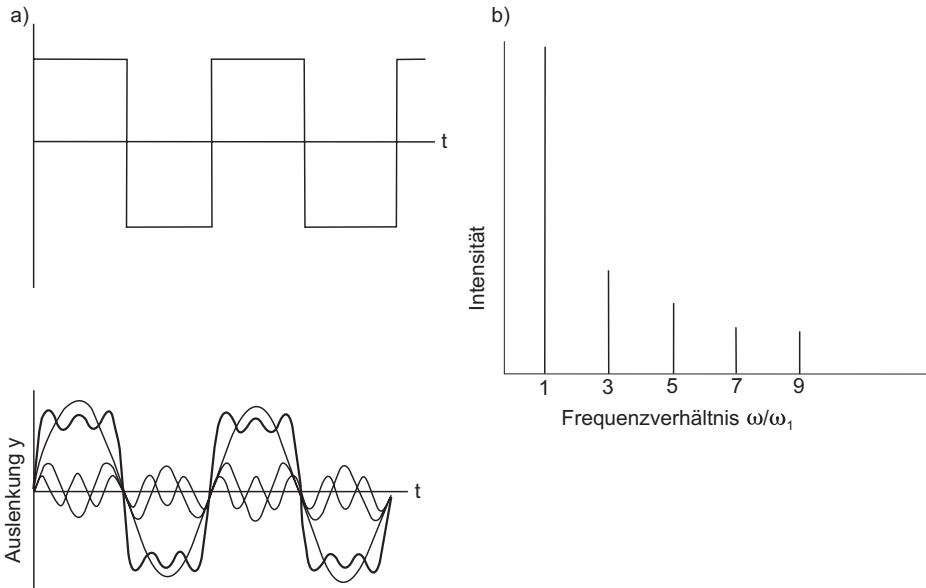
### Fourier-Analyse

Wenn es möglich ist, beliebige Schwingungen durch Sinusfunktionen zu beschreiben, muss auch die Umkehrung machbar sein. Die Zerlegung eines periodischen Vorganges in Sinusfunktionen nennt man *Fourier-Analyse*. Es ist üblich, (6.24a) mit Hilfe eines Additionstheorems der Trigonometrie umzuformen. Man erhält:

$$y = \hat{y}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_1 t) \quad \text{Fourier-Analyse} \quad (6.24b)$$

mit

$$\hat{y}_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{und} \quad \tan \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}.$$



**Bild 6-12** a) Fourier-Zerlegung einer rechteckförmigen Schwingung. Es sind die drei Sinusschwingungen mit den niedrigsten Frequenzen gezeichnet. b) Frequenzspektrum der Schwingung  $\omega/\omega_1$

Die Größen  $a_n$  und  $b_n$  nennt man *Fourier-Koeffizienten*. Sie können wie folgt berechnet werden:

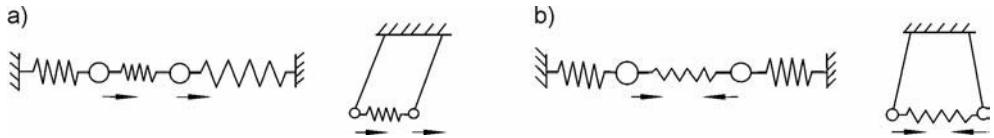
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T y \cos(n\omega_1 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T y \sin(n\omega_1 t) dt \quad \text{und} \quad \hat{y}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y dt. \quad (6.24c)$$

Für gerade Funktionen ( $y(t) = y(-t)$ ) gilt  $b_n = 0$ , für ungerade ( $y(t) = -y(-t)$ )  $a_n = 0$ .

Die Fourier-Analyse kann auch als *Spektral-Analyse* aufgefasst werden. Bild 6-12 zeigt die Fourier-Koeffizienten für eine Rechteckschwingung. Man nennt diese Darstellung auch das *Frequenzspektrum*.

### 6.1.6 Gekoppelte Schwingungen

Schwingfähige Systeme, die sich gegenseitig beeinflussen, führen gekoppelte Schwingungen aus. Als einfaches Modell zur Beschreibung dienen zwei gleiche Massen, die an gleichartigen Federn (Federkonstante  $c$ ) befestigt sind. (Bild 6-13). Eine weitere Kopplungsfeder ( $c_{12}$ ) verbindet die Massen, so dass ein Austausch von Energie möglich ist. Ein anderes Beispiel besteht aus zwei Pendeln, die durch eine Feder gekoppelt sind.



**Bild 6-13** Fundamentalschwingung gekoppelter Systeme (Federschwingung und Pendel):  
a) Gleichphasige Schwingung,  
b) Gegenphasige Schwingung

### Fundamentalschwingungen

In dem gekoppelten System gibt es zwei *Fundamentalschwingungen*, bei denen keine Übertragung von Energie stattfindet. In der gleichphasigen Schwingung nach Bild 6-13a bewegen sich beide Massen mit gleicher Frequenz  $f_1$  synchron. Die Kopplungsfeder bleibt entspannt und damit ist sie unwirksam. Die Massen  $m$  schwingen ungestört mit der Frequenz  $f_0$ , die durch die Federkonstante  $c$  gegeben ist:

$$f_1 = f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{1. Fundamentalschwingung} \quad (6.25a)$$

In der gegenphasigen Schwingung (Bild 6-13b) bleibt die Mitte der Kopplungsfeder wegen der Symmetrie des Aufbaus in Ruhe. Auf jede Masse wirkt das halbe Kopplungsglied mit der Federkonstante  $c_{12}$ . Hinzu kommt die eigene Feder mit  $c$ . Damit erhält man die Schwingungsdauer für die zweite Fundamentalschwingung:

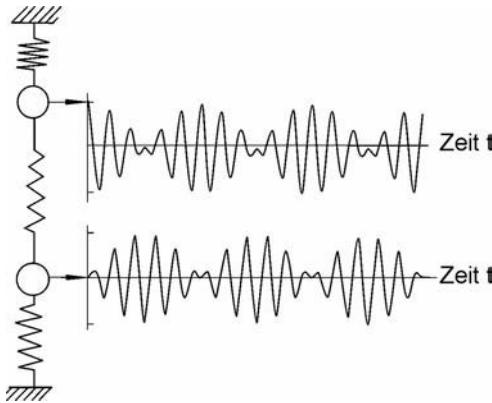
$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c + c_{12}}{m}} \quad \text{2. Fundamentalschwingung} \quad (6.25b)$$

Ein System zweier gekoppelter Massen ist also durch zwei Fundamentalschwingungen charakterisiert. Treten  $n$  Schwinger miteinander in Wechselwirkung, entstehen ebenso viele *Fundamental- oder Eigenschwingungen*. Derartige Überlegungen sind in der Molekül- oder Festkörperphysik von Bedeutung.

## Energieübertragung

Im Allgemeinen schwingt ein gekoppeltes System nicht in einer Fundamentalschwingung, insbesondere wenn man als Anfangsbedingung nur eine Masse auslenkt und dann loslässt. Es treten Überlagerungen der Fundamentalschwingungen auf, bei schwacher Kopplung ( $c_{12} \ll c$ ) entsteht eine Schwebung mit der Frequenz  $f_s$ :

$$f_s = f_2 - f_1 \quad (6.26)$$



**Bild 6-14**

Gekoppelte Schwingung. Es findet ein periodischer Austausch von Schwingungsenergie statt

Nach Bild 6-14 findet ein periodischer Austausch von Energie zwischen beiden schwingenden Massen statt.

## 6.2 Wellen

In Festkörpern, Flüssigkeiten oder Gasen können sich Schwingungen ausbreiten. Es entstehen Wellen. Neben mechanischen Wellen gibt es auch elektromagnetische Wellen, die in Kapitel 8 behandelt werden.

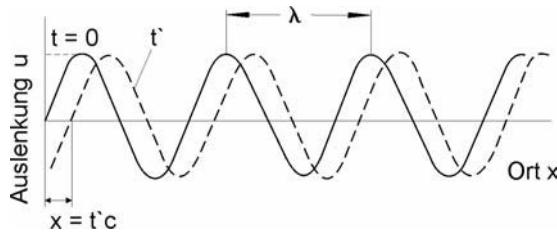
Eine Schwingung ist ein zeitlich periodischer Vorgang. Dagegen wird eine Welle durch eine periodische Funktion von Zeit und Ort beschrieben.

### Wellenarten

Nach Art der Ausbreitung unterscheidet man *ebene*, *Kreis-* oder *Kugelwellen*. Unabhängig davon gibt es zwei Wellentypen. Bei *Transversal-* oder *Querwellen* liegt die Schwingungsrichtung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Beispiele dafür sind mechanische Wellen an Oberflächen und gespannten Saiten oder elektromagnetische Wellen. Akustische Erscheinungen in Gasen gehören zu den *Longitudinal-* oder *Längswellen*, bei denen die Richtungen der Schwingung und Ausbreitung parallel liegen.

### 6.2.1 Wellengleichung

Bei der Ausbreitung von Wellen in Materie übertragen schwingende Moleküle Energie an benachbarte Teilchen. Dadurch beginnen diese mit einer zeitlichen Verzögerung auch zu schwingen. In Bild 6-15 ist die Auslenkung oder Elongation einer Welle als Funktion der Ortskoordinate  $x$  dargestellt – nicht als Funktion der Zeit  $t$  wie bei Schwingungen.



**Bild 6-15**  
Darstellung einer Welle

### Ausbreitungsgeschwindigkeit

Der Abstand zweier gleicher Schwingungszustände in einer Welle mit der Frequenz  $f$  ist die *Wellenlänge*  $\lambda$ . Innerhalb der Schwingungsdauer  $T = 1/f$  pflanzt sich die Welle um eine Wellenlänge  $\lambda$  fort. Sie bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit  $c$ , die durch den zurückgelegten Weg dividiert durch die verstrichene Zeit gegeben ist. Wählt man als Weg eine Wellenlänge  $\lambda$ , so ist die entsprechende Zeit die Periodendauer  $T$ . Damit resultiert für die *Ausbreitungsgeschwindigkeit*  $c$ :

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \quad \text{Ausbreitungsgeschwindigkeit } c \quad (6.27)$$

### Gleichung einer Welle

Die mathematische Funktion einer Welle wird aus der Gleichung einer Schwingung hergeleitet. Ein Teilchen bei  $x = 0$  schwingt mit der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi/f$  entsprechend (6.2a). Im Folgenden wird die schwingende Größe mit  $u$  (z. B. Auslenkung) bezeichnet:

$$u(t) = \hat{u} \sin(2\pi f t) = \hat{u} \sin(\omega t). \quad (6.28)$$

Die Schwingung bei  $x = 0$  wird durch  $u(t,0)$  und die Amplitude durch  $\hat{u}$  dargestellt. Benachbarte Teilchen in der Entfernung  $x$  beginnen mit der Verzögerungszeit  $t'$  auch zu schwingen. Bild 6-15 zeigt eine Momentaufnahme zur Zeit  $t = 0$  und etwas später zur Zeit  $t'$ . Diese Verzögerungszeit  $t'$  kann aus der Entfernung  $x$  und der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  ermittelt werden:

$$t' = \frac{x}{c}.$$

Der Zustand an der Stelle  $x$  zur Zeit  $t$  ist der gleiche wie an der Stelle  $x = 0$  zur früheren Zeit  $t - t' = t - x/c$ :

$$u(t,x) = u(t-t',0) = \hat{u} \sin\left(2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$

oder bei Benutzung von (6.27)

$$u(t,x) = \hat{u} \sin\left(2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) = \hat{u} \sin(\omega t - kx). \quad \text{Welle} \quad (6.29a)$$

Diese Gleichung beschreibt den Zustand einer *harmonischen Welle* in  $x$ -Richtung als Funktion vom Ort  $x$  und der Zeit  $t$ . Das Argument in der Sinusfunktion  $\omega t - kx = 2\pi f(t - x/c)$  bezeichnet man als *Phase*. Zustände mit konstanter Phase ( $t - x/c = \text{const.}$ ) bewegen sich mit der

*Wellengeschwindigkeit*  $c$  durch den Raum;  $c$  wird daher auch *Phasengeschwindigkeit* genannt. Die Größe  $k$  in (6.29a) ist die *Wellenzahl*:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}. \quad \text{Wellenzahl } k \quad (6.30a)$$

### Wellengleichung

(6.29a) beschreibt eine ebene Welle, die nur von einer Raumrichtung  $x$  abhängt. Durch Differenzieren dieser Gleichung kann man zeigen, dass *ebene Wellen* folgender Differentialgleichung genügen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad \text{Wellengleichung} \quad (6.31)$$

Breiten sich die Wellen in beliebige Richtung aus, kann diese Gleichung verallgemeinert werden, indem  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  durch  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  ersetzt wird.

### Dreidimensionale Welle

Die Darstellung einer harmonischen Welle nach (6.29a) kann auf den dreidimensionalen Fall verallgemeinert werden. Dazu wird die Wellenzahl  $k$  durch den Wellenvektor  $\vec{k}$  in Richtung der Ausbreitung ersetzt:

$$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) \quad \text{mit} \quad |\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad \text{Wellenvektor } \vec{k} \quad (6.30b)$$

Damit ist der Ausdruck für eine *dreidimensionale Welle* ähnlich wie (6.29a):

$$u(t, x) = \hat{u} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad \text{mit} \quad \vec{r} = (x, y, z). \quad (6.29b)$$

Häufig ist die *komplexe Schreibung* vorteilhaft. Mit  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  folgt:

$$u = \operatorname{Im} \hat{u} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{oder} \quad u = \operatorname{Im} \mathbf{u} \quad \text{mit} \quad \mathbf{u} = \hat{u} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (6.29c)$$

Oft wird bei der komplexen Schreibung das Imaginär-Zeichen ( $\operatorname{Im}$ ) weggelassen. Man merkt es sich einfach nur. Stellt man die Welle als Kosinusfunktion dar, so wird in der Gleichung  $\operatorname{Im}$  durch  $\operatorname{Re}$  ersetzt.

**Beispiel 6.2.1a** Berechnen Sie die Wellenlänge eines UKW Senders mit  $f = 100$  MHz.

Radiowellen breiten sich mit der Lichtgeschwindigkeit  $c_0 = 3 \cdot 10^8$  m/s aus. Es gilt:

$$\lambda = c_0 / f = 3 \cdot 10^8 / 10^8 \text{ m} = 3 \text{ m}.$$

**Beispiel 6.2.1b** Der Abstand zweier Wellenberge auf See beträgt 11,3 m. In 2 Minuten bewegt sich ein Holzstück 85 mal auf und ab. Wie groß ist die Geschwindigkeit der Wellen?

Die Frequenz beträgt:  $f = 85 / 120 \text{ s}^{-1}$ . Die Geschwindigkeit  $c$  ergibt sich mit  $\lambda = 11,3 \text{ m}$  aus:  $c = \lambda f = 8 \text{ m/s}$ .

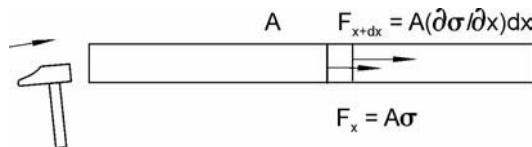
### 6.2.2 Ausbreitungsgeschwindigkeit

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  von Wellen in unterschiedlichen Medien kann durch die Aufstellung der Differentialgleichung 6.31 ermittelt werden. Dies wird für Längswellen (Longitudinalwellen) in Festkörpern beispielhaft aufgezeigt.

### Längswellen in Stäben

Bild 6-16 zeigt einen Stab, der durch Anschlagen an einem Ende elastisch deformiert wurde. Die Störung breitet sich als Längswelle im Medium fort. Es handelt sich um eine akustische Welle oder Schall. Die Kraft  $F_x$  an der Stelle  $x$  beträgt  $A\sigma$ , wobei  $A$  die Querschnittsfläche und  $\sigma$  die mechanische Spannung (= Kraft/Fläche) bedeuten. An der Stelle  $x + dx$  ändert sich die Kraft. Insgesamt greift damit an dem Massenelement  $dm = \rho dV = \rho A dx$  die Kraft  $F = F_{x+dx} - F_x$  an. Nach dem Axiom von Newton gilt  $F = ma$ , in diesem Fall  $F = \rho A dx \partial^2 u / \partial t^2$ . Die Auslenkung aus der Ruhelage wird durch  $u$  bezeichnet und  $\partial^2 u / \partial t^2$  stellt die Beschleunigung  $a$  dar. Damit erhält man die Differentialgleichung:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$



**Bild 6-16**

Ausbreitung einer longitudinalen Welle in einem Stab (Schall)

Nach dem Hooke'schen Gesetz (3.3) bestimmt der Elastizitätsmodul  $E$  den Zusammenhang zwischen der Spannung  $\sigma$  und der relativen Längenänderung  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Damit erhält man die Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Ein Vergleich mit (9.31) ergibt für die Wellen- oder Schallgeschwindigkeit  $c$ :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad \text{Schallgeschwindigkeit } c \quad (6.32)$$

Die Herleitung der Wellengleichung zeigt, dass sich in einem Stab Längswellen mit der Schallgeschwindigkeit  $c$  nach (6.32) ausbreiten. In Festkörpern können sich noch andere Wellentypen bilden, die in den Tabellen 6.1 und 7.1 aufgeführt sind.

**Tabelle 6.1** Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  von mechanischen Wellen (Schallwellen) in verschiedenen Medien. ( $E$  = Elastizitätsmodul,  $\rho$  = Dichte,  $K$  = Kompressionsmodul,  $G$  = Schubmodul,  $\kappa$  = Adiabatenexponent,  $p$  = Druck)

Medium	Schwingungstyp	Schallgeschwindigkeit $c$
Festkörper, Stäbe	longitudinal	$c = \sqrt{E / \rho}$
Festkörper, ausgedehnter	longitudinal	$c = \sqrt{(K + 4G/3) / \rho}$
Festkörper	transversal, Torsion	$c = \sqrt{G / \rho}$
Gase	longitudinal	$c = \sqrt{\kappa / \rho}$
Flüssigkeiten	longitudinal	$c = \sqrt{K / \rho}$

**Beispiel 6.2.2** Berechnen die Schallgeschwindigkeit  $c$  in einem Eisenträger ( $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 200 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$  (Tabelle 3.1)).

Man erhält nach (6.32):  $c = \sqrt{E/\rho} \approx 5060 \text{ m/s.}$

### 6.2.3 Überlagerung von Wellen

Harmonische Wellen überlagern sich im Allgemeinen additiv, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen. Diese Superposition führt zu speziellen Erscheinungsformen, die durch den Begriff *Interferenz* beschrieben werden (Abschnitt 9.2.3).

#### Wellen gleicher Frequenz

Überlagert man zwei Wellen ( $u_1, u_2$ ) gleicher Frequenz  $f = \omega/2\pi$  und Amplitude  $\hat{u}$ , die sich in  $x$ -Richtung bewegen, so ist die Summe  $u = u_1 + u_2$  zu bilden:

$$\begin{aligned} u_1 &= \hat{u} \sin(\omega t - kx) \quad \text{und} \quad u_2 = \hat{u} \sin(\omega t - kx + \varphi) \\ u &= u_1 + u_2 = 2\hat{u} \cos(\varphi/2) \sin(\omega t - kx + \varphi/2). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Dabei ist  $\varphi$  die Phasendifferenz beider Wellen. Bei der Summenbildung wurde ein Additionstheorem der Trigonometrie verwendet.

Man erhält als Überlagerung (6.33) wieder eine harmonische Welle mit gleicher Kreisfrequenz  $\omega$ , deren Amplitude und Phase von  $\varphi$  abhängen. Es werden folgende Sonderfälle unterschieden:

*Konstruktive Interferenz* ( $\varphi = 0$ ): Sind die beiden sich überlagernden Wellen phasengleich, so verdoppelt sich die resultierende Amplitude.

*Destruktive Interferenz* ( $\varphi = \pi$ ): Die beiden Wellen schwingen gegenphasig und löschen sich überall aus.

Weitere Informationen über *Interferenzen* in der Optik sind in den Abschnitten 9.2.3 (Interferenz) und 9.2.5 (Holographie) dargestellt.

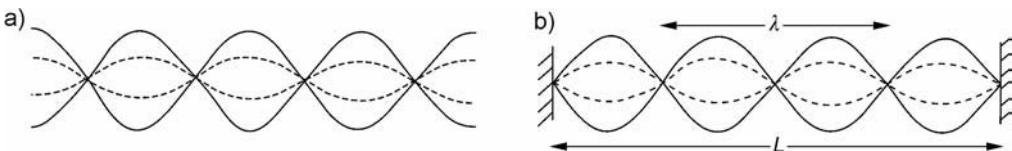


Bild 6-17 Stehende Wellen: a) Reflexion am losen Ende b) Am festen Ende

**Beispiel 6.2.3** Geben Sie die Wellenlängen an, mit welchen eine eingespannte Saite von 90 cm Länge schwingen kann? Nach Bild 6.17b gilt:  $L = n\lambda/2$  mit  $n = 1, 2, 3, \text{ usw.}$  Man erhält damit:  $\lambda = 2L/n = 180 \text{ cm}, 90 \text{ cm}, 60 \text{ cm}, \text{ usw.}$

#### Stehende Wellen

Laufen zwei Wellen gleicher Frequenz und Amplitude gegeneinander, bilden sich *stehende Wellen*. Analog zu (6.33) gilt:

$$\begin{aligned} u_1 &= \hat{u} \sin(\omega t - kx) \quad \text{und} \quad u_2 = \hat{u} \sin(\omega t + kx + \varphi) \\ u &= u_1 + u_2 = 2\hat{u} \cos(kx + \varphi/2) \sin(\omega t + \varphi/2). \end{aligned} \quad (6.34a)$$

Für den Sonderfall  $\varphi = 0$  erhält man:

$$u = 2\hat{u} \cos(kx) \sin(\omega t).$$

Stehende Welle

(6.34b)

Es entstehen ortsfeste Wellenbäuche und -knoten in Form einer stehenden Welle, die in Bild 6-17 gezeigt ist.

Es gilt (Bild 6-17):

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots . \quad (6.34c)$$

Stehende Wellen bilden sich bei Überlagerung einer einfallenden und einer reflektierten Welle, z. B. bei einer schwingenden Saite oder einem Stab. Ist das Ende lose, läuft die reflektierende Welle mit gleicher Phase ( $\varphi = 0$ ) zurück. Es entsteht eine Welle nach Bild 6-17a. Ist das Ende fest eingespant, so erfährt die rücklaufende Welle einen Phasensprung ( $\varphi = \pi$ ). Es bilden sich Wellen nach Bild 6-17b. Ein Beispiel dafür ist die Saite eines Musikinstrumentes oder die stehende Lichtwelle zwischen den Spiegeln eines Lasers.

### Eigenschwingungen

Bei Anregung schwingfähiger Gebilde, wie Balken, Platten, Luftsäulen, bilden sich stehende Wellen, die man *Eigenschwingungen* nennt. Auch atomare und elektromagnetische Systeme können Eigenschwingungen ausführen. Neben den bereits erwähnten Fällen nach Bild 6-17 werden weitere Beispiele für Eigenschwingungen aufgezeigt.

*Luftsäulen*: Bei Blasinstrumenten, aber auch bei der Geräuschentwicklung durch Maschinen, spielen Schwingungen von Luftsäulen eine Rolle. Als Beispiel werden Röhren betrachtet, in denen sich Schallwellen, d. h. longitudinale Wellen, ausbilden. Bild 6-18 zeigt die Eigenschwingungen in geschlossenen, halboffenen oder offenen Röhren. Es handelt sich jeweils um die Grundwelle. Zusätzlich treten Oberwellen auf.

*Platten*: Die bisherigen Beispiele für Eigenschwingungen haben eine eindimensionale Geometrie. An schwingenden Platten oder Membranen treten stehende Wellen in zwei Richtungen auf. Man kann sie sichtbar machen, indem feiner Sand auf die waagerecht angeordneten Platten gestreut wird. Er sammelt sich an den Knotenlinien und es entstehen *Cladni'sche Figuren*. Moderne Techniken benutzen zur Sichtbarmachung von Schwingungen die Holographie.

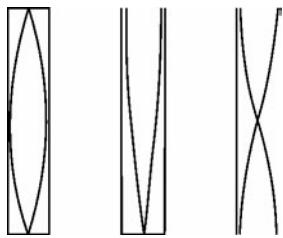


Bild 6-18  
Stehende Wellen in Luftsäulen

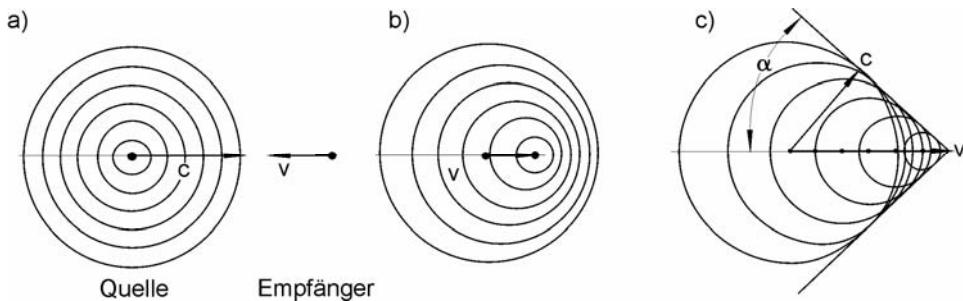
### Beugung

Eine Welle, die auf ein Hindernis fällt, wird daran gebrochen, d. h. es findet eine Abweichung von der ursprünglichen Ausbreitung statt. Nach dem *Huygens'schen Prinzip* breitet sich von

jedem Punkt einer Wellenfläche eine *Elementarwelle* kugelförmig aus. Mit Hilfe dieses Prinzips kann die Wellenausbreitung an Kanten, Spalten oder anderen Objekten verstanden und berechnet werden (Abschnitt 9.2.4).

### 6.2.4 Doppler-Effekt

Bewegen sich die Quelle einer Welle und ein Empfänger relativ zueinander, wird eine Verschiebung der Sendefrequenz  $f$  registriert. Dieser so genannte Doppler-Effekt kann an der Autobahn wahrgenommen werden. Ein sich näherndes Fahrzeug verursacht ein Geräusch mit ansteigender Tonhöhe. Nach dem Vorbeifahren dagegen sinkt die Frequenz. Zur Berechnung der empfangenden Frequenz werden zwei Fälle unterschieden.



**Bild 6-19** Wellen bei bewegtem Beobachter oder bewegter Quelle:

- Doppler-Effekt bei bewegtem Empfänger
- Doppler-Effekt bei Bewegung der Quellen
- Entstehung des Mach'schen Kegels bei Überschallgeschwindigkeit

### Bewegter Empfänger

Die Wellen einer Quelle mit der Sendefrequenz  $f$  breiten sich kugelförmig aus (Bild 6-19a). Bewegt sich ein Empfänger mit der Geschwindigkeit  $v$  auf die Quelle zu, steigt die Zahl der empfangenen Wellenberge pro Zeiteinheit im Vergleich zum ruhenden Empfänger. Die Zeit, in der zwei aufeinander folgende Wellenberge eintreffen, beträgt  $T_E = \lambda/(c + v)$ . Damit wird die Frequenz  $f_E$  am Empfänger:

$$f_E = \frac{1}{T_E} = \frac{c + v}{\lambda} \quad \text{oder mit } c = f\lambda$$

$$f_E = f(1 + \frac{v}{c}).$$
Doppler-Effekt
(6.35)

Entfernt sich der Empfänger, ist in der Gleichung  $-v$  einzusetzen.

### Bewegte Quelle

Bewegt sich die Quelle, so gerät sie aus dem Zentrum der emittierten Kugelwellen heraus, und man erhält Bild 6-19b. Der Abstand zweier Wellenberge, d. h. die Wellenlänge, hängt von der Richtung ab. Die Berechnung der Frequenz ergibt sich bei Bewegung auf einen ruhenden Empfänger zu:

$$f_E = \frac{f}{1 - \frac{v}{c}} . \quad \text{Doppler-Effekt} \quad (6.36)$$

Bewegt sich die Quelle vom Empfänger weg, so muss  $-v$  durch  $+v$  ersetzt werden. Die beschriebene Berechnung des Doppler-Effektes muss für Licht und andere elektromagnetische Wellen mit Hilfe der Relativitätstheorie modifiziert werden (Abschnitt 4.2.1).

### Überschallgeschwindigkeit

Bewegt sich die Quelle einer Welle mit einer Geschwindigkeit  $v$ , die größer als die Wellengeschwindigkeit  $c$  liegt, tritt nach Bild 6-19c ein so genannter *Mach'scher Kegel* auf. Die einzelnen Kugelwellen überlagern sich so, dass eine lineare Wellenfront entsteht. Der Effekt ist bei Schiffen als Bugwelle bekannt oder als Druckwelle bei Überschallflugzeugen. Die Berechnung des Öffnungswinkels  $\alpha$  des Mach'schen Kegels kann nach Bild 6-19c erfolgen:

$$\sin \alpha = \frac{c}{v} = \frac{1}{Ma} . \quad \text{Mach'scher Kegel} \quad (6.37)$$

Die Größe  $v/c$  nennt man *Mach'sche Zahl*  $Ma$ . Bei  $v = c$  ist  $Ma = 1$  (Mach 1) und man erhält  $\alpha = 90^\circ$ , d. h. eine Front senkrecht zur Bewegung. Diese Front, die bei Mach 1 eigentlich nur aus einem Punkt besteht, bezeichnet man als *Schallmauer*.

**Beispiel 6.2.4** Die Sirene eines Feuerwehrautos erzeugt einen Ton mit  $f = 700$  Hz. Welche Frequenz hört ein ruhender Beobachter bei Annäherung und Entfernung des Fahrzeugs mit  $v = 72$  km/h?  
Bei Annäherung gilt nach (6.36) mit einer Schallgeschwindigkeit von  $c = 340$  m/s:  $f_E = f / (1 - v/c) = 743,8$  Hz. Bei Entfernung gilt:  $f_E = f / (1 + v/c) = 661,1$  Hz.

## 7 Akustik

Als *Schall* bezeichnet man mechanische Wellen im Frequenzbereich des menschlichen Hörens zwischen 16 Hz und 20 kHz. Frequenzen unter 16 Hz ordnet man dem *Infraschall* und über 20 kHz dem *Ultraschall* zu. Ab 1 GHz spricht man von Hyperschall. In Gasen und Flüssigkeiten können sich nur *longitudinale Schallwellen* als Druckschwankungen ausbreiten. In festen Körpern dagegen treten daneben auch *transversale Schallwellen* auf. Von besonderer Bedeutung ist die Schallausbreitung in Luft und die damit verbundenen menschlichen Empfindungen, die als Sprache, Musik oder Lärm wahrgenommen werden.

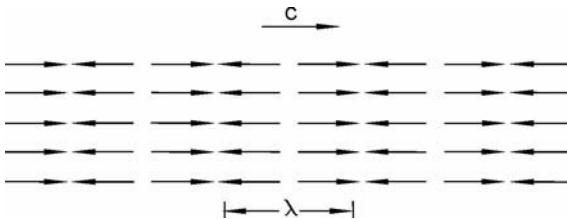
### 7.1 Physiologische Akustik

#### 7.1.1 Schallwellen

##### Schalldruck

In Gasen und Flüssigkeiten ist Schall eine *longitudinale Druckwelle*. Die Moleküle schwingen mit der Frequenz  $f = \omega/(2\pi)$  in  $x$ -Richtung der Ausbreitung (Bild 7-1), wobei  $\omega$  die Kreisfrequenz ist. Dadurch schwankt der Druck  $p$  periodisch um den normalen Druck  $p_0$ :

$$p = p_0 + \hat{p} \sin(\omega t - kx) = p_0 + \hat{p} \sin(2\pi(f t - \frac{x}{\lambda})) \quad [p] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}. \quad (7.1a)$$



**Bild 7-1**  
Graphische Darstellung einer Schall- oder longitudinalen Druckwelle

Die Amplitude des Schalldrucks  $\hat{p}$  beträgt im Bereich normaler Umgangssprache  $\hat{p} \approx 0,1 \text{ Pa}$ , während der Luftdruck bei  $p_0 \approx 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$  liegt. Der Effektivwert des Schalldrucks berechnet sich zu:

$$p_{eff} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{2}} \quad [p_{eff}] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}. \quad \text{Effektivwert des Schalldrucks } p_{eff} \quad (7.1b)$$

Die Wellenzahl  $k$  ist durch die Wellenlänge  $\lambda$  gegeben:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (7.1c)$$

Schallgeschwindigkeit  $c$  Wellenlänge  $\lambda$  und Frequenz  $f$  sind durch die Grundgleichung der Wellenlehre miteinander verbunden:

$$c = f\lambda.$$

Schallgeschwindigkeit  $c$  (7.2)

### Schallgeschwindigkeit in Gasen

Die Schallgeschwindigkeit  $c$  in Gasen und Flüssigkeiten wird durch den Kompressionsmodul  $K$  und die Dichte  $\rho$  bestimmt:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad [c] = \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad \text{Schallgeschwindigkeit } c, \text{ Gase} \quad (7.3)$$

Der Kompressionsmodul  $K$  ist durch die Druckänderung  $\Delta p$  und die relative Volumenänderung  $\Delta V/V$  definiert:

$$K = -\frac{\Delta p \cdot V}{\Delta V} \quad [K] = \text{Pa}. \quad (3.8 \text{ und } 3.9)$$

$K$  entspricht bei Festkörpern dem Elastizitätsmodul  $E = \sigma \cdot l / \Delta l$  (3.2 und 3.3). Damit folgt die Beziehung (7.3) aus (6.30).

Die Druckänderungen im Schall erfolgen so schnell, dass die bei der Kompression entstehende Wärme nicht abgeführt wird. Bei adiabatischer Kompression gilt  $pV^\kappa = \text{const.}$  oder differenziert  $\frac{dV}{dp} = -\frac{V}{\kappa p}$  (5.31). Durch Vergleich mit der oben zitierten Definition für  $K$  erhält man:

$$K = \kappa p, \quad (7.4)$$

wobei  $\kappa$  den Adiabatenexponenten darstellt.

Mit Hilfe der Zustandsgleichung für ideale Gase  $p = \rho R' T$  (5.4c mit  $\rho = m/V$ ) resultiert:

$$c = \sqrt{\kappa R' T} \quad \text{Schallgeschwindigkeit } c, \text{ Gase} \quad (7.5a)$$

Die Schallgeschwindigkeit  $c$  hängt von der speziellen Gaskonstanten  $R'$  und der Temperatur  $T$  ab. Für Luft erhält man näherungsweise folgende Werte:

$$c_{\text{Luft}} = (331,4 + 0,6 \frac{\vartheta}{C}) \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad \text{Schallgeschwindigkeit in Luft} \quad (7.5b)$$

Die Schallgeschwindigkeit  $c_{\text{Luft}}$  steigt mit der Temperatur  $\vartheta$  (in °C). Einige Werte für die Schallgeschwindigkeit zeigt Tabelle 7.1.

**Tabelle 7.1** Schallgeschwindigkeit  $c$ , Dichte  $\rho$  und Impedanz  $Z$  einiger Materialien

Material	$c$ in m/s	$\rho$ in kg/m <sup>3</sup>	$Z$ in kg/(m <sup>2</sup> s)
Luft 0 °C (trocken)	331	1,293	427
Wasser 0 °C	1400	1000	$1,4 \cdot 10^6$
" 20 °C	1480	998	$1,5 \cdot 10^6$
Eis	3200	920	$2,9 \cdot 10^6$
Holz	4500	600	$2,7 \cdot 10^6$
Beton	4000	2100	$8,4 \cdot 10^6$
Glas	5300	2500	$13 \cdot 10^6$
Stahl	5050	7700	$30 \cdot 10^6$

### Schallgeschwindigkeit in Festkörpern

Die Ausbreitung von longitudinalen Schallwellen wird in Abschnitt 6.2.2 berechnet. Für die Schallgeschwindigkeit  $c_l$  ergibt sich mit (6.30):

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} . \quad \text{Schallgeschwindigkeit } c_l, \text{ Festkörper} \quad (7.6a)$$

wobei  $E$  der Elastizitätsmodul und  $\rho$  sind. Der Index  $l$  deutet an, dass es sich um longitudinale Druckwellen handelt. Daneben können noch transversale Wellentypen auftreten, beispielsweise Scherwellen. Diese bestehen in einer wellenförmigen Verdrillung der Festkörper. Die Geschwindigkeit  $c_t$  dieser transversalen Schallwellen wird durch den Schubmodul  $G$  bestimmt:

$$c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}} . \quad \text{Schallgeschwindigkeit } c_t, \text{ Festkörper} \quad (7.6b)$$

An Stäben führt eine longitudinale Schallwelle auch zu transversalen wellenförmigen Dickeänderungen. Weitere akustische Wellentypen stellen Biegeschwingungen von Saiten oder Membranen dar.

Bei Erdbeben treffen die longitudinalen und transversalen Schallwellen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit an einem Messort ein. Aus der Zeitdifferenz kann die Entfernung des Herdes des Bebens ermittelt werden.

### Schallschnelle $\hat{v}$

Schall ist eine Druckwelle, in der die Geschwindigkeit der Moleküle (Schallschnelle) periodisch schwankt. Die maximale Geschwindigkeit  $\hat{v}$  ist die Amplitude der Schallschnelle. Sie hängt von der Druckamplitude  $\hat{p}$ , der Dichte  $\rho$  und der Schallgeschwindigkeit  $c$  ab:

$$\hat{v} = \frac{\hat{p}}{\rho c} = \frac{\hat{p}}{Z} . \quad [\hat{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{Schallschnelle } \hat{v} \quad (7.7)$$

Die Größe  $Z = \rho c$  ( $Z = 427 \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ s})$  in Luft bei  $20^\circ\text{C}$ ) nennt man Wellenwiderstand oder Schallimpedanz.

### Schallintensität $I$

Weitere Größen des Schallfeldes sind die Intensität  $I$  und Schalleistung  $P$ . Die Intensität (Leistungsdichte) gibt die transportierte Leistung  $dP$  pro Flächenelement  $dA$  an. Man erhält folgenden Zusammenhang mit bereits früher eingeführten Größen:

$$I = \frac{dP}{dA} = \frac{P_{eff}^2}{\rho c} \quad [I] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} . \quad \text{Schallintensität } I \quad (7.8)$$

Der Zusammenhang zwischen der Leistung  $P$  einer Schallquelle und der Intensität  $I$  hängt von der Geometrie ab. Für eine punkt- oder kugelförmige Schallquelle fällt die Intensität im freien Raum quadratisch mit der Entfernung  $r$  ab:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} . \quad \text{Abstandsgesetz} \quad (7.9)$$

**Beispiel 7.1.1a** Ein Ton in Luft hat eine Frequenz von  $f = 440$  Hz. Wie groß sind Schallgeschwindigkeit  $c$  und Wellenlänge bei  $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ ? Wie lange dauert es, bis ein Echo von einer 30 m entfernten Wand zurückkommt?

Nach (7.5b) gilt:  $c_{\text{Luft}} = (331,4 + 0,6 \cdot \vartheta / ^\circ\text{C}) \text{ m/s} = 343,4 \text{ m/s}$ . Für die Wellenlänge folgt:  $\lambda = c / f = 0,78 \text{ m}$ . Die Laufzeit des Schalls für insgesamt  $s = 60 \text{ m}$  beträgt:  $t = s / c = 0,17 \text{ s}$ .

**Beispiel 7.1.1b** Ein Lautsprecher mit einer akustischen Leistung von  $P = 10 \text{ W}$  strahlt kugelförmig. Berechnen Sie in 10 m Entfernung möglichst viele Schallgrößen ( $c = 340 \text{ m/s}$ ,  $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$ ).

Schallintensität:  $I = P / (4\pi r^2) = 0,008 \text{ W/m}^2$ .

Effektivwert des Schalldrucks nach (7.8):  $p_{\text{eff}} = \sqrt{I\rho c} = 1,9 \text{ Pa}$ , Druckamplitude nach (7.1b):  $\hat{p} = p_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2} = 2,6 \text{ Pa}$ , Geschwindigkeitsamplitude:  $\hat{v} = \hat{p}/(\rho c) = 0,006 \text{ m/s}$ .

## 7.1.2 Schallempfindung

Das menschliche Ohr registriert Schallwellen im Bereich zwischen 16 Hz und 20 kHz. Es gibt starke individuelle Unterschiede in der Schallempfindung, die auch vom Lebensalter abhängen, so dass in Normen nur mittlere Werte festgelegt werden können.

### Schallpegel $L$ in dB

Die Hörschwelle bei einer Schallfrequenz  $f = 1 \text{ kHz}$  liegt bei einem Schalldruck von etwas über  $p_{\text{eff},0} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ . Die entsprechende Schallintensität berechnet sich mit (7.8) zu:  $I_0 = p_{\text{eff},0} / (\rho c) = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  ( $\rho = \text{Luftdichte}$ ,  $c = \text{Schallgeschwindigkeit}$ ).

Bei einem Schalldruck oberhalb von  $p_{\text{eff}} = 20 \text{ Pa}$ , entsprechend  $I = 1 \text{ W/m}^2$ , ist die Schmerzgrenze überschritten und es werden keine Frequenz- und Amplitudenunterschiede mehr erkannt.

Die Schallintensität im Hörbereich übersteht etwa 12 Zehnerpotenzen  $I = 10^{-12}$  bis  $1 \text{ W/m}^2$ .

Die menschlichen Empfindung ist proportional zum Logarithmus des Reizes (Gesetz von Weber und Fechner).

Daher wird eine logarithmische Skala eingeführt und man definiert den Schallpegel  $L$ :

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0} \text{ dB} \quad \text{mit } I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \quad \text{Schallpegel } L \quad (7.10)$$

Als Bezugswert wird die Hörschwelle mit  $I_0$  genommen. In (7.10) wird mit dem Faktor 10 multipliziert, damit eine Skala mit ganzen Zahlen entsteht. Obwohl der Schallpegel  $L$  dimensionslos ist, fügt man den Ausdruck dB = Dezibel (= 1/10 Bel) hinzu, in Übereinstimmung mit der Terminologie der Elektronik.

Man kann den Schallpegel auch durch den Schalldruck  $p_{\text{eff}}$  definieren. In diesem Fall wird der Schallpegel mit  $L_p$  bezeichnet:

$$L_p = 20 \lg \frac{p_{\text{eff}}}{p_{\text{eff},0}} \text{ dB} \quad \text{mit } p_{\text{eff},0} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}. \quad \text{Schallpegel } L_p \quad (7.11)$$

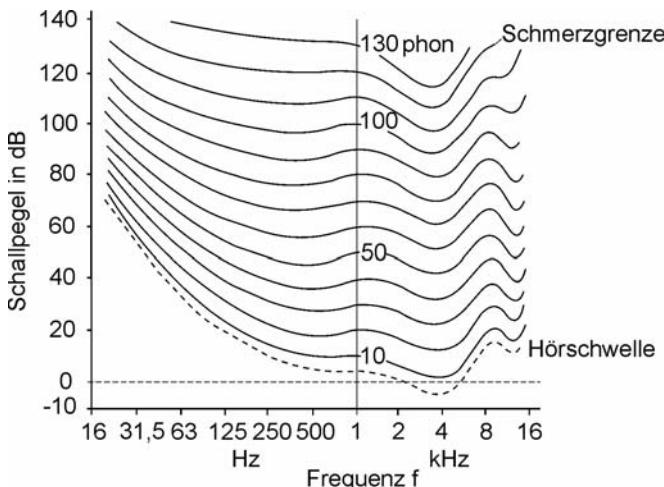
Als Bezugswert wird die Hörschwelle mit  $p_{\text{eff},0}$  genommen. Da die Bezugswerte für die Hörschwelle in (7.10) und (7.11) einander exakt nur bei  $20^\circ\text{C}$  und normaler Luftdichte entsprechen, sind die Definitionen für  $L$  und  $L_p$  im Allgemeinen nicht völlig identisch. In der Praxis haben diese Unterschiede jedoch wenig Bedeutung. Da  $I$  proportional zu  $p_{\text{eff}}^2$  ist, entsteht in der letzten Gleichung aus der 10 eine 20.

### Lautstärke $L_S$ in phon

Der *Schallpegel* ( $L$  oder  $L_p$ ) ist eine physikalische Messgröße. Die Eigenschaften des menschlichen Ohres werden durch die *Lautstärke*  $L_S$  berücksichtigt. Die menschliche Schall-Empfindung, d. h. die Lautstärke von akustischen Wellen mit gleichem Schallpegel, hängt von der Frequenz  $f$  ab. Bild 7-2 zeigt Kurvenscharen in einem Schallpegel-Frequenz-Diagramm. Jede Kurve wird als gleich laut empfunden und hat daher die gleiche *Lautstärke*  $L_S$ . Die Kurven wurden durch Reihenuntersuchen ermittelt. Sie repräsentieren jeweils die Lautstärke  $L_S = 10, 20, \dots, 130$  phon. Die Phon-Skala wurde so gewählt, dass sie bei  $f = 1000$  Hz zahlenmäßig mit dem Schallpegel  $L_p$  übereinstimmt:

$$\{L_S(1\text{ kHz})\} = \{L_p(1\text{ kHz})\} \quad \text{Lautstärke und Schallpegel} \quad (7.12a)$$

In Bild 7-2 erkennt man, dass die Hörschwelle (gestrichelte Kurve) nicht genau  $L_S = 0$  phon, sondern 4 phon entspricht. Dies liegt daran, dass als Bezugswert für den Schallpegel  $L_p$  der Druck  $p_{eff,0} = 2 \cdot 10^{-5}$  Pa vereinbart ist, der etwas unterhalb der Hörschwelle liegt.



**Bild 7-2**  
Darstellung der Phon-Skala.  
Zusammenhang zwischen  
Schallpegel (dB), Lautstärke  
(Phon) und Frequenz

### Bewertete Schallpegel $L_A$ und $L_C$ in dB(A) und dB(C)

Die Phon-Skala wurde für Schall mit einer engen Frequenzbandbreite aufgestellt. Normalerweise trifft ein breitbandiges Spektrum das Ohr und die Schallempfindung verhält sich komplizierter. In der Schallmesstechnik werden daher zwei verschiedene Bewertungskurven nach Bild 7-3 verwendet. Die Kurve A, die meist zur Bewertung des Schalls verwendet wird, reproduziert in Frequenzverhalten ungefähr die 90-phon-Kurve von Bild 7-2. Sie wird durch ein elektronisches Filter wiedergegeben. Man beachte, dass die Kurve bei  $f = 1$  kHz keine Abschwächung bewirkt, d. h. es gilt:

$$\{L_S(1\text{ kHz})\} = \{L_p(1\text{ kHz})\} = \{L_A(1\text{ kHz})\} \quad \text{Phon, dB und dB(A).} \quad (7.12b)$$

Die Messung des Schalls unter Berücksichtigung der A-Kurve (Bild 7.3) liefert den bewerteten Schallpegel  $L_A$ ; die Angabe erfolgt in dB(A). Beispiele für die Lautstärke in dB(A) und deren Ursache zeigt Tabelle 7.2. Daneben wird die C-Kurve nach Bild 7-3 selten und meist bei gehörschädigendem Lärm über 100 phon eingesetzt. Der Schallpegel  $L_C$  wird dB(C) angegeben.

**Tabelle 7.2a** Empfindlichkeit des Gehörs

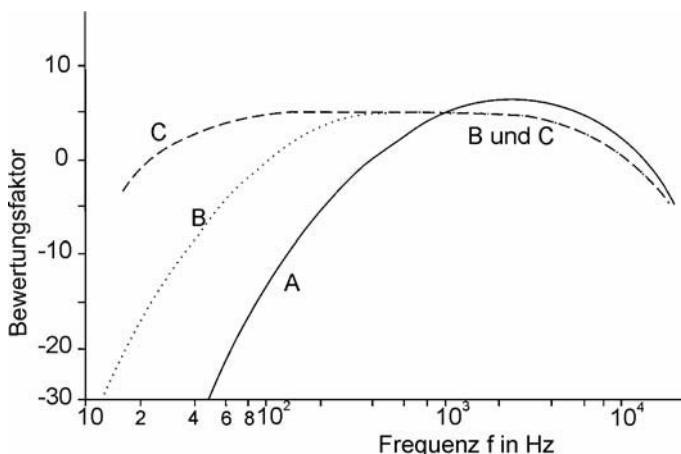
$L$ in dB(A)	Geräusch
0	Hörgrenze
10	Flüstern
20	Blätterrauschen
30	ruhige Straße
40	leises Radio
50	Umgangssprache
60	Büro
85	lauter Straße *)
90	Pressluftbohrer
100	Schmiede
120	Flugzeug (8 m)
130	Schmerzgrenze

\*) Bei 85 dB(A) (8 Stunden täglich)  
Lärmschwerhörigkeit nach 10 Jahren

**Tabelle 7.2b** Schallpegel  $L$  in verschiedenen Umgebungen

Umgebung	$L$ in dB(A)
Schlafraum (offenes Fenster)*)	25 – 30
Krankenzimmer, Ruheraum	30 – 40
Arbeitszimmer zum Denken	20 – 45
" mittlere Konzentration	50 – 60
Wohnraum tagsüber	45
Lärmbetrieb	90
	tags      nachts
Industriegebiet* )	65      50
überwiegend Wohngebiet	60      45
reines Wohngebiet	50      35

\*) Medizinische Leitsätze zur Lärmbekämpfung  
\*) VDI 2058



**Bild 7-3**  
Bewertungskurven für dB(A), dB(B) und dB(C) nach DIN 45633

**Beispiel 7.1.2a** Welchen Schallpegel erzeugen 13 Maschinen mit je 75 dB?

Für einen Motor gilt  $L_1 = 10 \lg I/I_0 = 75$  dB und für 13 Motoren

$$L_{13} = 10 \lg 13 \cdot I/I_0 = 10 \lg I/I_0 + 10 \lg 13 = (75 + 11) \text{ dB} = 86 \text{ dB}.$$

**Beispiel 7.1.2b** Welchen Schallpegel ergeben zwei Geräusche mit 41 dB und 47 dB?

Es sind die Schallintensitäten zu addieren, nicht die Schallpegel:  $I = I_1 + I_2 = I_0 10^{L_1/10} + I_0 10^{L_2/10} = 6,3 \cdot 10^4 I_0$ . Daraus folgt für den Schallpegel:

$$L = 10 \log I/I_0 = 10 \lg 6,3 \cdot 10^4 = 48 \text{ dB} \quad (I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2).$$

**Beispiel 7.1.2c** Ein Ton mit 4 kHz ist 80 phon laut. Wie groß sind Schallpegel  $L$  und Schallintensität  $I$ ?

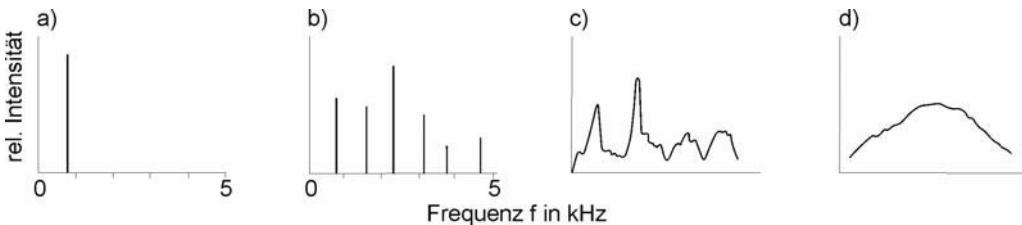
Die Phon-Kurven (Bild 7-2) zeigen einen Schallpegel (bei 80 phon und 4 kHz) von  $L = 70$  dB. Aus  $L = 10 \lg I/I_0$  ( $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ ) folgt:  $I = I_0 10^{L/10} = 10^{-5} \text{ W/m}^2$ .

### 7.1.3 Musikalische Akustik

Reine Sinustöne besitzen naturgemäß eine einzige Frequenz (Bild 7-4a). Etwas komplizierter sind die Töne von Musikinstrumenten. Sie bestehen aus einer Grundfrequenz, welche die Tonhöhe angibt. Der charakteristische Klang wird durch Obertöne erzeugt, die ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz aufweisen (Bild 7-4b).

#### Tonleiter

Zur Skalierung der Tonhöhen wird der Frequenzbereich logarithmisch in Oktaven aufgeteilt, die jeweils der Verdopplung der Frequenz entsprechen. Normalwert ist der Kammeroton  $a'$  mit  $f_{a'} = 440$  Hz. Die Frequenzen der eingestrichenen Oktave zeigt Tabelle 7.3. Die Frequenzverhältnisse zweier Halbtöne sind jeweils  $2^{1/12} = 1,06$ . Lässt sich das Frequenzverhältnis durch ganze Zahlen kleiner als neun ausdrücken, so ist dies nach abendländischer Empfindung eine Wohlklang oder eine Konsonanz.



**Bild 7-4** Beispiele für Frequenzspektren:

- a) reiner Sinuston,
- b) Ton eines Musikinstruments,
- c) Spektrum einer rotierenden Maschine,
- d) Geräusch (Zischen)

**Tabelle 7.3** Frequenzen der eingestrichenen Oktave (3. Spalte  $f/f_{c'}$  = übliche wohltemperierte Stimmung, 4. Spalte  $f/f_{c'}$  = ältere diatonische Tonleiter)

Ton	$f$ in Hz	$f/f_{c'}$	Empfindung	Ton	$f$ in Hz	$f/f_{c'}$	Empfindung
c'	261,6	$20/12$	1:1 Konsonanz	fis'	370,0	$26/12$	Konsonanz
cis'	277,2	$21/12$	16:15 Dissonanz	g'	392,0	$27/12$	3:2 Konsonanz
d'	293,7	$22/12$	9:8 Dissonanz	gis'	415,3	$28/12$	8:5 Konsonanz
dis'	311,1	$23/12$	6:5 Konsonanz	a'	440,0	$29/12$	5:3 Konsonanz
e'	329,6	$24/12$	5:4 Konsonanz	ais'	466,2	$210/12$	9:5 Dissonanz
f	349,2	$25/12$	4:3 Konsonanz	h'	493,9	$211/12$	15:18 Dissonanz
				c''	523,3	$212/12$	2:1 Konsonanz

#### Geräusche

Sprache und Geräusche werden durch ein kontinuierliches Frequenzspektrum wiedergegeben. Das Problem der automatischen Sprachanalyse besteht darin, aus den Spektren einzelne Buchstaben und Wörter zu identifizieren. Bei Maschinengeräuschen erkennt man im Frequenzspektrum meist die Drehzahl in Grund- und Oberwellen (Bild 7-4c). Ein Knall zeichnet sich durch ein weißes Spektrum aus (Bild 7-4d).

## 7.2 Technische Akustik

### 7.2.1 Messtechnik

#### Schallwandler

Der Schalldruck umfasst in der Technik 6 Zehnerpotenzen. Zur Messung des Schalls werden elektroakustische Wandler eingesetzt, die auf unterschiedlichen physikalischen Effekten beruhen. Bei elektrostatischen Systemen bildet die Wandermembran zusammen mit einer festen Gegenelektrode einen Kondensator, dessen Kapazität durch die Schallwelle moduliert wird. Bei Lautsprechern und Tauchspulmikrofonen bewegt die Membran eine Spule in einem Magnetfeld. Beim elektromagnetischen Wandler schwingt eine magnetische Membran im Luftspalt eines Magneten. Der Piezoeffekt wird bei Kristallmikrofonen ausgenutzt; durch den Druck der Schallwelle wird in einem Kristall eine elektrische Spannung erzeugt. Ähnlich arbeiten piezoresistive Wandler, z. B. Kohlemikrophone, bei denen der Schalldruck zu Widerstandsänderungen führt.

#### Schalldämmung $D$

Die Schalldämmung  $D$  einer Wand wird durch die Messung der Schalldrücke  $\hat{p}_1$  und  $\hat{p}_2$  vor und hinter der Wand ermittelt:

$$D = 20 \lg \frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_2} \text{ dB} \quad \text{oder} \quad D = L_1 - L_2 \text{ dB.} \quad \text{Schalldämmung } D \quad (7.13)$$

$D$  kann auch durch die Untersuchung der Schallpegel  $L_1$  und  $L_2$  bestimmt werden. Die Werte für einige Bauelemente zeigt Tabelle 7.4.

**Tabelle 7.4** Schalldämmung  $D$  einiger Bauelemente

	$D$ in dB		$D$ in dB
Sperrholz, 0,5 mm	19	Einfachfenster	15 – 25
Ziegelwand, 1 Stein verputzt	50	Doppelfenster	25 – 35

#### Nachhallzeit

Die Raumakustik kann durch Messung der Nachhallzeit untersucht werden. Sie wird durch das Abklingen des Schalldrucks nach Abschalten einer Schallquelle um den Faktor 10 ermittelt. Neben dem Raumvolumen hängt sie vom Absorptionsgrad der Wände ab. Typische Zeiten für Konzertsäle liegen um 2 s.

**Beispiel 7.2.1** In einer Wohnung mit offenem Fenster werden  $L_1 = 83$  dB(A) gemessen. Wie hoch ist die Schalldämmung  $D$  des Fensters, wenn mit geschlossenem Fenster  $L_2 = 50$  dB(A) herrschen? Wie groß sind die Schallintensitäten bei offenem und geschlossenem Fenster?

Die Schalldämmung beträgt  $D = L_1 - L_2 = 33$  dB(A). Die Schallintensitäten betragen  $I_1 = 2 \cdot 10^{-4}$  W/m<sup>2</sup> und  $I_2 = 10^{-7}$  W/m<sup>2</sup>.

## 7.2.2 Ultraschall

Als *Ultraschall* werden mechanische Wellen oberhalb des Hörbereichs zwischen 20 kHz und 1 GHz bezeichnet, darüber spricht man von Hyperschall. Die Wellenlänge von Ultraschall ist relativ klein, z. B. 0,15 mm bei 10 MHz im Wasser, so dass gebündelte Strahlen erzeugt werden können.

### Ausbreitung

Eine wichtige Anwendung ist die bildgebende Ultraschalldiagnostik in der Medizin und Materialprüfung. Das Verfahren beruht darauf, dass Ultraschall an Grenzflächen teilweise reflektiert wird. Aus der Laufzeit der reflektierten Strahlung ergibt sich die Position der Grenzfläche. Der Reflexionsgrad  $R$  ist das Verhältnis der reflektierten Intensität zur einfallenden Intensität.  $R$  hängt von den Impedanzen ( $Z = \rho c$ ; (7.7)) des Mediums 1 vor der Grenzfläche und 2 hinter der Grenzfläche ab. Für senkrechten Einfall gilt:

$$R = \left( \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2. \quad \text{Reflexionsgrad } R \quad (7.14)$$

In Festkörpern erfolgt eine Aufspaltung in longitudinale und transversale Wellen. Mit Ultraschall lassen sich sehr hohe Schallintensitäten erzeugen (bis zu einigen kW/cm<sup>2</sup>). Dies liegt an den hohen Frequenzen und den relativ intensiven Schalldrücken (bis  $5 \cdot 10^6$  Pa). Dies führt zu Beschleunigungen, die bis zu  $10^6$  mal höher sind als die Erdbeschleunigung.

### Erzeugung

Ultraschall hoher Frequenz und Intensität lässt sich mittels Elektrostriktion, der Umkehrung des Piezoeffektes, mit Quarz oder Bariumtitannat erzeugen (Abschnitt 11.1.2). An eine dünne piezoelektrische Platte werden an beiden Seiten Elektroden angebracht. Beim Anlegen einer elektrischen Wechselspannung treten periodische Dicke Schwankungen auf, die sich als Druckwellen ausbreiten. Ultraschall tiefer Frequenz produziert man durch Magnetostriktion, d. h. durch Dickenänderung ferromagnetischer Materialien in Magnetfeldern. Der Nachweis von Ultraschall erfolgt durch den Piezoeffekt. Die Druckwelle führt zu einer elektrischen Wechselspannung.

### Anwendungen

Aufgrund der hohen Beschleunigung in einer Ultraschallwelle ergeben sich Anwendungen wie Reinigen, Bohren oder Schweißen. Eine neuere Technik ist das Zertrümmern von Nierensteinen beim Menschen. Zur Vermeidung von Reflexion an der Körperoberfläche sitzt der Patient in einer Wasserwanne. Die Strahlung wird auf die Nierensteine fokussiert.

Ultraschall wird auch bei Verfahren zur Materialprüfung eingesetzt. An Materialfehlern tritt Reflexion auf, die vermessen wird. In der bildgebenden medizinischen Diagnostik hat Ultraschall eine breite Anwendung gefunden. Gegenüber Röntgenstrahlen tritt der Vorteil auf, dass keine biologischen Strahlenschäden entstehen.

Weitere Anwendungen des Ultraschalls findet man in der Elektronik bei Verzögerungsleitungen (z. B. im Fernseher). Elektronische Signale können in Ultraschall umgewandelt werden, die statt mit Licht nur mit Schallgeschwindigkeit laufen.

In der modernen Laseroptik wird die Beugung von Licht an Ultraschall als Verfahren zur Strahlablenkung oder zur Modulation von Licht angewendet (Kapitel 9).

**Beispiel 7.2.2** Bei einem Echolot kommt ein Ultraschallsignal nach 0,4 s wieder an den Sender zurück. Wie groß ist die Wassertiefe (Schallgeschwindigkeit in Wasser = 1480 m/s). Der zurückgelegte Weg beträgt  $s = ct = 1480 \cdot 0,4 \text{ m} = 592 \text{ m}$ . Die Wassertiefe ist halb so groß.

# 8 Elektromagnetismus

Während die *Gravitationskräfte* die Bewegung im Sonnensystem und im Weltall bestimmen, wird die Welt der Atome, Moleküle und der daraus zusammengesetzten Materialien durch *elektrische Kräfte* beherrscht. Die Elektrizitätslehre liefert die Grundlagen zum Aufbau der Materie und zum Verständnis elektrischer und elektronischer Bauteile, Geräte und Maschinen.

## 8.1 Elektrisches Feld

### 8.1.1 Elektrische Ladung

Die Eigenschaften elektrischer und magnetischer Felder lassen sich nicht aus der Mechanik herleiten. Die Ursache dafür ist eine zusätzliche Eigenschaft der Materie: die Ladung. Atome und Moleküle bestehen aus dem positiv geladenen Kern und den negativen Elektronen. Im Normalfall sind die Ladungen von Kern und Atomhülle dem Betrag nach gleich groß und die Materie wirkt elektrisch neutral. Die äußeren Elektronen der Atome sind nur leicht gebunden, so dass sie durch Energiezufuhr bewegt werden können. In Metallen sind sie praktisch frei. Damit kann Materie positiv oder negativ aufgeladen werden, je nachdem ob man Elektronen entfernt oder hinzufügt. Der Transport von Elektronen (oder seltener von geladenen Atomen (Ionen)) führt zum elektrischen Strom.

#### **Elektrische Ladung $Q$**

Die Ladung ist quantisiert und die kleinste mögliche Ladung ist die *Elementarladung  $e$* :

$$e = 1,602189 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{C} = \text{Coulomb}). \quad \text{Elementarladung } e \quad (8.1)$$

Die Elektronen tragen die Ladung  $-e$ . Die Ladung der Atomkerne wird durch die Protonen mit der Ladung  $+e$  gegeben. Eine zweite Sorte von Kernteilchen, die Neutronen, ist ungeladen (Abschnitt 10.1.1).

Die Einheit der Ladung  $Q$  ist:  $[Q] = \text{Coulomb} = \text{C} = \text{As}$ . Coulomb wird aus der Einheit der elektrischen Stromstärke  $I$  abgeleitet:  $[I] = \text{Ampere} = \text{A}$ .

#### **Coulomb'sches Gesetz**

Ladungen üben Kräfte aufeinander aus, die durch das Coulomb'sche Gesetz beschrieben werden. Es ähnelt bezüglich Form und Abstandsverhalten dem Gravitationsgesetz (4.1). Für zwei punktförmige Ladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  im Abstand  $r$  voneinander gilt für die Kraft  $F$ :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad [F] = \text{N}. \quad \text{Coulomb'sches Gesetz} \quad (8.2)$$

Für Ladungen mit gleichen Vorzeichen ist die Kraft abstoßend, bei verschiedenem Vorzeichen ist sie anziehend. Die Kraft wirkt in Richtung der Verbindungslinie beider Ladungen.

Die Proportionalitätskonstante wurde aus praktisch-rechnerischen Gründen in der Form  $1/(4\pi\epsilon_0)$  eingeführt. Die *elektrische Feldkonstante  $\epsilon_0$*  ist experimentell bestimmbar:

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}. \quad \text{Elektrische Feldkonstante } \epsilon_0 \quad (8.3)$$

### **Elektrischer Strom I**

Verbindet man getrennte Ladungen, z. B. durch einen Metalldraht, findet ein Ladungstransport durch Elektronen statt. Es fließt ein elektrischer Strom  $I$ , der durch die transportierte Ladung  $dQ$  im Zeitintervall  $dt$  definiert ist:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad [I] = \text{A} = \frac{\text{C}}{\text{s}} \quad \text{Stromstärke } I \quad (8.4\text{a})$$

Bei zeitlich konstanter Stromstärke  $I = \text{const.}$  vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$I = \frac{Q}{t} \quad \text{Konstanter Strom } I \quad (8.4\text{b})$$

Die Stromstärke  $I$  ist im SI-System die 4. Basisgröße, neben der Zeit (s), der Länge (m) und der Masse (kg).

Die Einheit der Stromstärke wird durch folgende messtechnische Vorschrift definiert:

Eine Stromstärke  $I$  besitzt den Wert 1 Ampere = 1 A, wenn auf zwei stromdurchflossene parallele Leiter im Abstand von 1 m die Kraft pro Leiterlänge  $2 \cdot 10^{-7}$  N/m wirkt (Tabelle 1.1).

**Beispiel 8.1.1a** Wie viele Elektronen  $N$  ergeben eine Ladung von  $Q = 1 \text{ Ah}$ ?

Die Ladung beträgt:  $Q = Ne$ . Daraus ergibt sich:  $N = 3600 / 1,6 \cdot 10^{-19} = 2,25 \cdot 10^{22}$ .

**Beispiel 8.1.1b** Durch einen Leiter fließt ein Strom von 1,5 mA. Wie viele Elektronen  $dN/dt$  treten pro Sekunde durch den Draht?

Für den Strom gilt:  $I = dQ/dt$  mit  $dQ = dNe$ . Damit wird  $dN/dt = I/e = 0,94 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$ .

### **8.1.2 Elektrische Feldstärke**

Das Coulomb'sche Gesetz beschreibt die Fernwirkung von Ladungen. Die Kräfte werden dadurch erklärt, dass Ladungen von einem elektrischen Feld umgeben sind. Die Stärke des elektrischen Feldes wird durch die *elektrische Feldstärke*  $E$  gegeben.

#### **Definition der Feldstärke $\vec{E}$**

Theoretisch wird die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  durch die Kraft  $\vec{F}$  auf eine kleine positive Probelaadung Ladung  $Q$  bestimmt, die in das elektrische Feld eingebracht wird. Die Probelaadung muss deswegen sehr klein sein, damit sie das zu messende elektrische Feld nicht beeinflusst.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \quad \text{oder skalar} \quad E = \frac{F}{Q} \quad [E] = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad . \quad \text{Feldstärke } E \quad (8.5)$$

Die Feldstärke  $\vec{E}$  ist ein Vektor in Richtung der Kraft  $\vec{F}$ . Meist wird nur der Betrag  $E$  verwendet. Die Einheit der elektrischen Feldstärke  $E$  beträgt:  $[E] = \text{N/C} = \text{V/m}$ .

#### **Feld einer Punktladung**

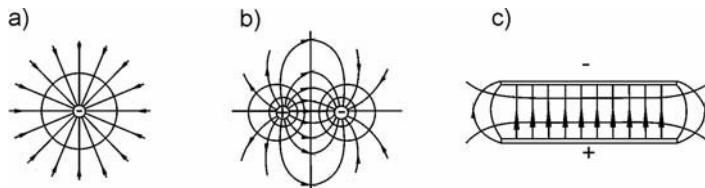
Für eine Punktladung  $Q$  kann die elektrische Feldstärke  $E$  aus dem Coulomb'schen Gesetz berechnet werden. Mit (8.2) gilt für die Kraft auf eine Probelaadung  $Q'$ :

$$E = \frac{F}{Q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad . \quad \text{Punktladung} \quad (8.6)$$

Die Feldstärke  $E$  fällt quadratisch mit dem Abstand  $r$ . Für eine positive Ladung  $+Q$  verläuft die Richtung von  $\vec{E}$  radial von der Punktladung weg. Für eine negative Ladung  $-Q$  ist die Richtung umgekehrt (Bild 8-1a).

### **Elektrische Feldlinien**

Man kann elektrische Felder durch Feldlinien, die in Richtung der Feldstärke  $\vec{E}$  oder der Kraft  $\vec{F}$  zeigen, graphisch darstellen. Die Dichte der Linien ist proportional zum Betrag  $E$  der Feldstärke  $\vec{E}$ . Die Feldlinien verlaufen von der positiven zur negativen Ladung, wie es in Bild 8-1 für eine Punktladung und für andere Anordnungen gezeigt ist.



**Bild 8-1** Darstellung von elektrischen Feldlinien bei verschiedenen Anordnungen:

- Negative punkt- oder kugelförmige Ladung.
- Elektrischer Dipol.
- Parallele geladene Platten (Kondensator)

**Beispiel 8.1.2** Wie groß ist die Kraft auf die Ladung von 1 mC im elektrischen Feld von 1 kV/m?

Die Kraft beträgt:  $F = EQ = 10^{-3} \cdot 10^3 = 1 \text{ CV/m} = 1 \text{ N}$ .

### **8.1.3 Spannung und Potenzial**

Beim Verschieben von Ladungen im elektrischen Feld wird Arbeit verrichtet. Die Definition der Arbeit lautet:  $W = \int \vec{F} d\vec{s}$  (2.35d). Wird eine Ladung  $Q$  im elektrischen Feld  $\vec{E} = \vec{F}/Q$  von der Stelle 1 nach 2 verschoben, tritt folgende Arbeit auf:

$$W = - \int_1^2 \vec{F} d\vec{s} = -Q \int_1^2 \vec{E} d\vec{s}. \quad [W] = \text{J} = \text{Ws}. \quad (8.7)$$

Das negative Zeichen sagt aus, dass bei Verschieben einer positiven Ladung  $+Q$  in Feldrichtung Arbeit frei wird.

### **Spannung im elektrischen Feld**

Theoretisch wird die elektrische Spannung  $U$  durch die Arbeit  $W$  gemessen, die beim Verschieben einer Probeladung  $Q$  vom Messpunkt 1 nach 2 im elektrischen Feld auftritt.

$$U = \frac{W}{Q} \quad [U] = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \frac{\text{Ws}}{\text{C}} = \text{V}. \quad \text{Spannung } U \quad (8.8)$$

Die Einheit der elektrischen Spannung  $U$  ist:  $[U] = \text{J/C} = \text{Ws/As} = \text{W/A} = \text{Volt} = \text{V}$ .

### **Spannung einer Spannungsquelle**

Die Materie ist normalerweise elektrisch neutral. Zur Erzeugung von Bereichen mit unterschiedlichen Ladungen (Plus- und Minuspol einer Spannungsquelle) müssen Ladungen getrennt werden. Dabei ist gegen die anziehende Coulomb'sche Kraft Arbeit zu verrichten. Die

Trennung der Ladung kann chemisch (Batterien), optisch (Solarzellen) oder mechanisch (Dynamos) erfolgen. Zwischen Bereichen mit unterschiedlicher Ladung herrscht die elektrische Spannung:

*Die elektrische Spannung  $U$  ist die Trennungsarbeit  $W$  je Ladungseinheit  $Q$ .*

### Spannung $U$ und elektrische Energie $W$

Die in einer Spannungsquelle aufgewendete Trennungsarbeit  $W$  ist gleich der elektrischen Energie, die entnommen werden kann. In (8.7) ist also  $W$  auch die verfügbare elektrische Energie:

$$U = \frac{W}{Q}. \quad (8.8)$$

*Die elektrische Spannung  $U$  ist die elektrische Energie  $W$  je Ladungseinheit  $Q$ .*

### Elektrisches Potenzial $\varphi$

Wird eine Probeladung  $Q$  vom Unendlichen (oder einem feldfreien Bereich) zu einem Punkt im elektrischen Feld geführt, so wird die Spannung  $U_\infty$  auch Potenzial  $\varphi$  genannt:

$\varphi = U_\infty = \frac{W_\infty}{Q} \quad [\varphi] = \text{V.}$	Potenzial $\varphi$
-----------------------------------------------------------------------	---------------------

(8.9a)

Das Potenzial im Unendlichen ist nach dieser Definition gleich null. Potenzial  $\varphi$  und Spannung  $U$  besitzen die gleiche Einheit 1 V.

*Das Potenzial ist die Spannung zwischen einem Punkt im Unendlichen (oder einem feldfreien Raum) und dem Messpunkt.*

*Die Spannung  $U$  zwischen den Punkten 1 und 2 ist gleich der Potenzialdifferenz  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ :*

$U = \Delta\varphi.$	Potenzialdifferenz $\Delta\varphi$
----------------------	------------------------------------

(8.9b)

### Spannung $U$ und Feldstärke $E$

Aus (8.7) und (8.8) folgt:

$$U = - \int_1^2 \vec{E} d\vec{s}. \quad (8.10a)$$

Durch Differenzieren von (8.9) erhält man in skalarer Schreibung für die Feldstärke  $E$ :

$dU = -Eds \quad \text{oder} \quad E = -\frac{dU}{ds} \quad [E] = \frac{\text{V}}{\text{m}}.$	Feldstärke $E$
-----------------------------------------------------------------------------------------------	----------------

(8.10b)

sofern  $ds$  in Richtung der Feldstärke  $\vec{E}$  zeigt.

### Feld im Kondensator

In einem homogenen Feld zwischen den Platten eines Kondensators im Abstand  $d$  kann (8.10b) vereinfacht werden (Bild 8-1):

$U = Ed \quad \text{oder} \quad E = \frac{U}{d}.$	Feldstärke $E$
---------------------------------------------------	----------------

(8.10c)

In dieser Gleichung wurde das Minuszeichen von (8.10b) weggelassen, da es nur auf die Beiträge ankommt.

### Äquipotenzialflächen

Alle Punkte im elektrischen Feld mit gleichem Potenzial  $\varphi$  oder auch gleicher Spannung  $U$  liegen auf den so genannten Äquipotenzialflächen. Diese stehen senkrecht zu den Feldlinien und sind im Bild 8-1 eingezeichnet.

**Beispiel 8.1.3a** Eine 12 V-Batterie hat 20 Ah. Welche Energie kann ihr entnommen werden?

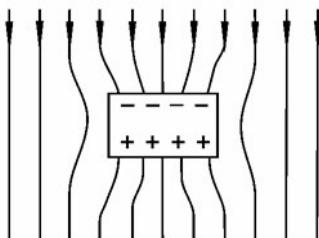
Es gilt  $W = UQ = 12 \cdot 20 \cdot 3600 \text{ VAs} = 8,64 \cdot 10^5 \text{ J} = 0,24 \text{ kWh}$ .

**Beispiel 8.1.3b** Wie groß ist die elektrische Feldstärke in einem Kondensator mit dem Plattenabstand  $d = 1\text{mm}$ , der auf  $U = 100 \text{ V}$  aufgeladen ist?

Es gilt:  $E = U/d = 10^5 \text{ V/m}$ .

### 8.1.4 Elektrische Influenz

Befindet sich Materie in einem elektrischen Feld, wirkt auf die Ladungen (Elektronen (-) und Atomkern (+)) die Coulomb-Kraft. In *Isolatoren* sind die Elektronen nicht frei und die Ladungen werden nur geringfügig gegeneinander verschoben; es kommt zu einer *elektrischen Polarisierung*. Das Wort Polarisation bedeutet Ausrichtung. In elektrischen Leitern aber sind die Leitungselektronen im elektrischen Feld frei beweglich. Die Ladungen werden getrennt und an die Oberfläche der Leiter verschoben. Man nennt diesen Effekt *Influenz*.



**Bild 8-2**

Influenz: Die freien Ladungen eines Leiters werden durch ein äußeres elektrisches Feld so verschoben, dass das Innere feldfrei ist

### Influenz

Bringt man einen Leiter in ein äußeres elektrisches Feld, bewegen sich die freien Leitungselektronen entgegengesetzt zur äußeren Feldrichtung. Im vorher neutralen Leiter tritt eine Ladungstrennung auf. Die Leitungselektronen werden so lange an die Oberfläche verschoben, bis das resultierende elektrische Feld im Leiter null wird (Bild 8-2). (Wenn das Feld noch nicht Null ist, werden weiter Ladungen verschoben.) An Stellen mit einem Elektronenüberschuss tritt eine negative Oberflächenladung auf. Bei Elektronenmangel entsteht eine positive Oberflächenladung. Die Influenz wird zur Abschirmung elektromagnetischer Felder im *Faraday'schen Käfig* ausgenutzt: im Inneren eines metallumschlossenen Raumes ist das elektrische Feld gleich null.

*Influenz ist die Verschiebung von Elektronen in einem Leiter unter dem Einfluss eines äußeren elektrischen Feldes.*

### Oberflächenladung $\sigma$

Durch die Influenz entstehen auf leitenden Körpern in äußeren elektrischen Feldern Oberflächenladungen. Die *Ladungsdichte*  $\sigma$  ist die Ladung  $dQ$  pro Fläche  $dA$ :

$$\sigma = \frac{dQ}{dA} \quad \text{oder f\"ur } \sigma = \text{const.} \quad \sigma = \frac{Q}{A} \quad [\sigma] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}. \quad (8.11)$$

Der Zusammenhang zwischen der Oberfl\"achenladung  $\sigma$  und der Feldst\"arke  $E$  an der Oberfl\"ache lautet:

$$\sigma = \epsilon_0 E \quad \text{oder} \quad \sigma = D \quad [D] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}, \quad \text{Oberfl\"achenladung } \sigma \quad (8.12)$$

wobei  $\epsilon_0$  die elektrische Feldkonstante und  $D = \epsilon_0 E$  die elektrische Flussdichte (Abschnitt 8.1.7) sind.

*Die Oberfl\"achenladung  $\sigma$  ist gleich der elektrischen Flussdichte  $D$ .*

Beweis von (8.12): F\"ur eine geladene Kugel mit dem Radius  $R$  gilt:  $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ . Die Feldst\"arke an der Oberfl\"ache betr\"agt (8.6):  $E = Q/(4\pi \epsilon_0 R^2)$ . Aus beiden Gleichungen folgt (8.12).

**Beispiel 8.1.4** Warum ist man in einem Kfz oder Flugzeug gegen Blitzschlag weitgehend gesch\"utzt?

In beiden F\"allen handelt es sich um einen Faraday'schen K\"afig, der innen feldfrei ist.

### 8.1.5 Elektrische Polarisierung

Bei einem Isolator sind die Elektronen nicht frei beweglich. Trotzdem gibt es f\"ur Isolatoren in elektrischen Feldern eine der Influenz \"ahnliche Erscheinung: die *Polarisation*. Die Ladungen k\"onnen im elektrischen Feld innerhalb der Molek\"ule verschoben werden. Bringt man einen Isolator in ein elektrisches Feld, entstehen molekulare *Dipole*.

#### Dipole

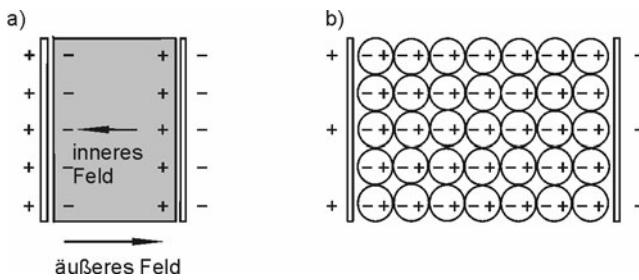
Ursache f\"ur das Auftreten der elektrischen Polarisierung sind atomare oder molekulare Dipole in der Materie. Ein elektrischer Dipol ist ein elektrisch neutrales Gebilde, bei dem die Ladungsschwerpunkte nicht zusammenfallen. Er besteht aus einer positiven und negativen Ladung ( $+Q$  und  $-Q$ ) im Abstand  $l$ , gekennzeichnet durch das Dipolmoment  $\vec{p}$ :

$$\vec{p} = Q\vec{l} \quad \text{Dipolmoment } \vec{p} \quad (8.13)$$

Im homogenen elektrischen Feld kompensieren sich die Kr\"afte an beiden Ladungen, so dass die resultierende Kraft null ist. Allerdings entsteht ein Drehmoment, das zu einer Orientierung des Dipols in Richtung des elektrischen Feldes f\"uhrt.

#### Polarisation und Permittivit\"atszahl $\epsilon_r$

Bild 8-3 zeigt einen geladenen Kondensator mit einem Isolator zwischen den Platten. Durch das elektrische Feld werden molekulare Dipole gebildet, die Ladungen an den Endfl\"achen erzeugen. Im Innern dagegen kompensieren sich die Ladungen der Dipole. Diese Oberfl\"achenladung verursacht im Kondensator ein inneres Feld, das entgegengesetzt zum \"au\sseren Feld liegt. Damit sinken die Feldst\"arke und die Spannung am Kondensator. F\"ur die Kapazit\"at eines Kondensators gilt  $C = Q/U$  (8.17). Da die Ladung auf den Platten konstant bleibt, steigt die Kapazit\"at durch den Einfluss der Materie.

**Bild 8-3** Kondensator mit einem Dielektrikum:

- a) Durch die Polarisation der Materie entstehen Oberflächenladungen
- b) Mikroskopisches Bild zur Erklärung der Polarisation und der Oberflächenladungen

Bringt man also einen Isolator (Dielektrikum) zwischen die Platten eines Kondensators, steigt die Kapazität von  $C_0$  auf  $C$ . Zur Charakterisierung dieses Sachverhaltes dient der Begriff *Permittivitätszahl*  $\epsilon_r$ :

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0} > 1 \quad [\epsilon_r] = 1. \quad \text{Permittivitätszahl } \epsilon_r \quad (8.14)$$

Der Einfluss von Dielektrika in elektrischen Feldern äußert sich darin, dass in vielen Gleichungen, in denen die elektrische Feldkonstante  $\epsilon_0$  vorkommt, diese durch die *Permittivität* (Dielektrizitätskonstante)  $\epsilon$  ersetzt wird:

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad [\epsilon] = [\epsilon_0] = \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}. \quad \text{Permittivität } \epsilon \quad (8.15)$$

Oft wird auch der Begriff elektrische *Suszeptibilität*  $\chi$  verwendet:

$$\chi = \epsilon_r - 1 \quad [\chi] = 1 \quad \text{Suszeptibilität } \chi \quad (8.16)$$

Beispiele für  $\epsilon_r$  einiger Materialien zeigt Tabelle 8.1.

**Tabelle 8.1** Permittivitätszahl  $\epsilon_r$  verschiedener Materialien

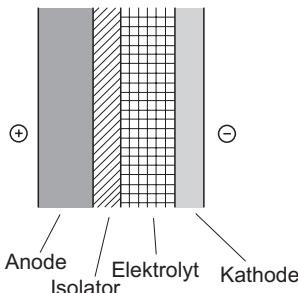
Material	$\epsilon_r$	Material	$\epsilon_r$
Papier	1,2 bis 3	Kondensatorpapier	4 bis 6
Teflon	2,1	Quarzglas	4
Paraffin	2,2	Glas	3 bis 15
Polypropylen	2,2 bis 2,7	$\text{Al}_2\text{O}_3$	12
Polystyrol	2,3 bis 2,8	$\text{Ta}_2\text{O}_5$	27
PVC	3,3 bis 4,6	Wasser	81,6
Polyester	3,3	Keramik (NDK)	10 bis 200
Vinidur	3,4 bis 4,0	Keramik (HDK)	$10^3$ bis $10^4$

### Verschiebungspolarisation

Bringt man Atome in ein elektrisches Feld, verschieben sich der positive Kern und die negative Elektronenhülle. Durch diese induzierten Dipole entsteht die *Verschiebungspolarisation*, die zu relativ kleinen Werten von  $\epsilon_r$  führt.

### Orientierungspolarisation

Größere Werte für  $\epsilon_r$  zeigt Materie mit permanenten Dipolen. Beispiele dafür sind polare Moleküle, wie H<sub>2</sub>O, HCl oder Keramik (Tabelle 8.1). Symmetrische Moleküle wie C<sub>2</sub>O oder CH<sub>4</sub> besitzen kein permanentes Dipolmoment. Normalerweise sind wegen der Temperaturbewegung die Moleküle statistisch in alle Raumrichtungen orientiert. Beim Anlegen eines äußeren elektrischen Feldes entsteht ein Drehmoment, das teilweise eine Ausrichtung der Dipole in Feldrichtung verursacht. Dem wirken thermische Stöße entgegen, so dass die Polarisation stark temperaturabhängig ist.



**Bild 8-4**  
Aufbau eines Elektrolytkondensators

In Elektrolytkondensatoren wird die Orientierungspolarisation mit hohem  $\epsilon_r$  ausgenutzt. Da Elektrolyten leitend sind, wird an der Anode eine Oxidschicht (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> oder Ta<sub>2</sub>O<sub>5</sub>) als Isolator angebracht (Bild 8-4).

**Beispiel 8.1.5** Warum erhöht sich die Kapazität eines Kondensators, wenn man ihn zwischen den Elektroden mit einem Dielektrikum ausstattet?

Durch die Polarisation des Dielektrikums wird ein elektrisches Feld erzeugt, dass dem äußeren Feld entgegengerichtet ist. Damit sinken die Feldstärke und Spannung am Kondensator. Da die Ladung konstant bleibt, steigt nach (8-17) die Kapazität.

### 8.1.6 Kondensator

#### Kapazität

Auf Leitern kann Ladung gespeichert werden. Bei Kondensatoren stehen sich zwei isolierte Flächen gegenüber. Die gespeicherte Ladung  $Q$  und die Spannung  $U$  am Kondensator sind proportional zueinander:

$$Q = CU \quad [C] = \frac{C}{V} = \text{Farad} = F. \quad \text{Kapazität } C \quad (8.17)$$

Die Größe  $C$  stellt die Kapazität mit der Einheit  $[C] = \text{Farad} = F = C/V$  dar. Technisch realisierbare Werte für  $C$  liegen bei mF bis pF.

#### Plattenkondensator

Für einen Kondensator mit der Fläche  $A$  und dem Plattenabstand  $d$  (Bild 8-1c) gilt:

$\sigma = \frac{Q}{A} = \epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{U}{d}$  (8.11) und (8.12). Daraus folgt  $Q = \frac{\epsilon_0 A U}{d}$  und im Vergleich mit (8.19):

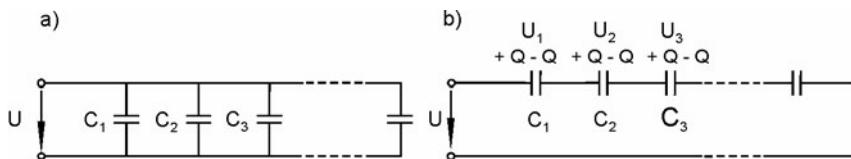
$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{oder} \quad C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}. \quad \text{Kapazität } C \quad (8.18)$$

Befindet sich Materie zwischen den Kondensatorenplatten, muss  $\epsilon_0$  durch  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  ersetzt werden (8.17).

### Parallelschaltung

Bei Parallelschaltung von Kondensatoren nach Bild 8-5 wird die effektive Fläche  $A$  vergrößert. Unter Berücksichtigung von (8.20) gilt für die Kapazität  $C$ :

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad \text{Parallelschaltung} \quad (8.19)$$



**Bild 8-5** Kondensator:  
a) Parallelschaltung.      b) Reihenschaltung

### Reihenschaltung

Anders ist es bei der Reien- oder Serienschaltung. Die einzelnen Spannungen an den Kondensatoren addieren sich:  $U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots = Q/C_1 + Q/C_2 + Q/C_3 + \dots = Q/C$ . Dabei wurde berücksichtigt, dass durch die Influenz die Ladung  $Q$  auf jedem Kondensator gleich ist. Man erhält damit für Reihenschaltung:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad \text{Reihenschaltung} \quad (8.20)$$

### Gespeicherte Energie

Die gespeicherte Energie in einem geladenen Kondensator berechnet man zu  $dW = Fds = QEds = QdU = CUdU$ . Durch Integration erhält man  $W = \int CU dU$  und durch Lösung des Integrals:

$$W = \frac{CU^2}{2} \quad [W] = J = \text{Ws.} \quad \text{Energie im Kondensator} \quad (8.21)$$

Kondensatoren als Energiespeicher sind sehr uneffektiv, so dass sie diese Funktion nur in Sonderfällen erfüllen, z. B. bei Blitzlampen. Sie dienen anderen wichtigen Aufgaben in Wechselstromkreisen.

**Beispiel 8.1.6a** Wie groß ist die Gesamtkapazität, wenn zwei Kapazitäten mit  $4 \mu\text{F}$  und  $2 \mu\text{F}$  a) in Reihe und b) parallel geschaltet werden.

a) (8.20):  $1/C = (1/4 + 1/2) 1/\mu\text{F}$  und  $C = 1,333 \mu\text{F}$ ,      b) (8.19):  $C = (4 + 2) \mu\text{F} = 6 \mu\text{F}$ .

**Beispiel 8.1.6b** Welche Energie liefert ein Kondensator eines Blitzlichtgerätes mit  $600 \mu\text{F}$ , der auf  $550 \text{ V}$  aufgeladen ist?

Nach (8.21) gilt:  $W = CU^2/2 = 6 \cdot 10^{-4} \cdot 550^2/2 \text{ FV}^2 = 90,8 \text{ Ws (oder J)}$ .

**Beispiel 8.1.6c** Ein Kondensator besteht aus zwei Metallfolien von je  $A = 10 \text{ cm}^2$  Fläche, die durch eine isolierende Folie mit  $\epsilon_r = 10$  im Abstand von  $d = 0,3 \text{ mm}$  getrennt sind. Wie groß ist die Kapazität  $C$ ?

Man erhält mit (8.18) und (8.3):  $C = 0,295 \text{ nF}$ .

## 8.1.7 Elektrischer Fluss und Flussdichte

### Elektrischer Fluss $\Psi$

Im elektrostatischen Feld beginnen und enden die Feldlinien auf Ladungen. Den Zusammenhang zwischen Feld und Ladung zeigt der *elektrische Fluss*  $\Psi$ . In einem homogenen Feld  $E$  ist der Fluss durch eine senkrecht zur Feldrichtung stehende Fläche  $A$  gegeben durch (Bild 8-6a):

$$\Psi = \epsilon E A \quad [\Psi] = \text{C.} \quad \text{Elektrischer Fluss } \Psi \quad (8.22a)$$

### Elektrische Flussdichte $\vec{D}$

Dementsprechend gilt für die *Flussdichte*  $D$  (= Fluss  $\Psi$  pro Fläche  $A$ ):

$$D = \frac{\Psi}{A} = \epsilon E \quad [D] = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}. \quad \text{Flussdichte } D \quad (8.22b)$$

$D$  wird auch *elektrische Verschiebungsdichte* genannt. In vektorieller Schreibung gilt:

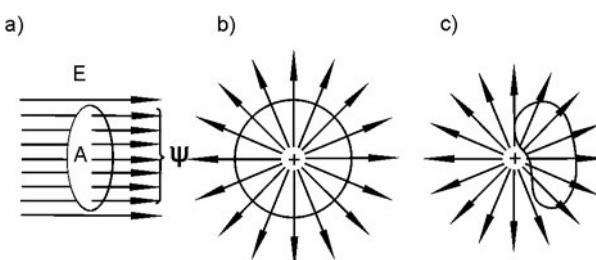
$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}. \quad (8.22c)$$

Man kann am Beispiel einer Punktladung (8.6) zeigen:

$$\Psi = \oint \vec{D} d\vec{A} = \oint \epsilon \vec{E} d\vec{A} = Q. \quad (8.23)$$

Der *elektrische Fluss*  $\Psi$  durch eine geschlossene Fläche, z. B. eine Kugeloberfläche, ist gleich der umschlossenen Ladung  $Q$  (Bild 8-6b und c).

Die Beziehung ist eine der *Maxwell'schen Gleichungen* (Abschnitt 8.3.3).



**Bild 8-6**

- a) Der elektrische Fluss  $Q$  eines homogenen Feldes ist durch  $\Psi = EA$  gegeben.
- b) Der elektrische Fluss einer geschlossenen Oberfläche (z. B. Kugel) ist gleich der eingeschlossenen Ladung.
- c) Der elektrische Fluss ist gleich Null, wenn sich keine Ladung innerhalb der geschlossenen Oberfläche befindet.

## 8.2 Magnetisches Feld

Statische elektrische Felder gehen von positiven und negativen Ladungen aus. Statische Magnetfelder dagegen werden durch elektrische Ströme erzeugt. Dies gilt sowohl für stromdurchflossene Leiter, z. B. in Form einer Spule, als auch für Kreisströme der atomaren Elektronen auf ihren Umlaufbahnen, z. B. in Permanentmagneten.

Es gibt getrennte positive und negative elektrische Pole. Dieses findet bei Magnetfeldern kein Analogon: eine magnetische Ladung, Monopol genannt, existiert nicht. Die magnetischen Pole treten immer paarweise auf. Man nennt die Gebilde, die aus einem Nord- und Südpol bestehen, *magnetische Dipole*.

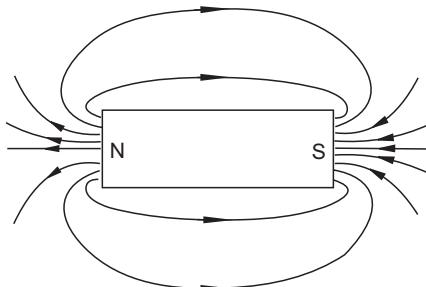
### 8.2.1 Magnetische Feldstärke

#### Magnetische Dipole

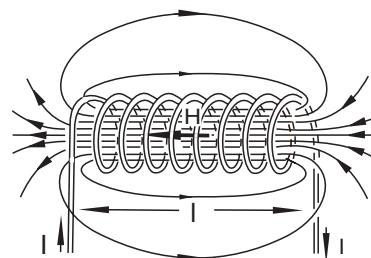
Bild 8-7a zeigt den Dipol eines Permanentmagneten mit Nord- und Südpol. Der Magnetismus entsteht durch atomare magnetische Dipole, die sich zu einem makroskopischen Dipol, dem Magneten, zusammensetzen. Bild 8-7b zeigt, dass eine stromdurchflossene Spule auch einen magnetischen Dipol bildet. Sie hat ähnliche Eigenschaften wie ein Permanentmagnet. Für die Pole eines Dipols gilt:

*Gleichnamige Pole stoßen sich ab, ungleichnamige Pole ziehen sich an.*

a)



b)

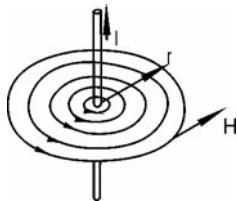


**Bild 8-7** a) Magnetisches Feld eines Permanentmagneten.  
b) Magnetfeld einer stromdurchflossenen Zylinderspule

Ein Magnet hat die Tendenz, sich auf der Erde in Nord-Süd-Richtung auszurichten. Dabei zeigt der Nordpol des Magneten nach Norden. An dem geographischen Nordpol der Erde liegt also ein magnetischer Südpol, der den magnetischen Nordpol des Magneten anzieht.

Magnete üben eine Fernwirkung aus. Dies wird dadurch erklärt, dass die Eigenschaften des Raumes verändert werden. Um den Magneten breiten sich magnetische Feldlinien aus, die durch Definition von Nord nach Süd verlaufen (Bild 8-7). Im magnetischen Feld entsteht eine Kraft, die einen anderen Magnet in Richtung des Feldes dreht. Für die magnetischen Feldlinien gilt:

*Die Richtung der magnetischen Feldlinien hat man außerhalb des Magneten von Nord nach Süd festgelegt.*

**Bild 8-8**

Die magnetische Feldstärke  $H$  um einen mit dem Strom  $I$  durchflossenen Leiter beträgt:  $I = 2\pi rH$

### Magnetische Feldstärke $H$

Um einen stromdurchflossenen geradlinigen Leiter bilden sich kreisförmige magnetische Feldlinien aus Bild 8-8. Die Dichte der Feldlinien ist ein Maß für die magnetische Feldstärke. Die magnetische Feldstärke ist ein Vektor  $\vec{H}$ . Die Richtung wird durch die ausrichtende Kraft auf einen kleinen magnetischen Dipol gegeben: er stellt sich parallel zum Feld ein. Man kann das Feld durch einen Versuch sichtbar machen. Ein Draht wird durch die Bohrung einer isolierenden Platte geführt, die mit feinen Eisenspänen (kleine magnetische Dipole) bestreut wird. Schaltet man den Draht an eine Autobatterie an, so fließt ein starker Strom. Die Eisenspäne ordnen sich bei leichtem Klopfen zur Überwindung der Reibung zu konzentrischen Kreisen an.

Für die magnetischen Feldlinien um einen geraden Leiter gilt die Regel der rechten Hand:  
*Zeigt der Daumen in Stromrichtung, so weisen die gekrümmten Finger in Feldrichtung.*

Der Betrag der *magnetischen Feldstärke  $H$*  um einen geradlinigen Leiter ist proportional zum elektrischen Strom  $I$ , der durch den Leiter fließt. Er nimmt mit dem Abstand  $r$  vom Leiter ab (Bild 8-8).

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad \text{oder} \quad I = 2\pi rH \quad [H] = \frac{\text{A}}{\text{m}}. \quad \text{Magnetische Feldstärke } H \quad (8.24a)$$

Die Einheit der magnetischen Feldstärke  $H$  beträgt  $[H] = \text{A/m}$ . (8.24a) ist ein Spezialfall des *Durchflutungsgesetzes* (8.24c).

### Zylinderspule

Das äußere magnetische Feld einer langen Zylinderspule ähnelt dem eines Stabmagneten. Im Innern der Spule ist das Feld homogen (Bild 8-7b). Die magnetische Feldstärke im Innern der Spule  $H$  wird durch die Zahl der Windungen  $N$ , die Länge der Spule  $l$  und den Strom  $I$  gegeben. Aus dem Durchflutungsgesetz (8.24c) kann man näherungsweise ableiten:

$$H = \frac{NI}{l}. \quad \text{Zylinderspule} \quad (8.24b)$$

Die Richtung der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  kann nach der Regel der rechten Hand ermittelt werden:

*Zeigen die Finger der gekrümmten rechten Hand in Stromrichtung, so weist der Daumen in Richtung der Feldlinien (und zum Nordpol der Spule (Bild 8.7b).*

### Durchflutungsgesetz

Integriert man die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  längs einer geschlossenen Kurve mit den Wegelementen  $d\vec{s}$ , erhält man den eingeschlossenen Strom  $I$  (Bild 8-8):

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = I.$$

Durchflutungsgesetz

(8.24c)

Beweis: Für das kreisförmige Feld um einen Leiter ist bei konstantem Radius  $r$  auch das Feld konstant  $H = |\vec{H}|$  konstant und es gilt  $\oint \vec{H} d\vec{s} = H 2\pi r = I$  (8.24a). Damit ist (8.24b) bewiesen.

**Beispiel 8.2.1** Das Erdmagnetfeld beträgt  $H = 20 \text{ A/m}$ . Es ist eine Spule zu berechnen, die bei einem Strom von 50 mA das gleiche Magnetfeld erzeugt.

Es gilt  $H = \frac{N \cdot I}{l}$ . Damit beträgt die Windungszahl pro Meter:  $N/I = H/I = 400 \text{ 1/m}$

## 8.2.2 Magnetische Flussdichte und Fluss

Die magnetische Feldstärke  $H$  beschreibt die Wirkung des Feldes auf Magneten. In der Praxis wichtiger sind die Kräfte, die Magnettfelder auf bewegte Ladungen ausüben, z. B. die Lorentz-Kraft (Abschnitt 8.2.3) oder das Induktionsgesetz (Abschnitt 8.3.1). Zur Beschreibung dieser Vorgänge wird neben der *magnetischen Feldstärke*  $H$  noch die *magnetische Flussdichte*  $B$  eingeführt.

### Magnetische Flussdichte $B$

Im Folgenden werden die magnetische Flussdichte und der Fluss formal eingeführt. Eine genauere Begründung wird erst in den folgenden Abschnitten gegeben. Die magnetische *Flussdichte*  $B$  ist proportional zu magnetischen Feldstärke  $H$  und einer neuen Größe, der Permeabilität  $\mu$ :

$$B = \mu H \quad [B] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{Tesla} = \text{T}.$$

Flussdichte  $B$ 

(8.25)

Die Einheit der magnetischen Flussdichte  $B$  beträgt:  $[B] \models \text{Tesla} = \text{T} = \text{Vs/m}^2$ . Die magnetische Flussdichte ist ein Vektor ( $B = |\vec{B}|$ ), der in Richtung der Feldlinien zeigt. Man spricht auch von Flusslinien.

*Die magnetische Feldstärke*  $H$  beschreibt die Wirkung auf einen magnetischen Dipol. Dagegen ist die magnetische Flussdichte, auch *magnetische Induktion* genannt, für die Kräfte auf bewegte Ladungen verantwortlich.

Die Permeabilität  $\mu$  setzt sich aus der magnetischen Feldkonstanten  $\mu_0$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}.$$

Magnetische Feldkonstante  $\mu_0$ 

(8.26a)

und der *Permeabilitätszahl*  $\mu_r$ , die eine Materialgröße ist, zusammen:

$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad [\mu] = \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad \text{und} \quad [\mu_r] = 1.$$

Permeabilität  $\mu$ 

(8.26b)

Bringt man Materie in ein Magnetfeld verändert sich die Flussdichte  $B$ . Für magnetische Materialien wird  $B$  größer. Die Permeabilitätszahl  $\mu_r$  beschreibt die Veränderung der Flussdichte  $B$  durch Materie. Für Vakuum (oder Luft) gilt  $\mu_r = 1$ . Werte für  $\mu_r$  kann für verschiedene Materialien Tabelle 8.2 entnommen werden (Abschnitt 8.2.4).  $\mu_0$  ist eine wichtige Naturkonstante.

**Tabelle 8.2** Magnetische Suszeptibilität  $\chi_m = \mu_r - 1$  verschiedener Werkstoffe

Ferromagnetika $\mu_r \gg 1, \chi_m \gg 1$		Paramagnetika $\mu_r > 1, \chi_m \neq 0$		Diamagnetika $\mu_r \ll 1, \chi_m \neq 0$	
Stoff	$\chi_m^*$	Stoff	$\chi_m$	Stoff	$\chi_m$
Mu-Metall	bis $9 \cdot 10^4$	O <sub>2</sub> (flüssig)	$3,6 \cdot 10^{-3}$	Bi	$-1,6 \cdot 10^{-4}$
Eisen (rein)	$10^4$	Cr	$2,8 \cdot 10^{-4}$	Cu	$-1 \cdot 10^{-5}$
Fe-Si	$6 \cdot 10^3$	Pt	$2,5 \cdot 10^{-4}$	H <sub>2</sub> O	$-9 \cdot 10^{-6}$
Ferrite (weich)	$10^3$	Al	$2,4 \cdot 10^{-5}$	C <sub>02</sub>	$-1,2 \cdot 10^{-8}$
Übertragerblech	500..... $10^4$	O <sub>2</sub> (Gas)	$1,5 \cdot 10^{-6}$	H <sub>2</sub>	$-2,2 \cdot 10^{-9}$

\*Maximalwerte an der größten Steigung der Hysteresekurve

### Magnetischer Fluss $\Phi$

Multipliziert man die magnetische Flussdichte  $B$  mit einer Fläche  $A$ , die senkrecht zu den Flusslinien steht, erhält man den magnetischen Fluss  $\Phi$ :

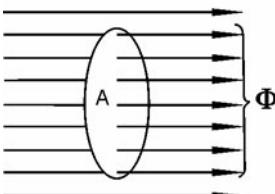
$$\Phi = BA = \mu HA \quad [\Phi] = \text{Vs} = \text{Weber} = \text{Wb.} \quad \text{Fluss } \Phi \quad (8.27a)$$

Die Einheit des magnetischen Fluxes  $\Phi$  lautet:  $[\Phi] = \text{Vs} = \text{Weber} = \text{Wb}$ . Der magnetische Fluss  $\Phi$  hat beispielsweise beim Induktionsgesetz (8.35a) Bedeutung.

Ist die Flussdichte über die Fläche  $A$  nicht konstant und steht die Flächennormale  $\vec{A}$  nicht parallel zu den Flusslinien, kann (8.27a) erweitert werden:

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{A}. \quad \text{Fluss } \Phi \quad (8.27b)$$

$$B = \mu H$$

**Bild 8-9**

Der magnetische Fluss  $\Phi$  in einem homogenen Feld ist gegeben durch  $\Phi = \mu HA$

Dabei stellt  $d\vec{A}$  den Vektor der Normalen des Flächenelementes  $dA$  dar und  $\vec{B}$  den Vektor der Flussdichte.

**Beispiel 8.2.2a** Wie groß ist die Flussdichte  $B$  in Eisen ( $\mu_r = 3000$ ), das sich in einem Magnetfeld von  $H = 600 \text{ A/m}$  befindet.

Nach (8.25) und (8.26) gilt:  $B = \mu_0 \mu_r H = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3000 \cdot 600 \text{ VsA/(Am}^2\text{)} = 2,26 \text{ Vs/m}^2 = 2,26 \text{ T}$ .

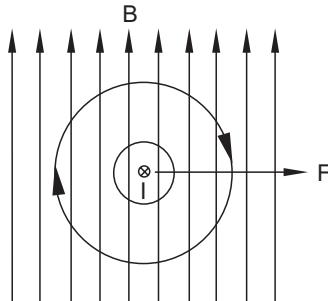
**Beispiel 8.2.2b** Welcher Strom fließt durch eine eisenfreie Zylinderspule mit  $N = 450$  Windungen,  $d = 2 \text{ cm}$  Durchmesser und  $l = 12 \text{ cm}$  Länge, die im Innern einen Fluss von  $2 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}$  erzeugt?

Nach (8.27a) gilt:  $B = \Phi / A = 2 \cdot 10^{-6} / (\pi 10^{-4}) \text{ Wb/m}^2 = 6,37 \cdot 10^{-3} \text{ Vs/m}^2$ .

Daraus folgt:  $H = B / \mu_0 = 5069 \text{ A/m}$  und  $I = Hl / N = 1,35 \text{ A}$ .

### 8.2.3 Kräfte im Magnetfeld

Statische Magnetfelder üben Kräfte nur auf bewegte Ladungen aus, nicht auf ruhende. Man beobachtet diesen Effekt an Elektronen- oder Ionenstrahlen und an elektrischen Strömen in Leitern. Die Kräfte sind von der magnetischen Flussdichte  $B$  abhängig.



**Bild 8-10**  
Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld (Lorentz-Kraft)

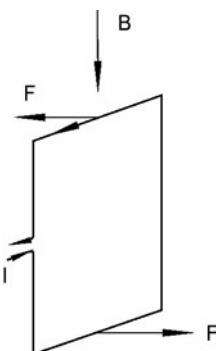
### Leiter im Magnetfeld

Ein Leiter steht senkrecht zu den Feldlinien zwischen den Polen eines Magneten. Fließt Strom durch den Leiter bildet sich ein kreisförmiges Feld um den Leiter aus. In Bild (8-10) findet links vom Leiter der Länge  $l$  eine Verstärkung der Feldlinien statt, rechts eine Schwächung. Anschaulich kann das so interpretiert werden, dass die verengten bzw. verstärkten Feldlinien den Leiter nach rechts drücken. Es zeigt sich, dass die Kraft  $F$  proportional zur magnetischen Flussdichte  $B$  ist. Die Kraft steht senkrecht zum Magnetfeld und zur Stromrichtung:

$$F = IlB.$$

Kraft  $F$  im Magnetfeld (8.28)

Die Richtung der Kraft  $F$  kann durch folgende Regel ermittelt werden: Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand zeigen in Form eines x-y-z-Systems in Richtung von Strom  $I$ , Flussdichte  $B$  und Kraft  $F$ .



**Bild 8-11**  
Prinzip des Elektromotors: auf eine stromdurchflossene Schlaufe wirkt ein Drehmoment

### Elektromotor

Der Elektromotor oder auch das Drehspulinstrument beruhen auf dem Verhalten einer Leiterschlaufe im Magnetfeld. Nach Bild 8-11 verursachen die Kräfte an den beiden Seiten der Schlaufe ein Drehmoment, das zu einer Rotationsbewegung führt. Beim Elektromotor wird statt einer Schlaufe eine gewickelte Spule eingesetzt, aber das Funktionsprinzip ist das gleiche.

## Parallele Leiter

Zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern treten Kräfte auf, die auf einer Wechselwirkung zwischen den Strömen und den erzeugten Magnetfeldern beruhen. Da das Ampere durch die Kraft  $F$  zwischen parallelen Leitern definiert ist, wird folgende Gleichung angegeben:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l. \quad \text{Kraft } F \text{ zwischen Leitern} \quad (8.29)$$

Die Leiter der Länge  $l$  werden durch die Ströme  $I_1$  und  $I_2$  durchflossen und befinden sich im Abstand  $d$  voneinander. Die Beziehung (8.29) kann durch Anwendung von (8.24a) und (8.28) bewiesen werden.

## Lorentz-Kraft

Aus der Kraft auf stromdurchflossene Leiter  $F = IIB$  (8.28) kann die Wirkung auf eine bewegte Ladung  $Q$  abgeleitet werden. Da  $I = Q/t$  und die Geschwindigkeit  $v$  der Ladung  $v = l/t$  ist, erhält man für die so genannte *Lorentz-Kraft*  $F$ :

$F = QvB.$	$\text{Lorentz-Kraft } F$	<b>(8.30a)</b>
------------	---------------------------	----------------

Für (8.30a) gelten ähnliche Voraussetzungen wie für (8.28). Die Geschwindigkeit  $v$  muss senkrecht zur Flussdichte  $B$  stehen. Die Kraft  $F$  wirkt senkrecht zu  $v$  und  $B$ .

Lässt man beliebige Richtungen der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  zu, gilt folgende Vektorgleichung:

$$\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{Lorentz-Kraft } \vec{F} \quad (8.30b)$$

*Die Richtung der Kraft  $\vec{F}$  kann durch folgende Regel ermittelt werden: Daumen und Zeigefinger zeigen in Richtung der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und Flussdichte  $\vec{B}$ . Dann zeigt der Mittelfinger senkrecht zu  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$  in Richtung der Kraft  $\vec{F}$ .*

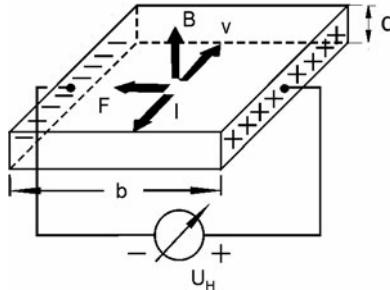
## Prinzip des Stromgenerators

Mit Hilfe der Lorentz-Kraft ist es möglich, den Stromgenerator zu erklären. Im Generator werden Leiterschläufen senkrecht durch ein Magnetfeld bewegt. Die Leitungselektronen werden dabei mit bewegt. Auf die so bewegten Elektronen wirkt die Lorentz-Kraft. Man kann sich anhand der Dreifingerregel überlegen, dass die Kraft in Richtung des Leiters steht. Dadurch wird ein Strom erzeugt. Dies ist das Prinzip der Stromerzeugung in den Elektrizitätswerken. Eine andere gleichwertige Erklärung geht vom Induktionsgesetz aus (Abschnitt 8.3.1).

## Hall-Effekt

Durch die Lorentz-Kraft tritt an einem stromführenden Band der Breite  $b$  und Dicke  $d$  im Magnetfeld die *Hall-Spannung* auf. Nach Bild 8-12 wirkt auf die Elektronen mit der Ladung  $Q = -e$  im Leiter eine Kraft (8.30a) senkrecht zur Elektronengeschwindigkeit  $v$  und zur Flussdichte  $B$ :  $F = -evB$ . Dabei wird vorausgesetzt, dass das Band senkrecht zur Flussdichte  $B$  steht. Durch die Kraft werden die Elektronen an eine Bandkante verschoben. Dadurch baut sich ein elektrisches Feld  $E = U_H / b$  quer zum Strom  $I$  auf. Auf die Elektronen wirkt damit eine Gegenkraft  $F = -eE = -eU_H / b$ . Gleichsetzen der Kräfte ergibt:

$$\frac{U_H}{b} = vB \quad \text{oder} \quad U_H = vBb.$$

**Bild 8-12**

In einem stromdurchflossenen Band entsteht durch ein Magnetfeld die Hall-Spannung quer zum Strom

Die Hall-Spannung  $U_H$  wird quer zum Strom gemessen (Bild 8-12). Man kann den Strom  $I$  durch die Geschwindigkeit  $v$ , Elementarladung  $e$ , Elektronendichte  $n$  und Querschnittsfläche  $bd$  ausdrücken:

$$I = nevbd \quad \text{oder} \quad v = \frac{I}{nebd} \quad \text{mit } e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

Man erhält für die *Hall-Spannung*  $U_H$ :

$$U_H = \frac{IB}{ned} = \frac{A_H IB}{d} \quad \text{mit } A_H = \frac{1}{ne}. \quad \text{Hall-Spannung } U_H \quad (8.31)$$

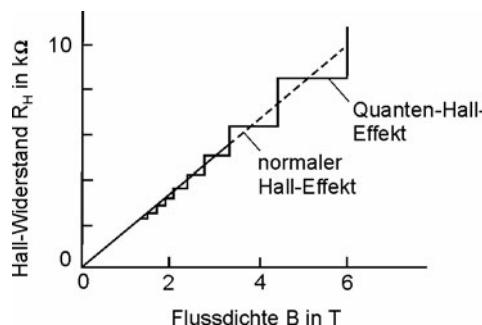
Der Hall-Effekt wird einerseits zur Messung der Flussdichte  $B$  andererseits aber auch zur Bestimmung des Hall-Koeffizienten  $A_H = 1/(ne)$  ausgenutzt. Aus  $A_H$  erhält man bei Halbleitern das Vorzeichen der Ladungsträger (Elektronen oder positive Löcher) und deren Dichte  $n$ .

### Quanten-Hall-Effekt

In sehr dünnen Schichten (5 bis 10 nm) ist der Hall-Widerstand  $R_H = U_H / I$  quantisiert und ist ein ganzzahliger Bruchteil des elementaren Quanten-Hall-Widerstandes  $h/e^2$  ( $h$  ist das Planck'sche Wirkungsquantum):

$$R_H = \frac{A_H B}{d} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{m} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{mit } \frac{h}{e^2} = 2581,8 \Omega.$$

Die Messung des stufenförmigen Anstiegs des Hall-Widerstandes in zweidimensionalen Strukturen dient zur Festlegung des Widerstandsnormals (Bild 8-13).

**Bild 8-13**

Quanten-Hall-Effekt in einem sehr dünnen Leiter (zweidimensionales Elektronengas)

**Beispiel 8.2.3a** Ein mit  $I = 10 \text{ A}$  durchflossener Leiter befindet sich im rechten Winkel zum Magnetfeld mit einer Flussdichte von  $B = 500 \text{ mT}$ . Wie groß ist die Kraft auf ein  $4 \text{ cm}$  langes Leiterstück?

Nach (8.28) gilt:  $F = IIB = 10 \cdot 0,5 \cdot 0,04 \text{ ATm} = 0,2 \text{ AmVs/m}^2 = 0,2 \text{ N}$ .

**Beispiel 8.2.3b** Ein Elektronenstrahl wird senkrecht zu den Feldlinien eines Magnetfeldes eingeschossen. Wie wird der Strahl abgelenkt?

Der Elektronenstrahl wird nach (8.30b) stets senkrecht zu seiner Geschwindigkeit und senkrecht zum Magnetfeld abgelenkt. Damit ergibt sich eine spiralförmige Bahn im Magnetfeld.

**Beispiel 8.2.3c** Wozu dient in der Praxis die Messung der Hall-Spannung?

Die Hall-Spannung hängt von der magnetischen Flussdichte ab, die somit gemessen werden kann. Weiterhin hängt die Hall-Spannung von der Dichte der Ladungsträger (Elektronen, positive Löcher) ab, die dadurch experimentell bestimmt werden kann.

## 8.2.4 Polarisation und Magnetisierung

Bringt man Materie in ein Magnetfeld, ordnen oder bilden sich magnetische Dipole: die Materie wird magnetisiert. Dadurch erhöht sich die Flussdichte von  $B_0$  auf  $B$ . Dieses wird durch Einführung der Permeabilitätszahl  $\mu_r$  berücksichtigt (8.26):

$$B = \mu_r B_0 = \mu_r \mu_0 H_0 \quad [B] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{Tesla} = \text{T} . \quad \text{Flussdichte } B \quad (8.32)$$

$H_0$  und  $B_0$  beziehen sich auf das Feld ohne Materie. Für die magnetische Feldkonstante  $\mu_0$  gilt:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} . \quad \text{Magnetische Feldkonstante } \mu_0 \quad (8.26a)$$

### Magnetische Polarisation $J$

Die in der Materie zusätzlich entstandene Flussdichte  $B - B_0$  wird als *magnetische Polarisation*  $J$  bezeichnet:

$$J = B - B_0 \quad [J] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{Tesla} = \text{T} . \quad \text{Polarisation } J \quad (8.33a)$$

Mit  $B = \mu_r B_0$  resultiert für die magnetische Polarisation  $J$ :

$$J = (\mu_r - 1)B_0 = (\mu_r - 1)\mu_0 H_0 \quad \text{oder} \quad J = \chi_m B_0 = \chi_m \mu_0 H_0 \quad (8.33b)$$

Die Größe  $\chi_m$

$$\chi_m = (\mu_r - 1) \quad \text{Suszeptibilität } \chi_m \quad (8.33c)$$

ist die *magnetische Suszeptibilität*. Sie gibt das Verhältnis von Polarisation  $J$  und Flussdichte  $B_0$  an.

### Magnetisierung

Während die Polarisation  $J$  die Zunahme der Induktion  $B_0$  beschreibt, gibt die *Magnetisierung*  $M$  die Erhöhung der magnetischen Feldstärke  $H_0$  an:

$$M = H - H_0 \quad \text{oder} \quad M = (\mu_r - 1)H_0 = \chi_m H_0 . \quad \text{Magnetisierung } M \quad (8.34)$$

Die Magnetisierung  $M$  ist bei vielen Stoffen proportional zur Feldstärke  $H_0$ , d. h. die Suszeptibilität  $\chi_m$  ist eine Konstante. Ausgenommen davon sind nichtlineare magnetische Materialien, wie Ferromagnetika. Gemäß Tabelle 8.2 kann man Materie einordnen in: *diamagnetisch* ( $\mu_r \triangleleft 1$ ), *paramagnetisch* ( $\mu_r > 1$ ) und *ferro-, ferri- oder antiferromagnetisch* ( $\mu_r \gg 1$ ).

**Beispiel 8.2.4** Was versteht man unter der *magnetischen Polarisation* und der *Magnetisierung*?

Durch das Ausrichten (oder der Bildung) von magnetischen Dipolen in einem äußeren Magnetfeld erhöhen sich die magnetische Flussdichte und das Magnetfeld. *Die Erhöhung der Flussdichte nennt man magnetische Polarisation. Die Erhöhung der magnetischen Feldstärke wird Magnetisierung genannt.*

## 8.2.5 Materie im Magnetfeld

### Atomarer Magnetismus

Das magnetische Verhalten von Materie wird durch die atomaren Elektronen geprägt. Die Elektronen stellen Kreisströme um den Atomkern dar. Durch diese Bewegung entsteht ein magnetischer Dipol. Größere Wirkungen als dieser *Bahnmagnetismus* rufen die magnetischen Eigendipole der Elektronen hervor. In klassischer Vorstellung beruht der Magnetismus der Elektronen (oder auch anderer Elementarteilchen) auf einer Eigenrotation (Spin), die auch die Wirkung eines Kreisstromes hat. Man spricht daher von *Spinmagnetismus*.

### Diagnagnetismus

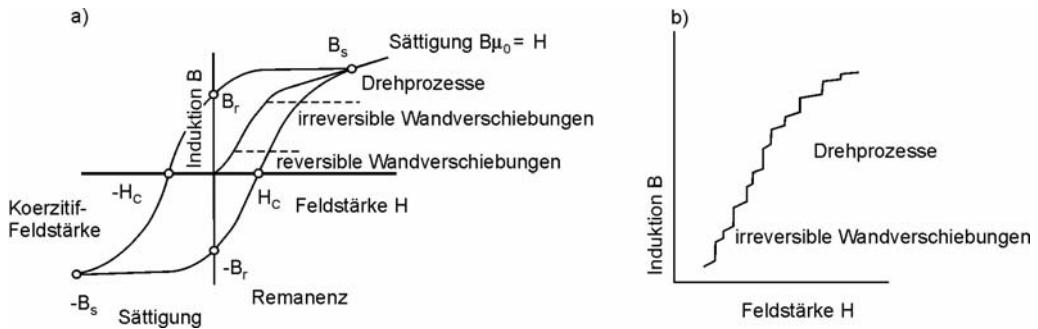
Bringt man Atome in ein Magnetfeld, werden in den Elektronenschalen zusätzliche Kreisströme induziert (Induktionsgesetz in Abschnitt 8.3.1). Nach der Lenz'schen Regel erzeugen die induzierten Kreisströme ein Magnetfeld, das entgegengesetzt zum äußeren Feld steht. Da das äußere Feld dadurch geschwächt wird, ist  $\mu_r \triangleleft 1$  und  $\chi_m = \mu_r - 1 \triangleleft 0$ . Dieser so genannte *Diamagnetismus* verschwindet wieder, wenn das äußere Feld abgeschaltet wird. Der Diamagnetismus ist sehr klein  $|\chi_m| < 10^{-4}$ . Er wird daher nur beobachtet, wenn die Atome unmagnetisch sind. Dies ist bei Systemen mit abgeschlossenen Schalen der Fall, bei denen sich die Elektronen zu null kompensieren. Beispiele sind Ag, Au, Bi, Cu, H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> (Tabelle 8.2).

### Paramagnetismus

In unaufgefüllten atomaren Schalen kompensieren sich die Spins der Elektronen nicht vollständig, so dass die Atome magnetische Dipole besitzen. Normalerweise zeigen diese statistisch verteilt in alle Richtungen. Durch Anlegen eines äußeren Feldes erfolgt eine Ausrichtung, der jedoch die thermische Bewegung entgegen wirkt. Die Suszeptibilität  $\chi_m$  fällt nach dem Curie'schen Gesetz mit der Temperatur  $T$ :

$$\chi_m \sim \frac{C}{T}, \quad \text{Curie'sches Gesetz}$$

wobei der Faktor  $C$  stoffabhängig ist. Auch der Paramagnetismus mit  $\chi_m < 10^{-2}$  ist sehr klein, wie es sich am Beispiel von Sn, Pt, W, Al, O<sub>2</sub> zeigt (Tabelle 8.2).

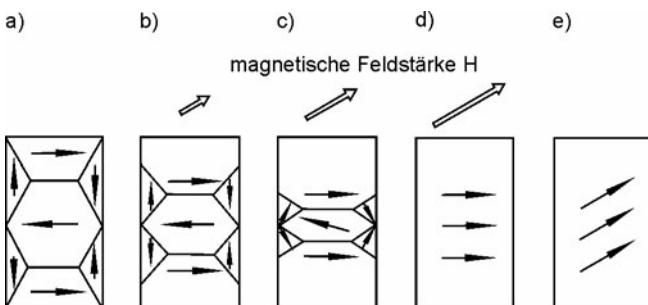


**Bild 8-14** Magnetisierungskurve: a) Darstellung der Hysteresekurve.  
b) Feinstruktur von a) (Barkhausen-Sprünge)

### Ferromagnetismus

Insbesondere in den Übergangsmetallen, Fe, Ni, Co, Gd, Er, existieren in inneren unaufgefüllten Schalen parallele, nicht gesättigte Elektronenspins, die zu einem hohen atomaren Magnetismus führen. Durch die Wechselwirkung zwischen den Atomen bilden sich Kristallbereiche mit gleichgerichteter Magnetisierung, so genannte *Weiß'sche Bezirke* mit einer Ausdehnung von 1 bis 100 µm. Im unmagnetischen Zustand ist die Magnetisierung einzelner Weiß'scher Bezirke so verteilt, dass sie sich makroskopisch zu null kompensieren.

Durch Anlegen eines äußeren Feldes  $H$  wird vom unmagnetischen Zustand ausgehend zunächst die *Neukurve* durchlaufen (Bild 8-14a). Dabei wachsen die Weiß'schen Bezirke mit paralleler Orientierung zum Feld durch reversible Verschiebung der Grenzen, den *Bloch-Wänden* (Bild 8-15). Bei höheren Feldstärken  $H$  bleiben die Blochwände teilweise an Fehlstellen im Kristall hängen und reißen sich dann los, so dass es zu irreversiblen Wandverschiebungen kommt. Ist keine weitere Magnetisierung durch diesen Prozess mehr möglich, kommt es bei weiterer Steigung des angelegten Feldes zur Drehung der Magnetisierung Weiß'scher Bezirke. In der Sättigung sind alle Domänen parallel ausgerichtet. Bei sehr präziser Messung der Magnetisierungskurve nach Bild 8-14b stellt man in Übereinstimmung mit dem aufgezeigten Modell fest, dass kleine so genannte Barkhausen-Sprünge auftreten.



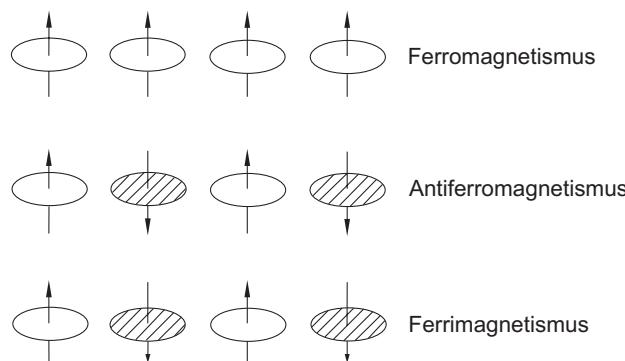
**Bild 8-15** Symbolische Darstellung Weiß'scher Bezirke bei Magnetisierung ferromagnetischer Materialien: a) Unmagnetisiert, b) Wachsen der Bereiche mit Komponenten in Feldrichtung, c) Weitere Wandverschiebung und Drehungen, d) Magnetisierung in Richtung von Kristallachsen, e) Sättigung durch Drehung in Feldrichtung

Verringert man von der Sättigung aus das äußere Feld bis auf Null, so bleibt eine Magnetisierung, die *Remanenz*  $M_r$ , bestehen (Bild 8-14). Durch Umpolen des Feldes und Anlegen der *Koerzitivfeldstärke*  $H$  kann die Magnetisierung auf Null gebracht werden. Bei weiterer Variation des äußeren Feldes wird die gesamte Magnetisierungskurve nach Bild 8-14 durchfahren; man nennt sie *Hysteresekurve*. Das Prinzip der magnetischen Informationsspeicherung beruht auf der Remanenz, die je nach Vorgeschichte + oder  $-M_r$ , der logischen Null und Eins, sein kann. Auch Permanentmagnete beruhen auf der Remanenz.

Für Temperaturen oberhalb der Curie-Temperatur  $T_C$  wird der Ferromagnetismus durch den Einfluss der Wärmebewegung zerstört.

### Antiferromagnetismus

Bei Antiferromagnetika liegen zwei gleiche ferromagnetische Untergitter vor, deren Magnetisierung antiparallel steht (Bild 8-16). Die *Suszeptibilität* ist daher klein. Der antiferromagnetische Effekt verschwindet oberhalb der Néel-Temperatur. Beispiele sind  $\text{MnO}$ ,  $\text{FeO}$ ,  $\text{NiO}$ ,  $\text{CoO}$ ,  $\text{CrF}_3$ .



**Bild 8-16**

Darstellung von Ferro-, Antiferro- und Ferrimagnetismus

### Ferrimagnetismus

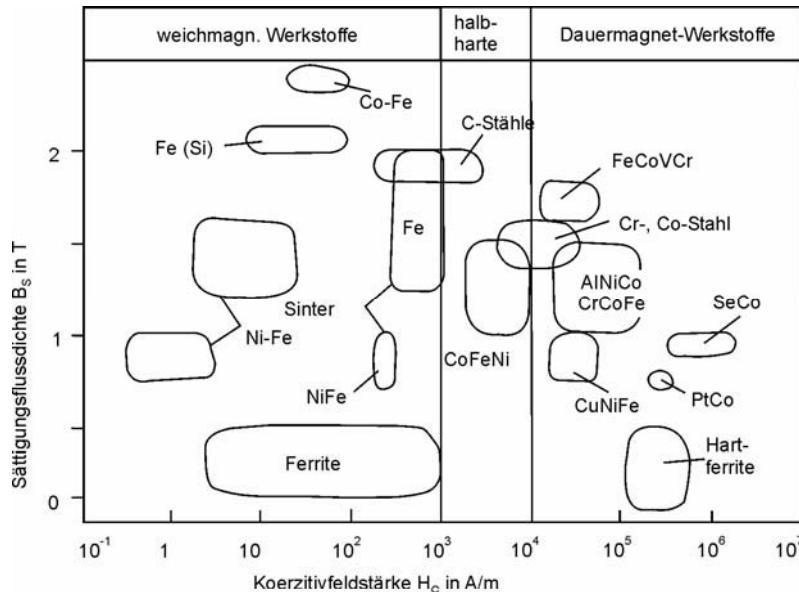
Sind die magnetischen Dipole der antiparallelen Untergitter verschieden groß, so bleibt eine resultierende Magnetisierung vorhanden (Bild 8-16). Ferrimagnetika oder *Ferrite* ähneln im Verhalten teils ferromagnetischen Materialien mit ihrer Hysteresekurve und teils antiferromagnetischen. Beispiele sind  $\text{MeOFe}_2\text{O}_3$ : für Me können die Metalle Mn, Co, Ni, Cu, Mg, Zn, Cd oder Fe stehen. Im Vergleich zu ferromagnetischen Metallen weisen sie einen hohen spezifischen Widerstand auf (zwischen 1 und 0,001  $\Omega \text{ m}$ ), so dass auch bei Anwendung hoher Frequenzen nur geringe Wirbelströme fließen.

### Magnetostriktion

Durch die Verschiebung der Bloch-Wände im äußeren Magnetfeld kann eine Längen- und Dickenänderung auftreten. Bei Eisen führt die Magnetostriktion zu einer Verlängerung in Richtung des Feldes, in Nickel zu einer Verkürzung. In der Praxis erreicht man Längenänderungen im 10- $\mu\text{m}$ -Bereich. Magnetostriktive Materialien dienen zur Erzeugung von Ultraschall bei Anregung mit Wechselfeldern um 60 kHz.

### Magnetische Werkstoffe

Werkstoffe können in magnetisch weiche, halbharte und harte Materialien eingeteilt werden, je nachdem wie groß die Koerzitivfeldstärke ist (Bild 8-17). Magnetisch weiche Werkstoffe mit  $H_C < 4000 \text{ A/m}$  besitzen eine schmale Hysteresekurve, deren Fläche ein Maß für die Verluste bei Unmagnetisierung ist. Dauermagnete sind magnetisch hart mit  $H_C > 10\,000 \text{ A/m}$ .



**Bild 8-17**  
Daten magnetischer Werkstoffe

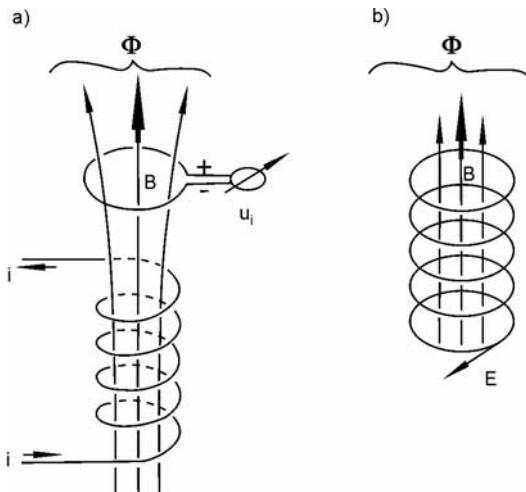
#### Beispiel 8.2.5 Wodurch wird der Ferromagnetismus verursacht?

In ferromagnetischen Materialien (z. B. Eisen) befinden sich kleine Bereiche (Weiß'sche Bezirke), in denen die Elektronenspins der äußeren atomaren Schalen parallel liegen. Diese Bereiche sind im nicht magnetisierten Zustand statistisch orientiert. Beim Anlegen eines äußeren Magnetfeldes werden diese Bereiche zunehmend in Richtung des Magnetfeldes gedreht. Damit steigt die Magnetisierung der Materie an, bis in der Sättigung alle Spins parallel liegen.

### 8.3 Elektromagnetische Wechselfelder

Im statischen Fall können elektrische und magnetische Felder für sich allein auftreten. Bei zeitlich veränderlichen Feldern jedoch sind elektrische und magnetische Feldlinien miteinander gekoppelt.

*In diesem Kapitel werden zeitlich konstante Größen mit großen Buchstaben und zeitabhängige mit kleinen geschrieben.*



**Bild 8-18**  
Induktionsgesetz:

- Durch veränderliche Magnetfelder wird eine Spannung in einer Leiterschleife induziert.
- Erzeugung eines elektrischen Feldes durch ein veränderliches Magnetfeld

### 8.3.1 Veränderliche Magnetfelder: Induktion

Die *elektromagnetische Induktion* ist das Prinzip für die Funktion von Elektromotoren, Transformatoren und anderen Baugruppen der Elektrotechnik und Elektronik.

#### Induktionsgesetz

Durch ein zeitlich veränderliches Magnetfeld wird in einer Leiterschleife eine Spannung  $u_i$  induziert (Bild 8-18a). Es gilt das *Induktionsgesetz*:

$$u_i = -N \frac{d\Phi}{dt} . \quad \text{Induzierte Spannung } u_i \quad (8.35a)$$

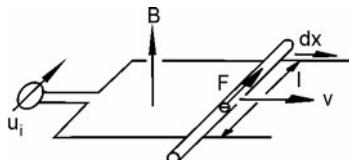
Eine induzierte Spannung  $u_i$  tritt nur bei Veränderungen des magnetischen Flusses  $\Phi = BA$  auf, wobei  $B$  die Flussdichte oder Induktion und  $A$  die vom Feld durchströmte Fläche der Leiterschleife senkrecht zu den Feldlinien ist. Die Schleife hat  $N$  Windungen. Das Minuszeichen wird durch die *Lenz'sche Regel* erklärt:

Die induzierte Spannung  $u_i$  wirkt der Ursache entgegen.

Dies bedeutet, dass beim Fliessen eines Stromes, verursacht durch  $u_i$ , das entstehende Feld das äußere Feld schwächt.

Ein veränderliches Magnetfeld erzeugt ein elektrisches Feld, das den magnetischen Fluss  $\Phi$  umschließt (Bild 8-18b). Wird eine Leiterschleife eingebracht, so kann das elektrische Feld nach Bild 8-18a durch Messen der induzierten Spannung  $u_i$  nachgewiesen werden. Das Induktionsgesetz wird mit  $u_i = \oint \vec{E} d\vec{s}$  für eine Windung  $N=1$  umgeschrieben:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt} . \quad \text{Induktionsgesetz} \quad (8.35b)$$



**Bild 8-19**

Erzeugung einer Spannung durch bewegte Leiter im Magnetfeld

#### Bewegte Leiter

In einem zeitlich konstanten Magnetfeld  $B$  lassen sich Spannungen dadurch induzieren, dass Leiter im Magnetfeld bewegt werden (Bild 8-19). Aus dem Induktionsgesetz für eine Windung ( $N = 1$ ) kann die Spannung  $u_i$  berechnet werden:

$$u_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \frac{dA}{dt} = -Blv . \quad \text{Bewegte Leiter} \quad (8.36)$$

Nach Bild 8-19 besitzt der Leiter der Länge  $l$  die Geschwindigkeit  $v$ , so dass für die Fläche gilt:  $dA/dt = lv$ . Gleichung 8.36 kann auch aus der Lorentz-Kraft abgeleitet werden.

#### Stromgenerator

Zur Umwandlung von mechanischer in elektrische Energie werden Generatoren eingesetzt. Diese bestehen im Prinzip aus einer Spule mit  $N$  Windungen, die im Magnetfeld  $B$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gedreht wird. Die senkrecht zu den Feldlinien projizierte Fläche

beträgt  $A \cos(\omega t)$ . Daraus folgt  $dA/dt = -\omega A \sin(\omega t)$ . Das Induktionsgesetz liefert für die entstehende Wechselspannung:

$$u_i = NBA\omega \sin(\omega t). \quad \text{Wechselspannung} \quad (8.37)$$

Die Spannung wird an Schleifringen des Generators abgegriffen.

### Selbstinduktion

Ein Wechselstrom  $i$  in einer Spule erzeugt ein zeitlich veränderliches Magnetfeld. Dieses magnetische Wechselfeld induziert in der gleichen Spule eine Spannung  $u_i$ . Man nennt diesen Vorgang *Selbstinduktion*.

Die induzierte Spannung  $u_i$  wirkt dem felderzeugenden Strom  $i$  entgegen (Lenz'sche Regel).

Die Selbstinduktion kann am Beispiel einer langen Zylinderspule berechnet werden. Für den magnetischen Fluss  $\Phi$  einer Spule der Länge  $l$  und der Querschnittsfläche  $A$  gilt:

$$\Phi = \mu_0 HA = \frac{\mu_0 N A i}{l}.$$

Nach dem Induktionsgesetz  $u_i = -N d\Phi / dt$  erhält man somit:

$$u_i = -\frac{\mu_0 N^2 A}{l} \frac{di}{dt}.$$

Die Spulendaten werden zur *Induktivität*  $L$  zusammengefasst und man erhält:

$u_i = -L \frac{di}{dt}$	$[L] = \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$	<b>Selbstinduktion</b>
--------------------------	------------------------------------	------------------------

(8.38a)

Die Induktivität  $L$  weist die Einheit  $[L] = \text{Vs/A} = \text{H}$  (Henry) auf. Für Spulen erhält man in Verallgemeinerung obiger Gleichungen:

$L = \frac{F \mu_0 \mu_r A N^2}{l}$		<b>Induktivität <math>L</math></b>
-------------------------------------	--	------------------------------------

(8.38b)

Für eine lange Spule beträgt der Spulenformfaktor  $F = 1$ .

**Beispiel 8.3.1a** Welche Spannung wird in einer Spule mit 75 Windungen induziert, wenn der magnetische Fluss durch die Spule in 3 s um 0,05 Vs zunimmt?

Es gilt das Induktionsgesetz (8.35a):  $U = -Nd\Phi / dt = -75 \cdot 0,05 / 3 \text{ V} = -1,25 \text{ V}$ .

**Beispiel 8.3.1b** In einem Magnetfeld mit einer Flussdichte  $B = 0,25 \text{ T}$  rotiert eine Spule mit  $N = 300$  Windungen und einer Fläche von  $A = 5 \text{ cm}^2$  mit einer Drehzahl  $n = 3000 \text{ 1/min}$ . Wie groß ist die Amplitude der induzierten Spannung?

Es wird eine sinusförmige Spannung  $u_i$  induziert (8.37):

$u_i = NBA\omega \sin(\omega t) = U_0 \sin(\omega t)$ . Es folgt:  $U_0 = NAB\omega = NAB2\pi n$ . Mit  $n = 3000 / 60 \text{ 1/s}$  folgt  $U_0 = 300 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 0,25 \cdot 50 \text{ V} = 1,875 \text{ V}$ .

**Beispiel 8.3.1c** Wie groß ist die Induktivität einer Zylinderspule in Luft mit  $N = 1000$ , Länge  $l = 7 \text{ cm}$ , Querschnittsfläche  $A = 8 \text{ cm}^2$ ?

Für Luft gilt (8.38b) (mit  $F = 1$ ):  $L = \mu_0 AN^2 / l = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6 / 0,07 \text{ H} = 0,0144 \text{ H}$ .

### 8.3.2 Veränderliche elektrische Felder

Das Induktionsgesetz besagt, dass ein magnetisches Wechselfeld eine elektrische Feldstärke und Spannung erzeugt. Auch die Umkehrung gilt: ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld erzeugt ein Magnetfeld. Es gilt analog zu (8.35b):

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \frac{d\Psi}{dt}. \quad (8.39)$$

Die elektrische Flussdichte  $\Psi$  ist durch (8.22a) gegeben.

#### Ampere-Maxwell'sches Gesetz

Das Durchflutungsgesetz (8.24c) sagt aus, dass das Umlaufintegral  $\oint \vec{H} d\vec{s}$  gleich dem eingeschlossenen Strom  $i$  ist. (8.39) muss also ergänzt werden, falls neben dem veränderlichen elektrischen Feld noch zusätzlich ein Strom  $i$  vorhanden ist:

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \frac{d\Psi}{dt} + i. \quad \text{Ampere-Maxwell'sches Gesetz} \quad (8.40)$$

Diese Gleichung ist auch als *2. Maxwell'sche Gleichung* bekannt.

### 8.3.3 Maxwell'sche Gleichung

Die wichtigsten Gleichungen von Kapitel 8 beschreiben elektrische und magnetische Vorgänge. Sie sollen im Folgenden in Form der Maxwell'schen Gleichungen zusammengestellt werden. Sie beschreiben alle Phänomene der Elektrostatik und -dynamik.

*Die physikalischen Größen für elektrische Felder lauten:*

$\vec{E}$  : elektrische Feldstärke in V/m,

$\vec{D}$  : elektrische Flussdichte oder Verschiebungsdichte in As/m<sup>2</sup> und

$\Psi$  : elektrischer Fluss in As.

*Die entsprechenden magnetischen Feldgrößen sind:*

$\vec{H}$  : magnetische Feldstärke in A/m,

$\vec{B}$  : magnetische Flussdichte oder Induktion in Vs/m<sup>2</sup> = T = Tesla

$\Phi$  : magnetischer Fluss in Vs = Wb = Weber.

Hinzu kommt die elektrische Stromstärke  $i$  in A, bzw. die Stromdichte  $\vec{j}$  in A/m<sup>2</sup>.

#### Erste Maxwell'sche Gleichung

Es handelt sich um das Induktionsgesetz (8.35b):

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad \text{1. Maxwell'sche Gleichung} \quad (8.35b)$$

#### Zweite Maxwell'sche Gleichung

Das Ampere-Maxwell'sche Gesetz (8.40) ist die 2. Maxwell'sche Gleichung. Sie ist analog zur 1. Maxwell'schen Gleichung aufgebaut. Es wird berücksichtigt, dass ein Strom  $i$  fließen kann:

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \frac{d\Psi}{dt} + i. \quad \text{2. Maxwell'sche Gleichung} \quad (8.40)$$

#### Zusätzliche Gleichungen

Der magnetische Fluss  $\Phi$  ist mit der Flussdichte  $\vec{B}$  wie folgt verbunden:

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{A}. \quad (8.27b)$$

Die Linien des magnetischen Flusses sind in sich geschlossen. Integriert man (8.26b) über eine Kugelfläche oder eine ähnlich in sich geschlossene Oberfläche, laufen genau so viele Flusslinien hinein wie heraus:

$$\oint \vec{B} d\vec{A} = 0. \quad (8.41)$$

Der elektrische Fluss  $\Psi$  ist durch folgende Gleichung mit der elektrischen Flussdichte  $\vec{D}$  verknüpft:

$$\Psi = \int \vec{D} d\vec{A}. \quad (8.22b)$$

Bei Integration von (8.11a) über eine geschlossene Fläche erhält man die eingeschlossene Ladung  $Q$ :

$$\oint \vec{D} d\vec{A} = Q. \quad (8.23)$$

Der Unterschied zwischen den Gleichungen für das elektrische und magnetische Feld beruht darin, dass keine magnetische Ladung existiert.

### Materialgleichungen

Folgende Gleichungen beschreiben den Einfluss von Materie auf elektromagnetische Felder. (8.22c) lautet bei Vorhandensein von Materie:

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}. \quad (8.22c)$$

Für Magnetfelder gilt analog:

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}. \quad (8.32)$$

Zusätzlich existiert das Ohm'sche Gesetz (Abschnitt 8.4.1):

$$\vec{j} = \kappa \vec{E}. \quad (8.42)$$

wobei  $\kappa$  den spezifischen Widerstand angibt. Den Strom  $i$  erhält man durch Integration der Stromdichte  $\vec{j}$

$$\vec{j} = \int i d\vec{A}. \quad (8.43)$$

### Lorentz-Kraft

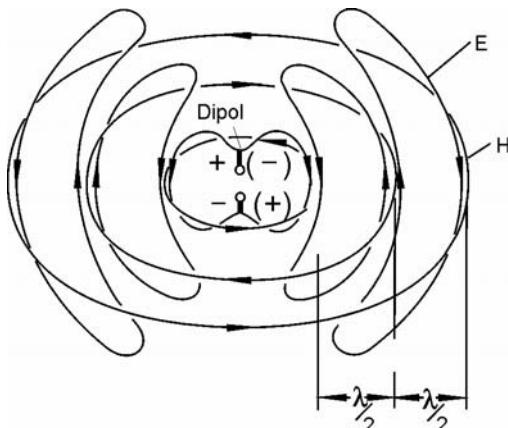
Die elektrische und magnetische Kraft auf eine Ladung  $Q$  lautet:

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})). \quad (8.5) + (8.30b)$$

Die Gleichungen dieses Abschnittes haben fundamentale Bedeutung, da sie alle elektromagnetischen Phänomene beschreiben. Sie stellen eine theoretische Grundlage der Elektronik, Optik und Atomphysik dar.

### 8.3.4 Elektromagnetische Wellen

Zeitveränderliche elektrische und magnetische Felder sind untrennbar miteinander verknüpft und sie erzeugen sich gegenseitig. Ein elektrisches Wechselfeld verursacht ein umschlingendes periodisches Magnetfeld (Bild 8-20). Dieses induziert wiederum ein elektrisches Feld usw..



**Bild 8-20**  
Erzeugung elektromagnetischer Wellen  
durch das Wechselfeld einer schwingenden  
Dipolantenne

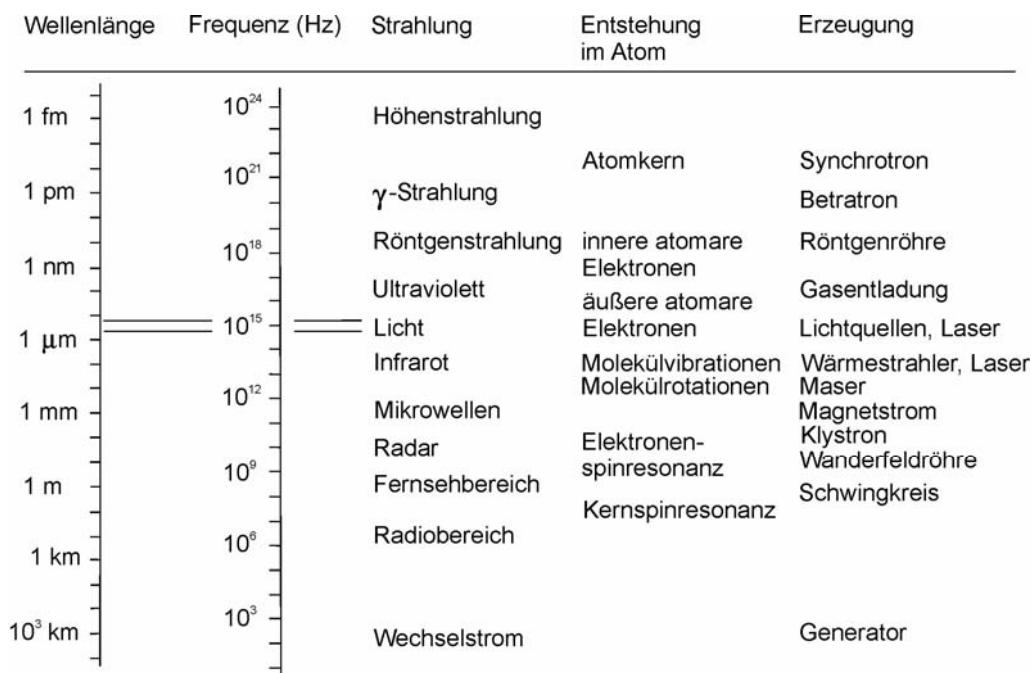


Bild 8-21 Darstellung des Frequenzspektrums der elektromagnetischen Strahlung

Der Vorgang breitet sich wellenförmig im Raum aus. Das Spektrum dieser Wellen reicht von den Radiowellen, der infraroten Strahlung, dem Licht, der ultravioletten Strahlung der Röntgenstrahlung bis hin zur  $\gamma$ -Strahlung (Bild 8-21).

### Erzeugung und Ausbreitung

Eine elektromagnetische Welle wird durch beschleunigte Ladungen erzeugt, beispielsweise in einer Antenne, in die eine hochfrequente Spannung eingespeist wird. In der Antenne bewegen sich die Elektronen periodisch, so dass ein schwingender elektrischer Dipol entsteht (Bild 8-22a).

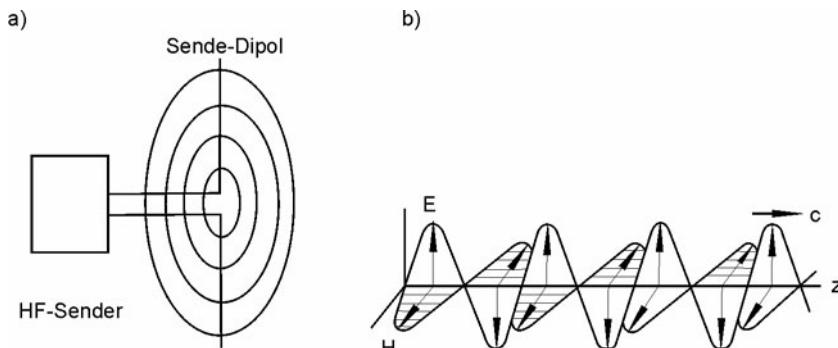


Bild 8-22 Elektromagnetische Wellen:

a) Erzeugung, b) Elektrisches und magnetisches Feld in der Welle

Die abgestrahlte elektromagnetische Welle ist linear polarisiert. Die elektrische Feldstärke  $E$  steht parallel zur Dipolachse, die magnetische Feldstärke  $H$  senkrecht dazu. Es handelt sich um eine Transversalwelle. Im Nahfeld existiert eine Phasenverschiebung zwischen dem  $E$ - und  $H$ -Feld; im Fernfeld bei Entfernung, die groß gegen die Wellenlänge  $\lambda$  sind, schwingen beide Felder in Phase (Bild 8-22b). Der Nachweis elektromagnetischer Wellen kann durch Empfangsantennen erfolgen, welche die elektrische oder magnetische Feldstärke erfassen.

Auch Licht ist eine elektromagnetische Welle. Die Erzeugung und Ausbreitung von Licht wird in den Kapiteln Atomphysik und Optik beschrieben.

### Lichtgeschwindigkeit $c_0$

Aus den Maxwell'schen Gleichungen kann eine Wellengleichung (analog zu (6.30)) abgeleitet werden. Man erhält daraus die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen in einem Medium, das durch die Permittivitätszahl  $\epsilon_r$  und die Permeabilität  $\mu_r$  sowie die elektrische und magnetische Feldkonstanten  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  beschrieben wird:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\epsilon_0\mu_r\mu_0}} = \frac{c_0}{n} . \quad \text{Lichtgeschwindigkeit } c \quad (8.44a)$$

Dabei sind  $c_0$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und  $n$  die Brechzahl:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{und} \quad n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\epsilon_r\mu_r} . \quad \text{Brechzahl } n \quad (8.44b)$$

Elektromagnetische Wellen jeder Art breiten sich im Vakuum mit der Lichtgeschwindigkeit  $c_0 \approx 300000 \text{ km/s}$  aus. In einem Medium verringert sich die Geschwindigkeit von  $c_0$  auf  $c$ . Das Verhältnis  $c_0/c$  ist die Brechzahl  $n$ , eine wichtige optische Materialkonstante (Kapitel Optik).

### Intensität/Leistungsdichte

Werden die Beträge der Feldstärken  $E$  und  $H$  miteinander multipliziert, erhält man die Intensität oder Leistungsdichte  $S$ , welche die in der Welle transportierte Leistung  $P$  pro Querschnittsfläche  $A$  angibt:

$$S = EH = \frac{E^2}{Z} = ZH^2 \quad [S] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} . \quad \text{Leistungsdichte } S \quad (8.45)$$

$Z = E/H = \sqrt{\mu/\epsilon}$  ist der *Wellenwiderstand*. Er beträgt im Vakuum  $Z = 376,7 \Omega$ .

### Koaxialkabel

Bei der Ausbreitung hochfrequenter elektrischer Signale auf Leitungen, z. B. Koaxialkabeln, muss das elektromagnetische Feld um den Mittelleiter herum mit berücksichtigt werden. Eine Leitung wird durch den Wellenwiderstand

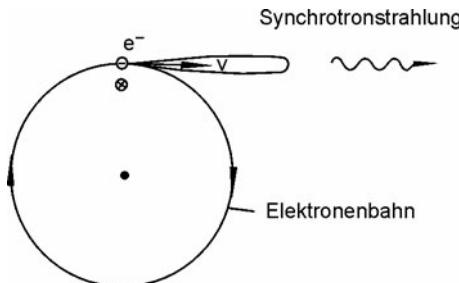
$$Z = \sqrt{\mu/\epsilon} = \sqrt{L'/C'} \quad \text{Wellenwiderstand } Z \quad (8.46)$$

charakterisiert, wobei  $L'$  und  $C'$  die Induktivität und Kapazität pro Längeneinheit darstellen. Elektromagnetische Wellen breiten sich in Leitungen ähnlich aus wie elastische Wellen in

Drähten oder Stäben. An den Enden werden die Wellen flektiert und bilden stehende Wellen. Am offenen Ende liegen ein Spannungsbau und ein Stromknoten vor. Am kurzgeschlossenen Ende dagegen entsteht ein Spannungsknoten und Strombau. Ist der Leiter mit dem Wellenwiderstand abgeschlossen, findet keine Reflexion statt; die laufende Welle wird im Widerstand absorbiert. Ein üblicher Wert für Koaxialkabel beträgt  $Z = 50 \Omega$ .

### Synchrotronstrahlung

Beschleunigte Teilchen senden elektromagnetische Wellen aus. Beim Abbremsen von Elektronen in einer Röntgenröhre entsteht die so genannte *Bremsstrahlung* (Abschnitt 10.3.2). Synchrotronstrahlung wird von Elektronen oder Ionen emittiert, die sich auf einer Kreisbahn bewegen. Im Elektronensynchrotron wird die Abstrahlung dadurch verstärkt, dass der Strahl durch Wiggler läuft, in denen der Strahl Schwingungen in radialer Richtung durchführt (Bild 10-25). Es handelt sich um eine Dipolstrahlung. Da sich die Elektronen nahezu mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, wird die Strahlung durch relativistische Effekte zu einer schmalen Keule deformiert (Bild 8-23, (10.24a)). Die Strahlung ist polarisiert, sie liegt je nach Energie der Elektronen im ultravioletten Bereich bis ins Röntgengelände.



**Bild 8-23**  
Erzeugung von Synchrotronstrahlung

**Beispiel 8.3.4a** Berechnen Sie die Lichtgeschwindigkeit aus der elektrischen und magnetischen Feldkonstante ( $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs(Am)}$ ).

Man erhält nach (8.44b):  $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

**Beispiel 8.3.4b** Wie groß ist die elektrische Feldstärke  $H$ , die ein Radiosender mit einer Leistung von  $P = 1 \text{ kW}$  in  $r = 1 \text{ km}$  Entfernung erzeugt?

Der Sender strahlt die Leistung  $P$  näherungsweise kugelförmig mit einer Oberfläche von  $4\pi r^2$ . Damit erhält man:  $S = P/(4\pi r^2) = 7,96 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$ .

Nach (8.45) gilt:  $E = \sqrt{ZS} = \sqrt{376,7 \cdot 7,96 \cdot 10^{-5} \Omega \text{W/m}^2} = 0,173 \text{ V/m}$ .

## 8.4 Elektrische Ströme

### 8.4.1 Gleichstromkreise

#### Ohm'sches Gesetz

In elektrischen Leitern gilt meist das Ohm'sche Gesetz: Strom  $I$  und Spannung  $U$  sind über den elektrischen Widerstand  $R$  oder den Leitwert  $G = 1/R$  miteinander verbunden:

$$U = RI \quad \text{oder} \quad I = GU \quad [R] = \frac{V}{A} = \Omega = \text{Ohm} \quad [G] = \frac{A}{V} = S = \text{Siemens.} \quad (8.47)$$

Der Widerstand ist proportional zur Länge  $l$  und umgekehrt proportional zum Querschnitt  $A$  eines Leiters:

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad \text{und} \quad G = \kappa \frac{A}{l} \quad [\rho] = \Omega \cdot \text{m} \quad [\kappa] = \frac{\text{S}}{\text{m}}. \quad (8.48)$$

Die Materialgrößen  $\rho$  und  $\kappa = 1/\rho$  nennt man *spezifischer Widerstand* und *elektrische Leitfähigkeit* (Tabelle 8.3).

**Tabelle 8.3** Spezifischer Widerstand  $\rho$  und Temperaturkoeffizient  $\alpha$  bei 20 °C

Material	$\rho$ in $10^{-6}$ Ωm	$\alpha$ in $10^{-3}$ K $^{-1}$	Material	$\rho$ in $10^{-6}$ Ωm	$\alpha$ in $10^{-3}$ K $^{-1}$
Silber	0,016	3,8	Platin-Iridium	0,32	2
Kupfer	0,017	3,9	Konstantan	0,50	0,03
Gold	0,022	3,9	Manganin	0,43	0,02
Aluminium	0,027	4,7	Resistin	0,51	0,008
Platin	0,107	3,9	Graphit	8,0	-0,2
Eisen	0,10	6,1	Bürstenkohle	40	

Wird in (8.47) der Strom  $I$  durch die Querschnittsfläche  $A$  dividiert, erhält man die Stromdichte  $j = I/A$ . Die Spannung  $U$  durch die Feldstärke  $E = U/l$  ersetzt. Man erhält:

$$j = \kappa E \quad \text{bzw. vektoriell} \quad \vec{j} = \kappa \vec{E} \quad [j] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}. \quad \text{Stromdichte } j \quad (8.42)$$

In Leitern diffundieren die Elektronen durch das Kristallgitter, ähnlich wie Gase in Gefäßen. Mit steigender Temperatur wird die Zahl der Gitterstörungen größer, an denen die Elektronen unelastisch gestreut werden. Daher nimmt der elektrische Widerstand  $R$  mit der Temperatur  $\vartheta$  zu. Näherungsweise gilt für Metalle ein lineares Gesetz:

$$R = R_{20}(1 - \alpha(\vartheta - 20^\circ\text{C})). \quad \text{Metalle} \quad (8.49a)$$

Man geht dabei von einem Widerstand  $R_{20}$  bei 20 °C aus. Beispiele für den Temperaturkoeffizienten  $\alpha$

$$\alpha = \frac{\Delta R}{R} \frac{1}{\Delta \vartheta} \quad [\alpha] = \frac{1}{\text{K}} = \frac{1}{^\circ\text{C}} \quad \text{Temperaturkoeffizienten } \alpha \quad (8.49b)$$

gibt Tabelle 8.3. Konstantan (60% Cu, 40% Ni) und Manganin (86% Cu, 2% Ni, 12% Mn) zeigen eine sehr geringe Temperaturabhängigkeit. Halbleiter verhalten sich anders als Metalle (Abschnitt 11.3), der Widerstand fällt bei steigenden Temperaturen (NTC-Widerstände, NTC = negative temperature coefficient).

### Erstes Kirchhoff'sches Gesetz

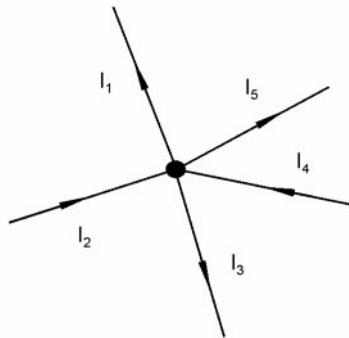
Das 1. Kirchhoff'sche Gesetz, die *Knotenregel*, gilt in verzweigten Stromkreisen (Bild 8-24a). Nach dem Gesetz der Ladungserhaltung müssen an einem Knoten die zufließenden Ströme gleich den abfließenden sein.

An einem Stromknoten ist die Summe der Ströme null. Die zufließenden Ströme werden positiv und die abfließenden negativ gerechnet.

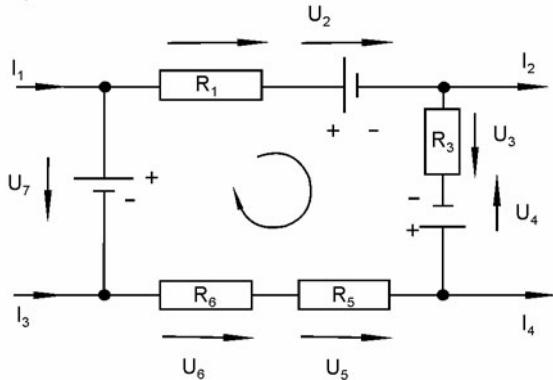
$$I_1 + I_2 + I_3 + \dots = 0.$$

$$1. \text{ Kirchhoff'sches Gesetz} \quad (8.50)$$

a)



b)



**Bild 8-24** a) Darstellung der Knotenregel: Die Summe aller Ströme ist gleich null.  
b) Maschenregel: Die Summe aller Spannungen ist gleich null

### Zweites Kirchhoff'sches Gesetz

In einem elektrischen Stromkreis muss mindestens eine Spannungsquelle vorhanden sein (Bild 8-24b). Nach dem Gesetz der Energieerhaltung ist beim Transport von Ladung in einem geschlossenen Stromkreis, einer *Masche*, die zu- und abgegebene elektrische Arbeit gleich groß. Die Spannung  $U$  ist ein Maß für die Arbeit  $W$  ((8.8):  $W = QU$ ). Die Summe der treibenden Spannungen der Quellen ( $U_{0i}$ ) ist so groß wie alle Spannungsabfälle ( $U_{abi}$ ) ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ):

$$U_{01} + U_{02} + \dots = U_{ab1} + U_{ab2} + \dots \quad (8.51a)$$

Die Richtungen der Spannungen werden für Quellen von Plus nach Minus und sonst in Stromrichtung, auch von Plus nach Minus, gezählt.

Man erhält man mit der Vorzeichenfestlegung für die Maschenregel:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots = 0 = 0.$$

2. Kirchhoff'sches Gesetz

(8.51b)

In einer Masche ist die Summe aller Spannungen gleich Null.

### Elektrische Leistung $P$

Beim Transport der Ladung  $Q = It$  zwischen zwei Stellen mit der Potentialdifferenz oder Spannung  $U$  wird die Arbeit  $W$  verrichtet. Nach (8.8) gilt:

$$W = QU = UIt. \quad (8.8)$$

Aus dieser Gleichung erhält man die elektrische Leistung  $P$  beim Fließen eines Stromes  $I$ :

$$P = UI = R^2I = \frac{U^2}{R}.$$

Elektrische Leistung  $P$

(8.52)

In dieser Gleichung wurde das Ohm'sche Gesetz (8.47) benutzt. Die Leistung  $P$  wird am Widerstand  $R$  in Wärme überführt.

### Reihenschaltung von Widerständen

Verbindet man Widerstände  $R_1, R_2, R_3, \dots$  in Reihe, so fließt durch alle Widerstände der gleiche Strom. Daraus folgt für den gesamten Widerstand bei Reihenschaltung:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad \text{Reihenschaltung} \quad (8.54)$$

### Parallelschaltung von Widerständen

Legt man Widerstände  $R_1, R_2, R_3, \dots$  parallel und verbindet die Enden miteinander, so liegt an jedem Widerstand die gleiche Spannung  $U$ . Man erhält den Strom:  $I = U/R_1 + U/R_2 + U/R_3 + \dots = U/R$ . Bei Parallelschaltung ergibt sich damit für den gesamten Widerstand  $R$ :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \quad \text{oder} \quad G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots \quad \text{Parallelschaltung} \quad (8.55)$$

**Beispiel 8.4.1a** Ein Draht ( $l = 1 \text{ m}$ ,  $d = 0,35 \text{ mm}$ ) wird bei einer angelegten Gleichspannung von  $U = 6 \text{ V}$  von einem Strom  $I = 1,2 \text{ A}$  durchflossen. Berechnen den Widerstand  $R$ , den Leitwert  $G$ , den spezifischen Widerstand  $\rho$  und die elektrische Leitfähigkeit  $\kappa$ . Um welches Material kann es sich handeln?

$R = U/I = 5 \Omega$ ,  $G = 1/R = 0,2 \Omega^{-1} = 0,2 \text{ S}$ ,  $\rho = Rd^2\pi/(4l) = 4,8 \cdot 10^{-7} \Omega \text{m}$ ,  $\kappa = 1/\rho = 2,1 \cdot 10^6 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ . Ein Vergleich von  $\rho$  mit Tabelle 8.3 zeigt, dass es sich um Konstantan handeln kann.

**Beispiel 8.4.1b** Wie groß ist der Strom  $I$  in einer Glühbirne mit 5 W in einer Taschenlampe mit 4,8 V? Wie groß ist der Widerstand  $R$ ?

$$I = P/U = 1,04 \text{ A}, \quad R = U/I = 4,6 \Omega.$$

**Beispiel 8.4.1c** Es werden zwei Widerstände mit  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$  und  $R_2 = 1 \Omega$  einmal in Reihe und dann parallel geschaltet. Welche Widerstände ergeben sich?

In Reihe:  $R = 1,001 \text{ k}\Omega \approx 1 \text{ k}\Omega$ . Parallel:  $R = 0,999 \Omega \approx 1 \Omega$ .

**Beispiel 8.4.1d** Es werden zwei 1,2 V-Batterien in Reihe und parallel geschaltet. Welche Spannungen ergeben sich?

In Reihe (8.54):  $U = 2,4 \text{ V}$ . Parallel (8.55):  $U = 1,2 \text{ V}$ .

### 8.4.2 Wechselstromkreise

Wechselstromgeneratoren erzeugen eine Sinusspannung  $u$  mit der Amplitude  $\hat{U}$  (8.37):

$$u = \hat{U} \sin(\omega t + \alpha) . \quad \text{Wechselspannung } u \quad (8.56a)$$

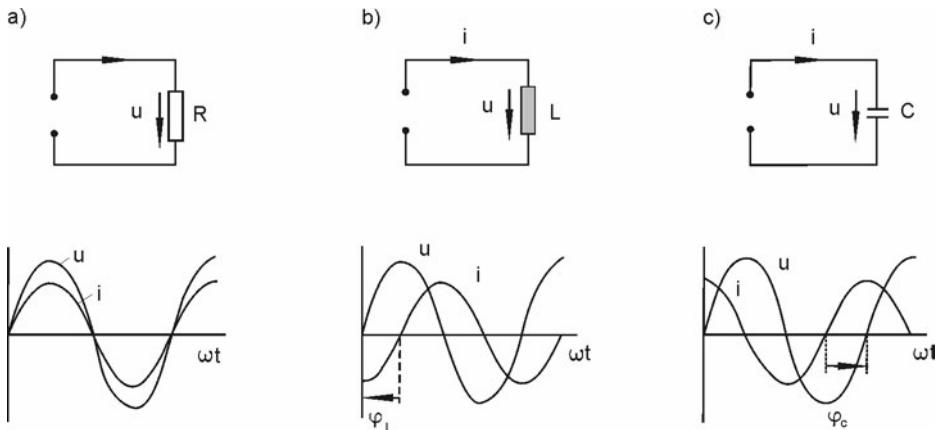
Der Phasenwinkel  $\alpha$  hängt vom Nullpunkt der Zeit  $t$  ab. In diesem Kapitel werden zeitabhängige Ströme und Spannungen mit kleinen Buchstaben ( $i, u$ ) und zeitlich konstante mit großen Buchstaben geschrieben ( $I, U$ ). Ein an einen Generator angeschlossener Verbraucher wird von einem Strom  $i$  (Amplitude  $\hat{I}$ ) mit gleicher Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$  aber einem anderen Phasenwinkel  $\beta$  durchflossen:

$$i = \hat{I} \sin(\omega t + \beta) . \quad \text{Wechselstrom } i \quad (8.56b)$$

Die Differenz der Phasen gibt die Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen Strom und Spannung an:

$$\varphi = \beta - \alpha . \quad \text{Phase } \varphi \quad (8.56c)$$

Eine Phasenverschiebung  $\varphi$  tritt nur bei kapazitiven und induktiven Bauelementen auf. Für Ohm'sche Widerstände ist  $\varphi = 0$  (Bild 8-25a).



**Bild 8-25** Strom und Spannung in Wechselstromkreisen:  
a) Ohm'scher Widerstand. b) Induktiver Widerstand. c) Kapazitiver Widerstand

### Elektrische Leistung $P$

Die momentane elektrische Leistung  $P(t)$  schwankt innerhalb einer Periode. Es gilt:

$$P(t) = u \cdot i.$$

Momentane Leistung

Es kann vorkommen, dass der Momentanwert der Leistung  $P(t)$  kurzzeitig negative Werte annimmt. Die in der Kapazität oder Induktivität gespeicherte Energie wird dann an das Netz abgegeben. Interessant ist die Leistung  $P$ , die über eine oder mehrere Periodendauern  $T$  gemittelt wird:

$$P = \frac{\int_0^T P(t) dt}{T}.$$

Man kann die Werte für  $u$  und  $i$  aus den (8.56) einsetzen. Zweckmäßigerweise wird der Nullpunkt der Zeit so gewählt, dass  $\alpha = 0$  ist:

$$P = \frac{\int_0^T \hat{U} \sin(\omega t) \hat{I} \sin(\omega t + \varphi) dt}{T}. \quad \text{Mittlere Leistung}$$

Das Integral lässt sich nach Einsatz der Produktenregel für trigonometrische Funktionen lösen:

$$P = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \cos \varphi. \quad \text{Elektrische Leistung } P \quad (8.57a)$$

### Effektiv- und Scheitelwerte

Die *Effektivwerte*  $U_{eff}$  und  $I_{eff}$  von Spannung und Strom können aus den *Scheitelwerten*  $\hat{U}$  und  $\hat{I}$  für Sinuskurven berechnet werden:

$$U_{eff} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad I_{eff} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}. \quad \text{Effektivwerte } U_{eff}, I_{eff} \quad (8.57b)$$

Es handelt sich um die quadratischen Mittelwerte, z. B.  $u_{eff} = \sqrt{(\int u^2 dt) / t}$ . Übliche Messgeräte für Wechselstrom zeigen die Effektivwerte an.

*Das Wechselstromnetz hat eine Spannung von  $U_{eff} = 230$  V. Die Scheitelspannung beträgt  $\hat{U} = 324,3$  V und die Frequenz  $f = 50$  Hz.*

### Wirk-, Schein- und Blindleistung

Für die *Wirkleistung*  $P = W/t$  wird aus (8.57a) und (8.57b):

$$P = U_{eff} I_{eff} \cos \varphi . \quad \text{Wirkleistung } P \quad (8.57c)$$

Von den Elektrizitätswerken wird diese Wirkleistung  $P$  den Verbrauchern in Rechnung gestellt. Die Größe  $\lambda = \cos \varphi$  nennt man *Leistungsfaktor*. Er gibt das Verhältnis von Wirkleistung zu Scheinleistung an.

Durch die induktive Belastung, z. B. bei Elektromotoren, entsteht im öffentlichen Netz eine Phasenverschiebung  $\varphi$ . Aus (8.57c) ist ersichtlich, dass dadurch bei gleicher Leistung der Strom an einem Verbraucher ansteigt. Das Netz wird dadurch unnötig belastet und es entstehen zusätzliche Energieverluste in den Leitungen. Daher werden in Verbrauchern vorhandene Induktivitäten durch Kapazitäten ergänzt, um den Phasenwinkel  $\varphi$  möglichst klein zu halten.

Die *Scheinleistung*  $S$  ist wie folgt definiert:

$$S = U_{eff} I_{eff} . \quad \text{Scheinleistung } S \quad (8.57d)$$

Die *Blindleistung*  $Q$  ist der Teil der Leistung, der zwischen den Induktivitäten und Kapazitäten hin und her pendelt:

$$Q = U_{eff} I_{eff} \sin \varphi . \quad \text{Blindleistung } Q \quad (8.57e)$$

### Induktiver Widerstand $X_L$

In Wechselstromkreisen treten Spannungsabfälle an Ohm'schen Widerständen  $R$ , Induktivitäten  $L$  und Kapazitäten  $C$  auf. Ohmsche Widerstände bezeichnet man als *Wirkwiderstand*  $R$ , Widerstände von Induktivitäten und Kapazitäten als *Blindwiderstand*  $X_L$  und  $X_C$ . Der *Scheinwiderstand oder die Impedanz* einer Schaltung setzt sich aus Wirk- und Blindwiderstand zusammen.

In einer Spule ohne Ohm'schen Widerstand  $R$  mit der Induktivität  $L$  muss die angelegte Wechselspannung  $u$  gleich der induzierten Wechselspannung  $-u_i$  sein:

$$u = \hat{U} \sin(\omega t) = -u_i = L \frac{di}{dt} .$$

Durch Integration erhält man daraus den Strom  $i$ :

$$i = -\frac{\hat{U}}{\omega L} \cos(\omega t) = \hat{I} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad \text{mit} \quad \hat{I} = \frac{\hat{U}}{\omega L} . \quad (8.58a)$$

*In einem Wechselstromkreis eilt die Spannung  $u$  an einer Induktivität  $L$  dem Strom  $i$  in der Phase um  $\varphi_L = \pi/2 = 90^\circ$  voraus (Bild 8-25b).*

Das Verhältnis der Amplituden von Spannung  $\hat{U}$  und Strom  $\hat{I}$  ist der *Blindwiderstand*  $X_L$ :

$$X_L = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \omega L . \quad \text{Blindwiderstand } X_L \quad (8.58b)$$

Der induktive Blindwiderstand  $X_L$ , hängt von der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$  ab. Die mittlere Leistung  $P$  über eine oder mehrere Perioden ist gleich null:  $P = \frac{\int_0^T P(t) dt}{T} = 0$ . Da der Blindwiderstand  $\omega L$  keine Arbeit umsetzt, werden Drosselpulen als Vorwiderstände verwendet, z. B. bei Leuchtstoffröhren oder als Anlasswiderstände.

### Kapazitiver Widerstand $X_C$

Besteht ein Wechselstromkreis nur aus einer Spannungsquelle und einem Kondensator der Kapazität  $C$ , so gilt mit  $Q = \int idt$ :

$$u = \hat{U} \sin(\omega t) = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int idt .$$

Differenzieren nach der Zeit  $t$  liefert für den Strom  $i$ :

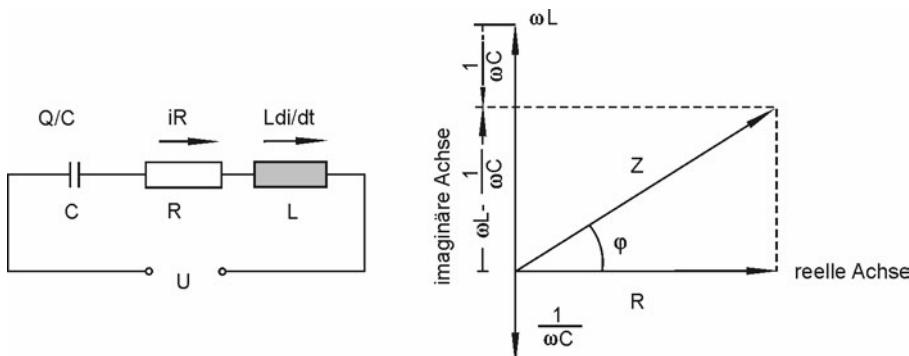
$$i = \omega C \hat{U} \cos(\omega t) = \hat{I} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad \text{mit} \quad \hat{I} = \omega C . \quad (8.59a)$$

In einem Wechselstromkreis eilt die Spannung  $u$  an einer Kapazität  $C$  dem Strom  $i$  in der Phase um  $\varphi_C = -\pi/2 = -90^\circ$  nach (Bild 8-25c).

Das Verhältnis der Amplituden von Spannung  $\hat{U}$  und Strom  $\hat{I}$  ist der *Blindwiderstand*  $X_C$ :

$$X_C = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{1}{\omega C} . \quad \text{Blindwiderstand } X_C \quad (8.59b)$$

Die Wirkleistung  $P$  an einem kapazitiven Blindwiderstand  $X_C$  ist ebenso wie beim induktiven Blindwiderstand  $X_L$  gleich Null. Die Phasenverschiebung in Stromkreisen durch Induktivitäten kann durch den Einsatz von Kondensatoren kompensiert werden.



**Bild 8-26** a) Reihenschaltung von Ohm'schem Widerstand, Kapazität und Induktivität  
b) Darstellung der Widerstände in der komplexen Ebene

## Komplexe Schreibung, Reihenschaltung

Die Berechnung von Wechselstromkreisen gestaltet sich einfach, wenn für die Impedanzen (= Wechselstromwiderstände) komplexe Zahlen eingeführt werden. *Im Folgenden werden komplexe Werte fett gedruckt.* Der Ohm'sche Widerstand wird auf der reellen Achse aufgetragen, die Scheinwiderstände  $X_L, X_C$  auf der imaginären Achse (Bild 8-26). Für induktive Widerstände  $X_L = \omega L$  eilt die Spannung  $u$  gegenüber dem Strom  $i$  um  $90^\circ$  vor. Daher wird  $X_L$  auf der positiven Imaginärachse aufgezeichnet, d. h. in komplexer Schreibung gilt mit  $j = \sqrt{-1}$ :

$$\mathbf{X}_L = j\omega L . \quad \text{Blindwiderstand } \mathbf{X}_L \quad (8.60a)$$

An kapazitiven Widerständen  $X_C = 1/\omega C$  eilt die Spannung  $u$  gegenüber dem Strom  $i$  um  $90^\circ$  nach; die Auftragung erfolgt auf der negativen Imaginärachse:

$$\mathbf{X}_C = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C} . \quad \text{Blindwiderstand } \mathbf{X}_C \quad (8.60b)$$

Der komplexe Widerstand oder die Impedanz  $\mathbf{Z}$  eines Stromkreises in Reihenschaltung ergibt sich zu (Bild 8-26b):

$$\mathbf{Z} = R + \mathbf{X}_L + \mathbf{X}_C = Z e^{j\varphi} . \quad (8.60c)$$

Der Betrag der Impedanz  $Z = |\mathbf{Z}|$  ist um den Winkel  $\varphi$  phasenverschoben (Bild 8-26b):

$$\tan \varphi = \frac{X_L + X_C}{R} = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R} . \quad \text{Impedanz } \mathbf{Z} \quad (8.61a)$$

Der Winkel  $\varphi$  beschreibt die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung.

Der Betrag der Impedanz  $Z = |\mathbf{Z}| = \hat{U}/\hat{I}$  gibt das Verhältnis der Scheitelwerte  $\hat{U}$  und  $\hat{I}$  an. Man erhält aus Bild 8-26b:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2} . \quad \text{Betrag der Impedanz } Z \quad (8.61b)$$

Eine weitere Begründung für das Einführen komplexer Widerstände ergibt die Lösung folgender Differentialgleichung für eine Reihenschaltung von  $R, L$  und  $C$ . Durch Summation der Spannungsabfälle resultiert für die Spannung  $u$  (Bild 8-26a):

$$u = \frac{Q}{C} + iR + L \frac{di}{dt} \quad \text{mit} \quad Q = \int idt$$

oder differenziert

$$\frac{du}{dt} = \frac{i}{C} + R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} .$$

Die Lösung wird mathematisch einfacher, wenn komplexe Zahlen für die Impedanz, Strom und Spannung eingeführt werden.

## Parallelschaltung

Auch die Berechnung von parallel geschalteten Widerständen  $R$ , Kapazitäten  $C$  und Induktivitäten  $L$  kann mit Hilfe komplexer Zahlen gelöst werden. Ähnlich wie bei Ohm'schen Widerständen werden bei Parallelschaltung die komplexen Leitwerte  $1/R, 1/X_C$  und  $1/X_L$  addiert:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_C} + \frac{1}{X_L} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{j}{\omega L}. \quad (8.62a)$$

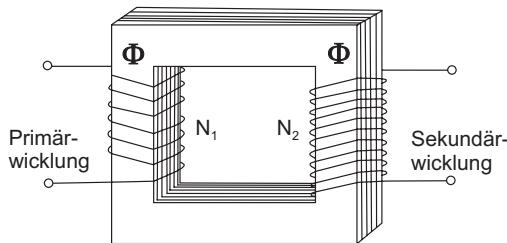
Durch Anwendung einfacher Rechenregeln für komplexe Zahlen erhält man:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{|Z|} = \frac{1}{\sqrt{1/R^2 + (\omega C - 1/(\omega L))^2}}$$

und

$$\tan \varphi = R(\omega C - 1/(\omega L)).$$

Parallelschaltung (8.62b)



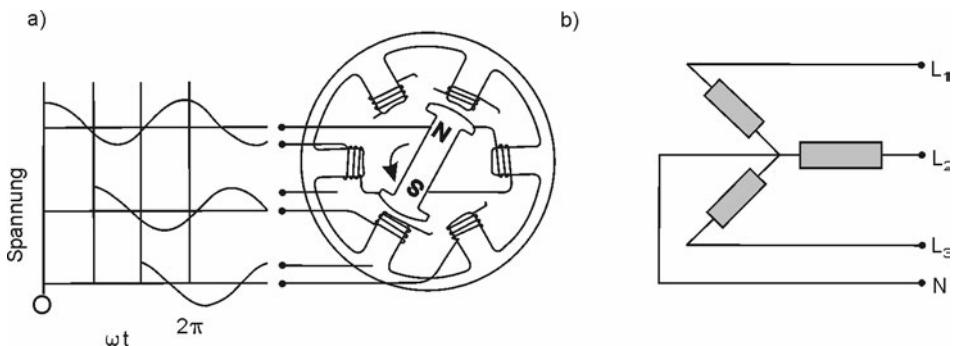
**Bild 8-27**  
Prinzip eines Transformators

### Transformator

Der Transformator nach Bild 8-27 ermöglicht die Umwandlung von Wechselspannungen. Durch die Primär- und Sekundärspule fließt der gleiche magnetische Fluss  $\Phi$ . Aus dem Induktionsgesetz (8.35a)  $U = -Nd\Phi/dt$  erhält man für die primäre und sekundäre Spannung  $u_1$  und  $u_2$  an einem verlustfreien Transformator:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{und} \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1}. \quad \text{Transformator} \quad (8.63)$$

Die Windungszahlen der Primär- und Sekundärspule betragen  $N_1$  und  $N_2$ . Bei der Ableitung der Gleichung über die Ströme  $i_1$  und  $i_2$  wurde berücksichtigt, dass die Leistung bei der Transformation konstant bleibt.



**Bild 8-28** a) Erzeugung von Drehstrom. b) Sternschaltung

## Dreiphasenstrom

Große elektrische Leistungen werden mit Dreiphasen- oder Drehstrom übertragen. In den Generatoren wird Drehstrom durch drei um  $120^\circ$  gegeneinander versetzte Spulenpaare im Ständer erzeugt, in denen der rotierende Feldmagnet nacheinander Wechselspannungen induziert (Bild 8-28a). Zwecks Einsparung von Leitungen verkettet man die drei Spannungen. In der *Dreiecksschaltung* werden die drei Spulenpaare zu einem Dreieck verbunden, und man benutzt die Leiter  $R$ ,  $S$  und  $T$ .

Im öffentlichen Netz ist die *Sternschaltung* mit dem Symbol Y anzutreffen (Bild 8-28b). Den elektrischen Leiter, der mit dem Sternpunkt verbunden ist, nennt man Mittel- oder Neutralleiter ( $N$ ). Daneben gibt es drei Außenleiter ( $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ), die mit den Spulenenden verbunden sind. Zwischen diesen Außenleitern herrscht die *Leiterspannung*. Die Spannung zwischen einem Außenleiter und dem Sternpunkt ist die *Sternspannung*. Die Leiterspannung um den Faktor  $\sqrt{3}$  größer als die Sternspannung. Beim *Vierleiternetz* ( $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  und  $N$ ) haben die Leiter- und Sternspannungen die Effektivwerte von 400 V und 230 V. Man benutzt die Abkürzung:  $3/N \sim 50 \text{ Hz} 400/230 \text{ V}$ . Die Haushalte werden zwischen einer Phase und dem Nullleiter geschaltet. Der Effektivwert der Netzzspannung ist dann gleich der Sternspannung  $U_{eff} = 230 \text{ V}$ . Der Scheitelwert ist  $\hat{U} = 230 \cdot \sqrt{2} \text{ V} = 325 \text{ V}$ . Warmwassergeräte oder Heizungsanlagen werden zwischen 2 Phasen geschaltet. Die effektive Spannung beträgt dann  $U_{eff} = 400 \text{ V}$  und der Scheitelwert  $\hat{U} = 400 \cdot \sqrt{3} = 665 \text{ V}$ .

**Beispiel 8.4.2a** Das Haushaltsnetz hat eine Frequenz von 50 Hz und eine Spannung von 230 V. Gesucht ist die Gleichung für die sinusförmige Wechselspannung als Funktion der Zeit.

$$(8.56a) \text{ und } (8.57b): u = \hat{U} \sin(\omega t) = \hat{U} \sin(2\pi f t) \text{ mit } f = 50 \text{ Hz} \text{ und } \hat{U} = U_{eff} \sqrt{2} = 230 \cdot \sqrt{2} \text{ V} = 325,27 \text{ V}. \\ \text{Damit folgt: } u = 325,27 \text{ V} \cdot \sin(314,14 \cdot t / \text{s}).$$

**Beispiel 8.4.2b** Ein ohmscher Verbraucher im Haushaltsnetz hat eine mittlere Leistung von 100 W. Wie groß ist der Maximalwert der Leistung während einer Wechselstromperiode?

$$\text{Die mittlere Leistung beträgt (8.57c): } P = U_{eff} I_{eff} = 100 \text{ W}. \text{ Die maximale Leistung in einer Periode beträgt: } P_{max} = \hat{U} \hat{I} = \sqrt{2} \cdot U_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot I_{eff} = 200 \text{ W}.$$

**Beispiel 8.4.2c** Wie groß ist die Impedanz  $Z$  bei 50 Hz und 5000 Hz, wenn in Reihe zu einer Induktivität  $J = 2,5 \text{ mH}$  ein ohmscher Widerstand von  $R = 10 \Omega$  zugeschaltet wird?

Der induktive Widerstand für  $f_1 = 50 \text{ Hz}$  und  $f_2 = 5000 \text{ Hz}$  beträgt (8.60a):  $X_{L50} = 2\pi f_1 L = 0,78 \Omega$  und

$$X_{L5000} = 2\pi f_2 L = 78,5 \Omega. \text{ Für die Impedanz gilt (8.61b): } Z_{50} = \sqrt{R^2 + X_{L50}^2} = 10,0 \Omega \text{ und} \\ Z_{5000} = \sqrt{R^2 + X_{L5000}^2} = 79,1 \Omega.$$

**Beispiel 8.4.2d** Die Primärwicklung eines Transformators hat 2000 Windungen. Welche Windungszahl muss die Sekundärwicklung haben, damit eine Wechselspannung von 230 V auf 30 V reduziert wird? Wie verringert sich die Leistung auf der Sekundärseite?

$$N_2 = 2000 \cdot 30 / 230 \approx 261 \text{ Windungen. Die Leistung verändert sich nicht (bis auf Verluste).}$$

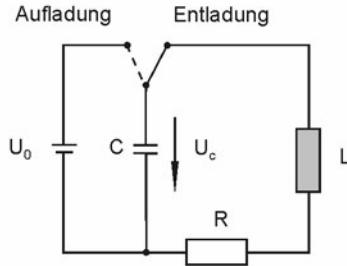
**Beispiel 8.4.2e** Wie schaltet man bei Dreiphasenstrom die Steckdosen und wie Geräte höherer Leistung (z. B. Warmwasser)?

Steckdosen werden zwischen einer Phase und dem Nullleiter geschaltet (Effektivwert 230 V). Geräte höherer Leistung werden zwischen 2 Phasen geschaltet (Effektivwert 400 V).

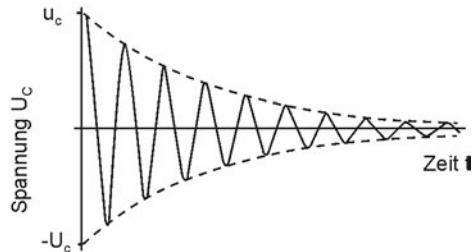
### 8.4.3 Elektromagnetische Schwingungen

In Schaltkreisen mit Induktivitäten, Kapazitäten und Ohm'schen Widerständen können freie und erzwungene Schwingungen auftreten.

a)



b)



**Bild 8-29** a) Erzeugung freier Schwingungen mit einem Reihen-Schwingkreis  
b) Darstellung freier gedämpfter Schwingungen

### Freie Schwingungen

In einem Reihenschwingkreis sind  $C$ ,  $R$  und  $L$  nach Bild 8-29a angeordnet. Mittels eines Schalters wird der Kondensator auf die Spannung  $U_0$  aufgeladen und Energie gespeichert. Durch Umschalten findet eine Entladung über  $L$  und  $C$  statt. Durch den Strom  $i$  wird in der Induktivität  $L$  ein Magnetfeld aufgebaut. Nach Absinken der Kondensatorspannung auf null ist die Energie ausschließlich im Magnetfeld vorhanden. Beim Zerfall des Feldes durch Abklingen des elektrischen Stromes  $i$  wird eine Spannung induziert, die den Kondensator wieder auflädt, allerdings in umgekehrter Polarität. Durch die Ohm'schen Verluste im Widerstand ist die Spannung etwas geringer. Der Vorgang beginnt von neuem und es entsteht eine gedämpfte Schwingung (Bild 8-29b).

Im geschlossenen Stromkreis muss nach dem 2. Kirchhoff'schen Satz die Summe aller Spannungen gleich null sein:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = 0.$$

Mit  $i = \int Q dt$  erhält man durch Differenzieren:

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0. \quad (8.64)$$

(8.64) hat die Form der Schwingungsgleichung 6.12b. In Analogie zu (6.13) erhält man als Lösung eine gedämpfte Schwingung nach Bild 8-29b. Für die Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$  ergibt sich:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{und} \quad \delta = \frac{R}{2L}. \quad (8.65a)$$

Die Dämpfung der Schwingung verschwindet, wenn der Widerstand  $R = 0$  wird.

### Erzwungene Schwingungen, Reihenschwingkreis

Ein Schwingkreis kann durch Einspeisung einer Wechselspannung  $u = \hat{U} \sin(\omega t)$  periodisch angeregt werden. Für die Impedanz der Reihenschaltung gilt (8.61). Die Impedanz  $Z$  erreicht bei der Resonanzfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \text{Resonanzfrequenz } \omega_0 \quad (8.65\text{b})$$

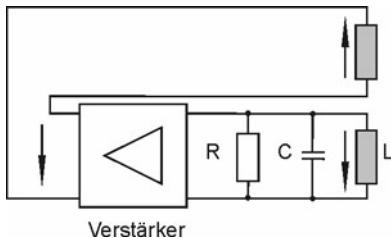
ein Minimum, der Strom ein Maximum.

### Erzwungene Schwingung, Parallelschwingkreis

Bei einem Parallelschwingkreis gilt (8.62). Der Leitwert  $1/Z$  erreicht ein Minimum bei der gleichen Resonanzfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad \text{Resonanzfrequenz } \omega_0 \quad (8.65\text{c})$$

die Impedanz  $Z$  weist ein Maximum bei  $\omega_0$  auf. Bei Anregung mit einem Wechselstrom konstanter Amplitude  $i = \hat{I} \sin(\omega t)$  erreicht die Spannung einen Maximalwert.



**Bild 8-30**

Erzeugung ungedämpfter Schwingungen durch das Prinzip der Rückkopplung

### Rückkopplung

Die Erzeugung fort dauernder, ungedämpfter Schwingungen ist von großer technischer Bedeutung. Sie kann durch einen Ausgleich der Dämpfungsverluste bei periodische Energiezufuhr erreicht werden. Beim Prinzip der Rückkopplung oder der Selbsterregung wird an einen Schwingkreis nach Bild 8-30 ein Verstärker angeschlossen. Durch induktive Kopplung wird ein Teil der Ausgangsspannung dem Schwingkreis in gleicher Phase wieder zugeführt.

**Beispiel 8.4.3** Stellen Sie die Elemente für einen Schwingkreis mit einer Resonanzfrequenz von 1 MHz zusammen.

(8.65c):  $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ ,  $LC = 1/(4\pi^2 f^2)$ . Man wählt z. B. eine Spule mit  $L = 1 \text{ mH}$  und erhält  $C = 23,3 \text{ pF}$ .

### 8.4.4 Ströme im Vakuum

#### Elektronenemission

Elektronen können durch verschiedene Prozesse aus Metallen ins Vakuum gebracht werden. Bei der Feldemission werden hohe elektrische Felder um 1 GV/m benötigt, um die Elektronen aus einer Metalloberfläche zu ziehen. Derartig hohe Feldstärken können nur an Metallspitzen erzeugt werden. Anwendungen findet man im Feldelektronenmikroskop (Bild 10-6).

Bei der Glühemission wird das Kathodenmaterial erhitzt, so dass die Austrittsarbeit  $W$  durch thermische Energie aufgewendet wird. Die Stromdichte  $j$  hängt nach der Richardson-Gleichung von der Temperatur  $T$  ab:

$$j = aT^2 e^{-W/kT} \quad [j] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}. \quad \text{Glühemission} \quad (8.66)$$

$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K ist die Botzmann-Konstante. Die Materialgröße  $a$  liegt Glühkathoden im Bereich um  $1 \text{ MA}/(\text{m}^2 \text{ K}^2)$ .

Elektronen können auch durch Beschuss einer Materialoberfläche durch Ionen, Elektronen, Atomen oder Photonen herausgelöst werden. Im letzten Fall spricht man vom *Photoeffekt*, der in Abschnitt 10.1.2 behandelt wird.

### Elektronen- und Ionenstrahlen

Strahlen geladener Teilchen sind in Wissenschaft und Technik von großer Bedeutung, z. B. Elektronenstrahlen in Fernsehern und Elektronenmikroskop oder Ionenstrahlung in Beschleunigern (Abschnitt 10.1.3). Daher soll im Folgenden die Bewegung von freien Ladungen in elektrischen oder magnetischen Feldern beschrieben werden.

Im elektrischen Feld ist die Kraft  $F$  auf eine Ladung  $Q$  durch die elektrische Feldstärke  $E$  gegeben:

$$F = QE. \quad (8.5)$$

Der Energiegewinn  $W$  der Elementarladung  $e$  nach Durchlaufen der Spannung  $U$  errechnet sich zu:

$$E = e U. \quad \text{Energie eines Elektrons } E \quad (8.67a)$$

Aufgrund dieser Gleichung wird die Energie geladener Teilchen (und von Photonen) oft in der Einheit eV gegeben:

*Ein Elektronenvolt (eV) ist gleich der Energie, die eine Elementarladung  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  nach Durchlaufen einer Spannung von 1 V erhält:*

1 eV = $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .	Elektronenvolt <b>(8.67b)</b>
-----------------------------------------	-------------------------------

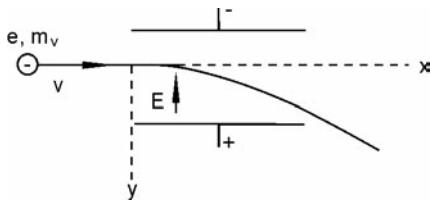
Ein Elektron im Elektronenstrahl eines Fernsehers mit einer Beschleunigungsspannung von 15 kV, ein Elektron besitzt also eine Energie von  $15 \text{ keV} = 2,4 \cdot 10^{-15} \text{ J}$ .

### Ablenkung in Feldern

Durchläuft ein Elektronenstrahl ein elektrisches Feld  $E = U/d$  in transversaler Richtung (Bild 8-31), erfährt er eine Ablenkung. Die Bahn entspricht innerhalb des Feldes einer Wurfparabel, wobei die Gravitation gegenüber der elektrischen Kraft vernachlässigbar ist. Die Bahn kann in einem Koordinatensystem nach Bild 8-31 aus  $x = vt$ ,  $y = at^2/2$  und  $F = eE = ma$  berechnet werden:

$$y = \frac{eEx^2}{m_E v^2}.$$

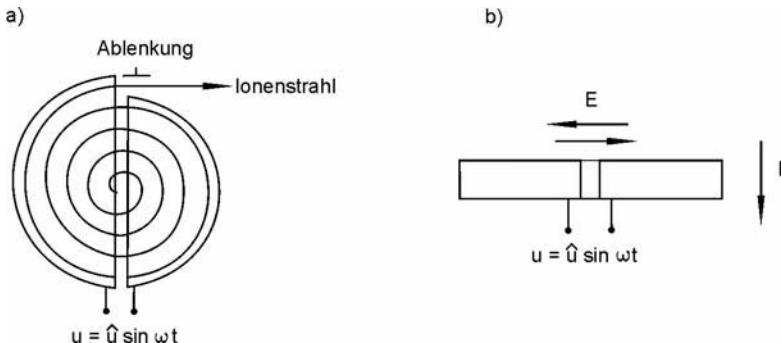
Dabei geben  $m_E$ ,  $e$  und  $v$  die Masse, Ladung und Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons an. Außerhalb des Feldes verläuft der Strahl geradlinig. Ablenksysteme nach Bild 8-31 werden in älteren Oszilloskopen eingesetzt (Bild 8-34).

**Bild 8-31**

Bahnkurve eines Elektronenstrahls in einem elektrischen Feld  $E$

Im Magnetfeld herrscht die Lorentz-Kraft (8.30). Bewegt sich eine Ladung  $e$  senkrecht zum Feld, steht die Kraftrichtung senkrecht zur Elektronengeschwindigkeit  $v$  und auch senkrecht zum Feld. Dadurch wird die Bewegung in zentraler Richtung abgelenkt, so dass eine Kreisbahn mit dem Radius  $r$  entsteht (siehe beispielsweise Bild 8-23). Es wirkt auf die geladene Masse  $m_E$  eine Zentrifugalkraft  $m_E v^2 / r$ , die gleich der Lorentz-Kraft ist  $evB$ :

$$\frac{m_E v^2}{r} evB \quad \text{oder} \quad r = \frac{m_E v}{eB}. \quad \text{Bahnradius im Magnetfeld} \quad (8.68)$$



**Bild 8-32**  
Prinzip eines  
Zyklotrons  
a) Ansicht von oben  
b) Seitenansicht

### Kreisbeschleuniger

Im Zyklotron (Bild 8-32) zur Beschleunigung von Protonen oder anderen Ionen herrscht ein konstantes Magnetfeld. Ionen werden durch ein elektrisches Wechselfeld zwischen zwei halbkreisförmigen Bereichen beschleunigt. Dadurch vergrößert sich der Radius und es entsteht eine spiralartige Bahnkurve. Die Ionen durchlaufen insgesamt eine Potentialdifferenz von vielen  $10^6$  V, d. h. die Energie beträgt mehrere MeV. Eine Anwendung stellt die Erzeugung radioaktiver Isotope dar, hauptsächlich für die Medizin.

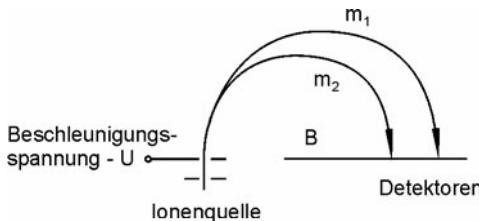
In einem Synchrotron bleibt der Radius der Bahnkurve gleich. Entsprechend der Zunahme der Geschwindigkeit erhöht sich das Magnetfeld. Derartige Beschleuniger dienen zur Erzeugung hochenergetischer Ionen bis in den GeV-Bereich oder von Elektronen zur Erzeugung von Synchrotronstrahlung (Kapitel 10.3.2).

### Magnetspektrometer

Die magnetische Kraft kann zur Messung der Masse  $m$  ionisierter Atome eingesetzt werden. Durch eine Spannung beschleunigte Ionen der Ladung  $Q$  werden mit der Geschwindigkeit  $v$  in ein Magnetfeld  $B$  eingeschossen. Jede Masse  $m$  durchläuft einen unterschiedlichen Bahnradius  $r$ . Aus der Messung von  $r$  wird die Ionenmasse  $m$  bestimmt:

$$m = \frac{QrB}{v} .$$

Nach Bild 8-33 können atomare Massen getrennt und vermessen werden.

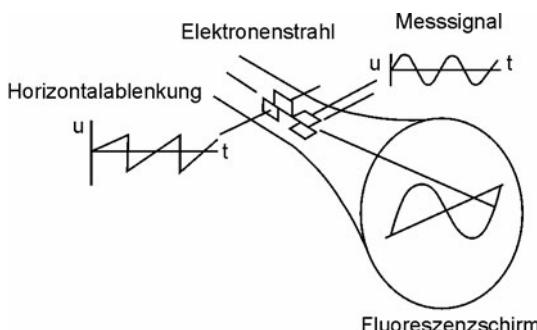


**Bild 8-33**

Prinzip eines Massenspektrometers

### Oszilloskop

In einem analogen Oszilloskop wird ein Elektronenstrahl aus einer Glühkathode durch zwei gekreuzte elektrische Ablenksysteme geschickt (8-34). In der Regel liegt an der Horizontalablenkung eine Kippspannung, die den Strahl strichförmig von links nach rechts bewegt. Das zu untersuchende Signal wird an die Vertikalablenkung gelegt.



**Bild 8-34**

Aufbau eines Oszilloskops

### Elektronenröhre

Transistoren können als „Stromventile“ bezeichnet werden. Elektronenröhren erfüllen in der Elektronik ähnliche Aufgaben, jedoch erfolgt die Steuerung durch eine Spannung. In einer Triode, der einfachsten Bauform, wird der Elektronenstrom zwischen Kathode und Anode durch ein dazwischen liegendes Gitter gesteuert.

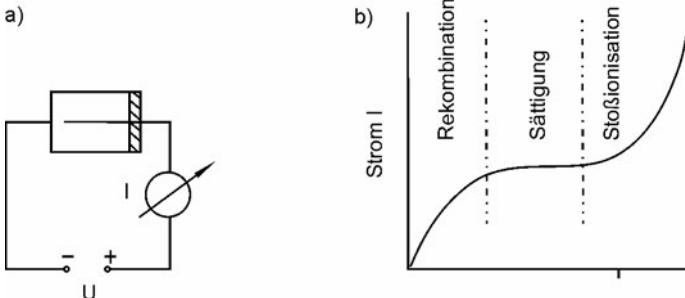
### 8.4.5 Ströme in Gasen

Gase sind normalerweise Nichtleiter. Ein Stromtransport kann nur entstehen, wenn Ladungsträger in das Gas injiziert oder durch Ionisation in einer Gasentladung erzeugt werden.

#### Unselbständige Gasentladung

Bricht die Stromleitung nach Ende einer äußeren Wirkung ab, so spricht man von einer unselbständigen Entladung. Die Strom-Spannungs-Kennlinie zeigt ein ausgeprägtes Plateau (Bild 8-35), wie es beispielsweise bei einer Ionisationskammer zum Nachweis ionisierender Strahlung auftritt (Bild 12-21). Im Bereich des Plateaus oder der Sättigung werden alle durch Ionisation erzeugten Ladungsträger abgesaugt. Bei kleineren Spannungen rekombinieren die Ladungsträger und der Strom ist kleiner. Am Ende des Plateaus tritt durch Stoßionisation, d. h.

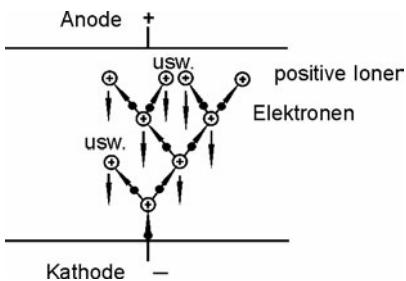
eine Vermehrung der Elektronen und Ionen durch Stöße, ein Stromanstieg auf. Schließlich entsteht eine selbständige Entladung.



**Bild 8-35**  
a) Anordnung zur Messung der Strom-Spannungs-Kennlinie unselbständiger Gasentladungen (Ionisationskammer),  
b) Strom-Spannung-Kennlinie

### Selbständige Gasentladung

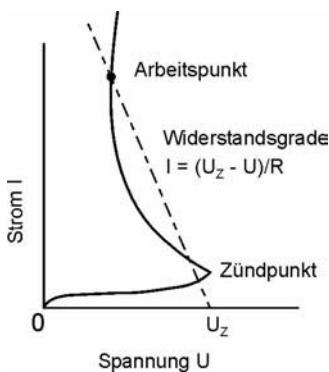
In einer selbständigen Entladung werden ständig Ladungsträger, d. h. Ionen und Elektronen, durch Stoßionisation produziert. Die positiven Ionen driften zur negativen Kathode und können dort Elektronen herausschlagen, die positiven Ionen zu einer Ionengewitterung führen (Bild 8-36). Ein ionisiertes Gas wird Plasma genannt.



**Bild 8-36**  
Stoßionisation in einer selbständigen Gasentladung

### Entladungslampen

Entladungen werden in Lichtquellen verschiedener Typen ausgenutzt: Glimm-, Niederdruck-, Hochdruck- und Höchstdrucklampen. Eine typische Kennlinie zeigt Bild 8-37. Man benötigt eine Zündhilfe und einen strombegrenzenden Vorschaltwiderstand, meist eine Drosselpule. Von besonderer Bedeutung sind Leuchtstoffröhren, die mit Hg-Dampf arbeiten. Die entstehende UV-Strahlung wird durch Leuchtstoffe auf der Innenwand in sichtbares Licht umgesetzt.



**Bild 8-37**  
Kennlinie einer Gasentladungslampe

## Plasma

Stark ionisierte Gase bilden ein Plasma, das manchmal als der 'vierte Aggregatzustand' bezeichnet wird. In Plasmen herrschen meist hohe Temperaturen, so dass auch eine thermische Ionisierung auftritt. Bei hohen Entladungsströmen wirkt das entstehende Magnetfeld einschnürend auf das Plasma (Pinch Effekt). Dadurch kann sich die Temperatur ohne eine Wandberührung stark erhöhen. In großen Anlagen zur Untersuchung von Kernfusion (Abschnitt 12.3) können Temperaturen von mehreren Millionen K entstehen. Weiterhin spielen Plasmen in Entladungslampen und Gaslasern eine wichtige Rolle.

### 8.4.6 Ströme in Flüssigkeiten

Die Leitung in Metallen und Halbleitern erfolgt durch Elektronen, in Flüssigkeiten wird der Strom durch Ionen getragen. Von Bedeutung sind wässrige Lösungen von Salzen, Basen oder Säuren, die *Elektrolyte* genannt werden.

#### Dissoziation

In Elektrolyten zerfallen chemische Verbindungen in Ionen. Ein Beispiel ist das Lösen von Kochsalz in Wasser: NaCl spaltet in  $\text{Na}^+$  und  $\text{Cl}^-$  auf. Dieser Vorgang, *Dissoziation* genannt, kann durch die hohe Permittivitätszahl von  $\epsilon_r = 81,6$  für Wasser erklärt werden. Die Coulomb'sche Kraft (8.2)  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$  zwischen zwei Ionen wird in Wasser wegen dem großen  $\epsilon_r$ -Wert sehr klein, so dass die Ionenbindung aufbricht.

#### Elektrolyse

Beim Einbringen von Elektroden in Elektrolyten und Anlegen einer Spannung fließt ein Strom. Die positiven Ionen wandern im elektrischen Feld zur Kathode, dem Minuspol; die negativen Ionen bewegen sich zur Anode, dem Pluspol. An den Elektroden werden die Ionen neutralisiert, und es kommt zu einer Abscheidung von Elementen oder Verbindungen. Die Zersetzung einer Lösung oder Schmelze durch elektrischen Strom nennt man *Elektrolyse*.

Beim Fließen eines Stromes in einer wässrigen Lösung von Salzen, z. B. Silbernitrat, wandern die Metallionen zur Kathode und werden dort als dünne Metallschicht abgeschieden. Das elektrolytische Beschichten von Gegenständen mit Metallen nennt man *Galvanisieren*. Die Elektrolyse wird auch zur Herstellung sehr reiner Metalle eingesetzt, z. B. von Elektrolytkupfer oder Aluminium. Beim *Eloxieren* wird die Oberfläche von Gegenständen, welche die Anode bilden, elektrolytisch oxidiert. Auch das Abtragen, z. B. rauer metallischer Flächen der Anode, ist elektrolytisch möglich.

#### Faraday'sches Gesetz

Bei der Elektrolyse ist die abgeschiedene Masse  $m$  proportional zur transportierten Ladung  $Q = It$ , die aus dem Strom  $I$  und der Zeit  $t$  ermittelt wird:

$$m = kQ = kIt . \quad \text{Elektrolyse} \quad (8.69a)$$

Die Größe  $k$  ist das *elektrochemische Äquivalent*. Jedes abgeschiedene Molekül trägt mit der Elementarladung  $e$  multipliziert mit der Wertigkeit  $z$  des Ions zur Ladung  $Q$  bei. Wird die Stoffmenge  $n$  (in mol) eines Ions abgeschieden, gilt  $Q = It = nN_A ze$ , wobei  $N_A$  die Avogadro'sche Konstante darstellt (5.5). Die Faraday'sche Konstante

$$F = N_A e = 9,648 \cdot 10^4 \text{ C/mol} \quad \text{Faraday'sche Konstante } F \quad (8.69\text{b})$$

gibt die transportierte Ladung bei Abscheidung von  $n = 1$  mol eines einwertigen Ions an. Aus den oben angegebenen Beziehungen erhält man mit  $n = m/m_m$  ( $m_n$  = molare Masse) für das elektrochemische Äquivalent (5.6):

$$k = \frac{m_m}{zF}. \quad \text{Elektrochemisches Äquivalent } k \quad (8.69\text{c})$$

### Volta'sche Spannungsreihe

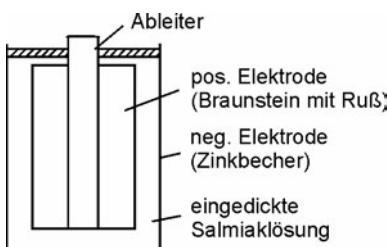
Metalle lösen sich geringfügig in Elektrolyten und treten als positive Ionen auf. Dadurch lädt sich der Elektrolyt positiv auf, bis die entstehende Spannung die Ionenabgabe verhindert. Die Löslichkeit und damit die Spannung ist vom Material abhängig. Tauchen zwei verschiedene Metalle in einen Elektrolyten, baut sich zwischen ihnen eine Spannung auf. Man nennt eine derartige Anordnung ein *galvanisches Element*. Man kann die Metalle in eine Spannungsreihe einordnen. Die Werte sind in Tabelle 8.4 angeben; gemessen wird gegen eine *Normal-Wasserstoffelektrode*.

**Tabelle 8.4** Elektrochemische Spannungsreihe

Metall	Li	K	Na	Mg	Zn	Fe	Ni	H	Cu	Ag	Hg	Au
$U \text{ in}$ V	-3,02	-2,92	-2,71	-2,35	-0,76	-0,44	-0,25	0	0,34	0,81	0,86	1,5

### Primärelemente

Als Batterie mit einer Spannung von 1,5 V ist das Leclanche-Element weit verbreitet. Der Elektrolyt besteht aus eingedickter Salmiaklösung, die Elektroden aus Zink und Kohle, bzw. Braunstein (Bild 8-38). Bei der Entladung geht  $\text{Zn}^{++}$  eines Zinkbechers in Lösung und wird oxidiert, wobei Elektronen abgegeben werden. Verbesserte Batterien setzen Zinkchlorid, Magnesiumchlorid oder Kalilauge als Elektrolyte ein. Höhere Energiedichten werden mit Lithium und Braunstein als Anodenmaterial erzielt. Knopfzellen benutzen als positive Elektrode Quecksilber- oder Silberoxid und als negative Zink.



**Bild 8-38**  
Aufbau einer Batterie (Primärelement)

### Sekundärelemente

Im Gegensatz zu Primärelementen sind Sekundärelemente aufladbar. Weit verbreitet ist der Blei-Akkumulator mit seinem geringen Innenwiderstand. Als Elektrolyt dient verdünnte Schwefelsäure. Im geladenen Zustand besteht die positive Elektrode aus Bleioxid, die negative

aus Blei. Bei der Entladung bildet sich an beiden Elektroden Bleisulfat, und die Säuredichte sinkt. Die Reaktionsgleichung lautet:



Oft werden kleine Nickel-Cadmium Zellen mit Kalilauge als Elektrolyt eingesetzt.

### Brennstoffzellen

Die bei der Oxydation von Wasserstoff zu Wasser entstehende Energie kann in Brennstoffzellen direkt in elektrische Energie umgewandelt werden. An der (positiven) Anode wird  $\text{O}_2$  zugeführt, katalytisch ionisiert und in  $\text{OH}^-$  übergeführt. Die Ionen wandern durch den Elektrolyten (Kalilauge) zur positiven Anode, an der  $\text{H}_2$  eingeleitet wird. Dort reagiert  $\text{OH}^-$  mit katalytisch erzeugtem  $\text{H}^+$ . Der Wirkungsgrad erreicht etwa 80 %. Die direkte Umwandlung chemischer in elektrische Energie ist auch mit anderen Brennstoffen möglich.

## 9 Optik

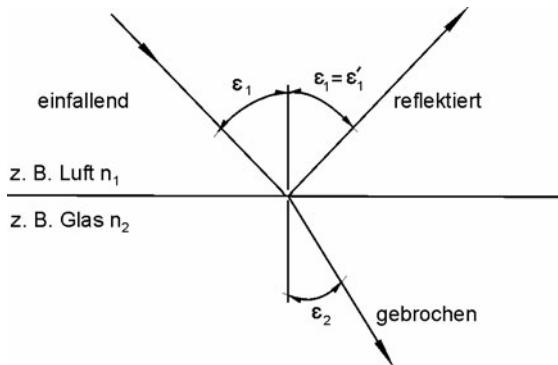
Licht hat dualen Charakter: in der *Wellenoptik* wird Licht als Welle dargestellt, in der *Quantenoptik* treten die Teilcheneigenschaften hervor. Dieses Kapitel wird mit der *geometrischen Optik* begonnen, die sich um die Struktur des Lichtes nicht kümmert.

### 9.1 Geometrische Optik

In der *geometrischen Optik* wird die Ausbreitung des Lichtes vereinfacht durch Lichtstrahlen dargestellt. Die Grundphänomene der geometrischen Optik sind Reflexion und Brechung.

#### 9.1.1 Reflexion und Brechung

In homogenen Medien breitet sich Licht geradlinig aus. Fällt es auf eine Grenzfläche, findet *Reflexion* statt. Ist das Material durchsichtig, tritt daneben auch *Brechung* auf (Bild 9-1).



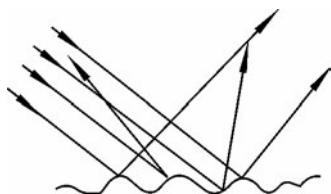
**Bild 9-1**

An der Grenzfläche optischer Medien findet Reflexion ( $\varepsilon_1 = \varepsilon'_1$ ) und Brechung ( $n_1 \sin \varepsilon_1 = n_2 \sin \varepsilon_2$ ) statt

#### Reflexionsgesetz

Das Reflexionsgesetz ist allgemein bekannt: der Einfallswinkel  $\varepsilon_1$  ist gleich dem Ausfallswinkel  $\varepsilon'_1$ . Ist die Oberfläche des reflektierenden Mediums rau, entsteht *diffuse Reflexion* (Bild 9-2). Einzelheiten über den Reflexionsgrad werden in Abschnitt 9.2.1 beschrieben.

*In der Optik werden die Winkel stets gegen die Normale (Senkrechte, Lot) der Fläche gegeben.*



**Bild 9-2**

An einer rauen Grenzfläche wird Licht diffus reflektiert oder gestreut

#### Phasensprung

Findet die Reflexion an der Grenzfläche zu einem *optisch dünneren Medium*, z. B. Glas-Luft, statt, läuft die Welle ohne Veränderung der Phase zurück. Bei Reflexion am *optisch dichtenen Medium*, z. B. Luft-Glas, findet ein Phasensprung um  $\pi$  statt. Die rücklaufende Welle wird um

eine halbe Wellenlänge  $\lambda/2$  verschoben. Dies ist in der geometrischen Optik belanglos, hat jedoch in der Wellenoptik Bedeutung.

*Ein optisch dünnes Medium hat eine kleinere Brechzahl  $n$  als ein optisch dichtes Medium.*

### Brechungsgesetz

*Brechung* bedeutet, dass sich an der Grenzfläche eines durchsichtigen Materials die Ausbreitungsrichtung ändert (Bild 9-1). Die Materialgröße Brechzahl  $n$  beschreibt diesen Effekt.  $n$  ist durch die Lichtgeschwindigkeiten im Medium  $c_M$  und im Vakuum  $c_0$  definiert:

$$n = \frac{c_0}{c_M} . \quad \text{Brechzahl } n \quad (9.1)$$

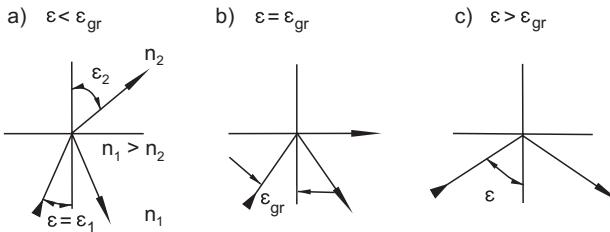
Da die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum  $c_0 = 299\,792 \text{ km/s}$  stets größer als die im Medium  $c_M$  ist, gilt  $n \geq 1$ . Das Brechungsgesetz, das in der Wellenoptik abgeleitet werden kann, lautet:

$$n_1 \sin \varepsilon_1 = n_2 \sin \varepsilon_2 . \quad \text{Brechungsgesetz} \quad (9.2)$$

Die Brechzahlen beider Medien sind  $n_1$  und  $n_2$ . Die Winkel  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  werden vom Lot aus gemessen (Bild 9-1). Man kann folgende Regel formulieren:

*Geht ein Lichtstrahl von einem optisch dünneren ( $n_1$ ) in ein optisch dichteres Material ( $n_2 > n_1$ ) über, so wird er zum Einfallslot hin gebrochen.*

Tabelle 9.1 zeigt die Brechzahlen  $n$  einiger Gläser, die Werte für Luft, Wasser und Diamant betragen  $n = 1,0003$ ,  $1,33$  und  $2,42$ .



**Bild 9-3** Beim Übergang zu einem optisch dünneren Medium ( $n_1 > n_2$ ) kann Totalreflexion auftreten:

- a) keine Totalreflexion  $\varepsilon < \varepsilon_{gr}$ ,
- b) Grenzwinkel  $\varepsilon = \varepsilon_{gr}$ ,
- c) Totalreflexion  $\varepsilon > \varepsilon_{gr}$

### Totalreflexion

Tritt ein Strahl aus einem optisch dichten Medium in ein dünneres über ( $n_1 > n_2$ ), kann bei Überschreiten eines Grenzwinkels *Totalreflexion* auftreten. In Bild 9-3 wird der Einfallswinkel  $\varepsilon$  laufend vergrößert. Beim Winkel  $\varepsilon_{gr}$  (Bild 9-3b) verläuft der gebrochene Strahl parallel zur Oberfläche, bei  $\varepsilon > \varepsilon_{gr}$  verschwindet der gebrochene Strahl vollständig und es tritt nur Reflexion auf. Mathematisch erhält man den Grenzwinkel  $\varepsilon_{gr}$  durch Setzen von  $\varepsilon_2 = 90^\circ$  in (9.2):

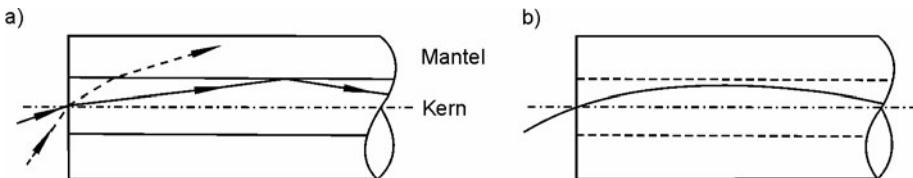
$$\sin \varepsilon_{gr} = \frac{n_2}{n_1} . \quad \text{Grenzwinkel } \varepsilon_{gr} \quad (9.3a)$$

Handelt es sich beim Medium 2 um Vakuum oder Luft mit  $n_2 = 1$ , ergibt sich:

$$\sin \varepsilon_{gr} = \frac{1}{n}.$$

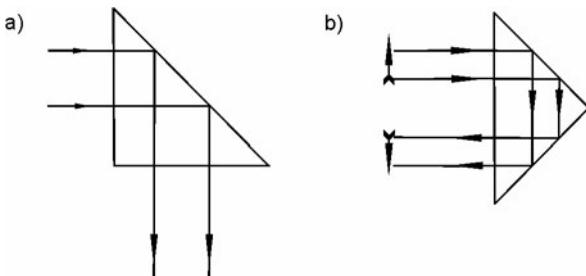
Grenzwinkel  $\varepsilon_{gr}$  (9.3b)

Anwendungen der Totalreflexion findet man in der Faseroptik. Bild 9-4 zeigt die Führung eines Lichtstrahls, z. B. aus einem Laser, durch eine flexible Faser für die Informatik, Materialbearbeitung oder Medizin. Auch bei Umlenkprismen wird die Totalreflexion ausgenutzt (Bild 9-5).



**Bild 9-4** Funktion von Lichtleitfasern ( $n_{Kern} > n_{Mantel}$ ):

- a) Bei Stufenindexfasern ändert sich die Brechzahl unstetig zwischen Kern und Mantel.  
Bei zu großem Einstrahlwinkel findet keine Totalreflexion statt.
- b) Gradientenfaser mit kontinuierlichem Übergang der Brechzahl zwischen Kern und Mantel



**Bild 9-5**

Einsatz der Totalreflexion bei Prismen:

- a) Reflexionsprisma für eine 90°-Ablenkung
- b) Umlenkprisma für eine 180°-Ablenkung  
(Katzenauge)

## Dispersion

In optischen Materialien nimmt die Brechzahl  $n(\lambda)$  in der Regel mit zunehmender Wellenlänge  $\lambda$  des Lichtes ab.  $n$  ist für blaues Licht größer als für rotes. Man bezeichnet diese Abhängigkeit als *Dispersion* (Farbzersetzung). In Tabelle 9.1 sind Hauptbrechzahlen  $n_e$  für eine Hg-Spektrallinie bei  $\lambda = 546,1$  nm (gelbgrün) angegeben. Weitere Werte  $n_{F'}$  und  $n_{C'}$  beziehen sich auf  $\lambda = 480,0$  nm (Cd, violett) und  $643,8$  nm (Cd, rot). Die Unterschiede in der Brechzahl liegen um 1 %. Sie haben Konsequenzen beim Gebrauch von Prismen und bei Farbfehlern von Linsen. Gläser mit geringer Dispersion, d. h. eine geringe Variation von  $n(\lambda)$ , nennt man *Krongläser* und mit hoher Dispersion *Flintgläser*. Die Dispersion kann durch die Abbe'sche Zahl  $v_e$  beschrieben werden (Tabelle 9.1).

**Tabelle 9.1** Brechzahlen einiger Gläser bei bestimmten Wellenlängen (in nm) und Abbe'sche Zahl  $v_e = (n_e - 1)/(n_F - n_C)$  (Bezeichnungen: K = Kronglas,  $v_e > 55$ , F = Flintglas  $v_e \leq 55$ )

Kronglas	$n_F'$ 480,0 nm	$n_e$ 546,1 nm	$n_C'$ 643,8 nm	$v_e$
BK 7	1,52283	1,51872	1,51472	63,96
K 5	1,52910	1,52458	1,52024	59,22
BaK 4	1,57648	1,57125	1,56625	55,85
SK 15	1,63108	1,65555	1,62025	57,79

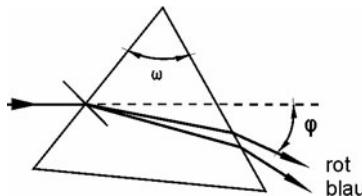
Flintglas	$n_F'$	$n_e$	$n_C'$	$v_e$
F 2	1,63310	1,62408	1,61582	36,11
SF 2	1,66238	1,65222	1,64297	33,60
SF 6	1,82970	1,81265	1,79750	25,24
SF 10	1,74805	1,73430	1,72200	28,19

### Prisma

Die Dispersion wird zur Zerlegung des Lichtes nach Wellenlängen oder Spektralfarben durch Prismen ausgenutzt. Den Strahlengang durch ein Prisma zeigt Bild 9-6. Der Ablenkwinkel  $\jmath$  durch ein Prisma mit dem Dachwinkel  $w$  kann aus dem Brechungsgesetz berechnet werden. Für *symmetrischen Durchgang* zeigt der Ablenkwinkel ein Minimum und man erhält den Ausdruck:

$$n = \frac{\sin((\varphi + \omega)/2)}{\sin(\omega/2)}. \quad \text{Prisma} \quad (9.4)$$

Bei normaler Dispersion ( $n_{blau} > n_{rot}$ ) wird blaues Licht stärker gebrochen als rotes.



**Bild 9-6**

Strahlengang durch ein Prisma. Bei symmetrischem Durchgang hat der Ablenkwinkel  $\varphi$  ein Minimum (9.4)

### Planplatte

Strahlen, die auf eine Planplatte fallen, erfahren keine Richtungsänderung, sondern lediglich eine leichte Parallelversetzung. Außerdem erscheinen Planplatten stets dünner zu sein, als sie es wirklich sind. Die *scheinbare Dicke*  $d'$  ist durch die Brechzahl  $n$  und die reale Dicke  $d$  bestimmt:

$$d' = \frac{d}{n}.$$

**Beispiel 9.1.1a** Ein Laserstrahl ( $\lambda = 632$  nm) fällt unter  $45^\circ$  auf die Oberfläche einer Flüssigkeit, wobei er von der Einfallrichtung um  $15^\circ$  abknickt. Wie groß ist die Brechzahl? Wie groß sind Lichtgeschwindigkeit, Frequenz und Wellenlänge in der Flüssigkeit?

Brechungsgesetz (9.2):  $n_2 = n_1 \sin \varepsilon_1 / \sin \varepsilon_2 = 1,414$  (mit  $n_1 = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 45^\circ$  und  $\varepsilon_2 = 45^\circ - 15^\circ$ ).

Lichtgeschwindigkeit (9.1):  $c = c_0 / n_2 = 2,12 \cdot 10^8$  m/s, Frequenz:  $f = c_0 / \lambda = 4,75 \cdot 10^{14}$  Hz. Die Frequenz ändert sich in der Flüssigkeit nicht. Die Wellenlänge verkleinert sich:  $\lambda_2 = \lambda / n_2 = 447$  nm.

**Beispiel 9.1.1b** Eine optische Faser besteht aus einem Kern ( $n_K = 1,550$  und einem Mantel  $n_M = 1,500$ ). Wie groß ist der Winkel der Totalreflexion?

$$\text{Totalreflexion (9.3a): } \sin \varepsilon_{gr} = n_M / n_K = 0,968, \quad \varepsilon_{gr} = 75,4^\circ.$$

**Beispiel 9.1.1c** In eine Glasfaser von  $s = 1 \text{ km}$  Länge wird rote (680 nm) und grüne (500 nm) Strahlung eingekoppelt. Wie groß ist der Laufzeitunterschied ( $n_{680} = 1,514$  und  $n_{500} = 1,522$ )?

$$\text{Aus } c = c_0 / n \text{ folgt: } \Delta t = t_{500} - t_{680} = sn_{500} / c_0 - sn_{680} / c_0 = \Delta n s / c_0 = 2,7 \cdot 10^{-8} \text{ s (}\Delta n = n_{500} - n_{680}\text{).}$$

**Beispiel 9.1.1d** Wie groß ist der Ablenkungswinkel  $\varphi$ , wenn ein Laserstrahl symmetrisch durch ein Prisma mit dem Dachwinkel  $\omega = 60^\circ$  tritt ( $n = 1,554$ )?

$$\text{Aus (9.4) folgt: } \sin((\varphi + \omega) / 2) = n \sin(\omega / 2) = 0,772, \quad (\varphi + \omega) / 2 = 50,53^\circ \text{ und } \varphi = 41,07^\circ.$$

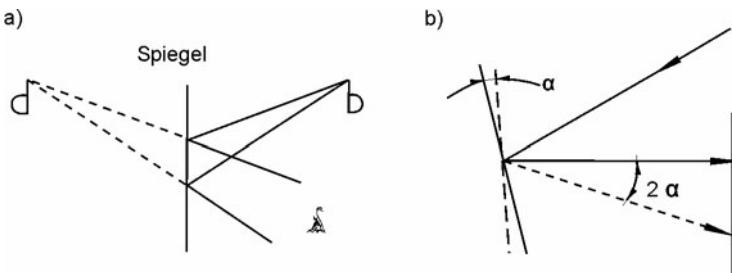
## 9.1.2 Hohlspiegel

### Ebene Spiegel

Die Bilderzeugung durch einen ebenen Spiegel ist in Bild 9-7a dargestellt. Es entsteht ein *virtuelles oder scheinbares Bild*.

*Ein virtuelles Bild kann nicht auf einem Schirm aufgefangen werden.*

Mit einem *Drehspiegel* werden kleine Drehwinkel nachgewiesen. Nach Bild 9-7b verändert sich der reflektierte Lichtstrahl um den doppelten Drehwinkel des Spiegels.



**Bild 9-7** Ebener Spiegel:

- a) Entstehung des virtuellen Spiegelbildes
- b) Bei Drehung des Spiegels um den Winkel  $\alpha$  ändert sich der Reflexionswinkel um  $2\alpha$

### Hohlspiegel (konkav)

Aus technischen Gründen werden Hohlspiegel meist sphärisch gefertigt: sie sind Teil einer Kugelfläche mit dem Radius  $r$ . Fällt achsenparalleles Licht auf einen *konkaven Spiegel* (cavus = hohl), wird es in dem *Brennpunkt oder Fokus F* gesammelt (Bild 9-8). Die Entfernung vom Spiegelscheitel nennt man *Brennweite f*, die gleich dem halben Radius  $r/2$  misst:

$$f = \frac{r}{2}. \quad \text{Konkavspiegel, Brennweite } f \quad (9.5a)$$

Die Existenz eines Brennpunktes  $F$  und Gleichung 9.5a gelten nur für achsennahen Lichteinfall. Zusätzlich muss für Strahlen, die die optische Achse unter dem Winkel  $\alpha$  kreuzen, die Näherung  $\sin \alpha \approx \alpha$  ( $\alpha$  im Bogenmaß!) erfüllt sein.

*Die geometrische Optik benutzt die Gauß'sche Näherung  $\sin \alpha \approx \alpha$ .*

Man kann (9.5a) wie folgt beweisen (Bild 9.8a): Es gilt  $\alpha = \alpha_1$  und damit  $\bar{M}\bar{F} = \bar{M}\bar{P}$ . Da  $\beta$  klein ist, erhält man  $\bar{F}\bar{S} = \bar{F}\bar{P}$ . Aus  $\bar{F}\bar{S} = \bar{M}\bar{F}$  folgt  $f = r/2$ .

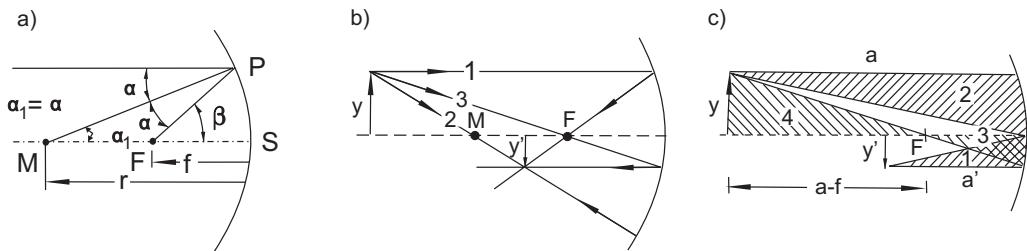
Achsenparalleles Licht in größerem Abstand von der Achse wird vor den Brennpunkt  $F$  gesammelt. Es tritt der *Öffnungsfehler* auf. Dagegen funktionieren parabelförmige Hohlspiegel bei achsenparallelem Lichteinfall auch bei großer Öffnung fehlerfrei. Allerdings entstehen Fehler bei schrägem Einfall.

### Konstruktion zur Abbildung

Ein Hohlspiegel ist in der Lage, Bilder von Gegenständen zu erzeugen. Zur Konstruktion des Bildes reicht es aus, von einem Gegenstandspunkt mindestens zwei Strahlen zu verfolgen. Die Konstruktion ist nach folgenden logischen Regeln einfach (Bild 9-8b):

1. *Der Parallelstrahl läuft nach der Reflexion durch den Brennpunkt.*
2. *Der Strahl durch den Krümmungsmittelpunkt trifft senkrecht auf die Spiegeloberfläche und wird in sich selbst reflektiert.*
3. *Der Brennpunktstrahl wird zu einem Parallelstrahl.*

Nach Bild 9-8b ergibt sich ein Schnittpunkt, der Größe und Lage des Bildes angibt. Geht man mit dem Gegenstand zwischen Brennpunkt  $F$  und Spiegelscheitel, ergibt sich ein scheinbarer Schnittpunkt hinter dem Spiegel. Es entsteht ein virtuelles Bild ähnlich wie in Bild 9-7a.



**Bild 9-8** Verhalten des konvexen Hohlspiegels:

- a) Achsenparallel einfallende Strahlen gehen durch den Brennpunkt  $F$  ( $f = r/2$ ).
- b) Strahlen 1 bis 3 zur Bildkonstruktion.
- c) Ähnliche Dreiecke zur Ableitung der Abbildungsgleichungen

### Abbildungsgleichungen

Die beschriebene Bildkonstruktion lässt sich mathematisch formulieren. Für Hohlspiegel werden folgende Festlegungen getroffen:

Gegenstands- und Bildweite ( $a, a'$ ) sind positiv auf der Spiegelseite und negativ hinter dem Spiegel. Gegenstands- und Bildgröße ( $y, y'$ ) zählen positiv senkrecht nach oben, negativ nach unten. Das Licht kommt von links. (Zur Vereinfachung werden bei Hohlspiegeln nicht die Vorzeichenregeln nach DIN 1336 angewendet.)

Da nur achsennahe Strahlen betrachtet werden, wird die Krümmung des Spiegels vernachlässigt, so dass die schraffierten Flächen Bild 9-8c näherungsweise Dreiecke sind. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke 1 und 2 folgen die Beziehungen für den *Abbildungsmaßstab*  $\beta$ :

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}. \quad \text{Hohlspiegel, Abbildungsmaßstab } \beta \quad (9.6a)$$

Dabei ist  $y$  die Größe des Gegenstands und  $y'$  des Bilds. Auch die Dreiecke 3 und 4 sind ähnlich, man erhält:  $\frac{y}{y'} = -\frac{f}{a'-f}$ .

Durch Gleichsetzen mit (9.6a) wird daraus:  $-\frac{y'}{y} = -\frac{f}{y-f}$ .

Dies schreibt man um, und es entsteht die Abbildungsgleichung:

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{y}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}. \quad \text{Hohlspiegel, Abbildungsgleichung} \quad (9.6b)$$

Dabei ist  $a$  der Abstand des Gegenstands vom Spiegel und  $a'$  der Abstand des Bildes. Geht man von bekannter Gegenstandslage und -größe ( $a, y$ ) aus, können mit (9.6a und b) die Eigenschaften des Bildes ( $a', y'$ ) berechnet werden.

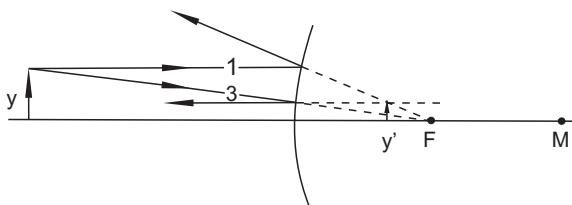
### Wölbspiegel (konvex)

Bei Konvex- oder Wölbspiegeln liegen Krümmungsmittelpunkt und Brennpunkt  $F$  hinter der Spiegelfläche. Nach den Vorzeichenregeln gilt:

$$f = -\frac{r}{2}. \quad \text{Konvexspiegel, Brennweite } f \quad (9.5b)$$

Ansonsten bleiben die *Abbildungsgleichungen* 9.6a und b in gleicher Form. Auch die geometrische Konstruktion ist analog. Nach Bild 9-9 schneiden sich die reflektierten Strahlen, wenn man sie hinter dem Spiegel verlängert. Ähnlich wie bei einem normalen Spiegel nach Bild 9-7a entsteht ein *virtuelles Bild*.

Hohlspiegel werden in der Beleuchtungstechnik, beim Bau astronomischer Teleskope und als Resonatorspiegel in der Lasertechnik eingesetzt. Beispielsweise bei Automobilscheinwerfern und Pumpkammern für Laser werden auch nichtsphärische Spiegel eingesetzt.



**Bild 9-9**

Bildkonstruktion beim Konkavspiegel. Der Konstruktionsstrahl 2 durch den Krümmungsmittelpunkt  $M$  ist zur besseren Übersicht nicht eingezeichnet

**Beispiel 9.1.2a** Bei einem speziellen 1 m langem Laser sollen die Brennpunkte der beiden gleichen Laserspiegel zusammenfallen. Wie groß ist der Krümmungsradius  $r$  der Spiegel?

Es gilt:  $f = 50 \text{ cm}$  und nach (9.5a)  $r = 2f = 1 \text{ m}$ .

**Beispiel 9.1.2b** Berechnen Sie die Bildlage und den Abbildungsmaßstab bei einem Rasierspiegel (konkav) mit einem Krümmungsradius von  $r = 40 \text{ cm}$ . Der Gegenstand soll sich  $a = 10 \text{ cm}$  vor dem Spiegel befinden.

Mit  $f = r/2 = 20 \text{ cm}$  gilt (9.6b):  $1/a' = 1/f - 1/a$ ,  $a' = -20 \text{ cm}$  (virtuelles Bild) und  $\beta = -a'/a = 2$ .

**Beispiel 9.1.2c** Der Rückspiegel eines Autos bildet einen 10 m entfernten Gegenstand 200fach verkleinert ab. Wie groß sind die Brennweite  $f$  und Krümmungsradius  $r$ ? Ist der Spiegel konkav oder konvex?

Nach (9.6a):  $y'/y = -a'/a = 1/200$  und  $a = 10 \text{ m}$  folgt:  $a' = -0,05 \text{ m}$ . Aus (9.6b) folgt:  $1/f = 1/a + 1/a'$ ,  $f = -0,0503 \text{ m} \approx a'$  und  $|r| = 2|f| \approx 0,1 \text{ m}$ . Die Brennweite ist negativ: der Spiegel ist konvex.

### 9.1.3 Linsen

Die abbildenden Eigenschaften von Hohlspiegeln und Linsen sind ähnlich, obwohl die physikalischen Prinzipien verschieden sind. Bei Spiegeln tritt Reflexion, bei Linsen Brechung auf. Das Gemeinsame an beiden Bauelementen ist, dass einfallende Strahlen abgelenkt werden. Im Rahmen der *Gauß'schen Näherung* ist (bei fester Gegenstandweite) der Ablenkinkel proportional zum Abstand von der optischen Achse. In diesem Abschnitt wird auf die Ableitung der Linsengleichung zunächst verzichtet. Sie werden mit anderen Vorzeichenregeln von den Hohlspiegeln übernommen. Ein kurzer Beweis für die Linsengleichungen wird am Ende des Abschnittes nachgetragen. In der Optik werden meist Linsen mit sphärischen Flächen eingesetzt. Im Folgenden werden zunächst *dünne Linsen* behandelt, bei denen die Dicke in den Rechnungen vernachlässigt wird.

#### Brennweite

Fällt achsenparalleles Licht von *links* auf eine Linse, wird das Licht im *bildseitigen Brennpunkt F'* gebündelt. Der Abstand des Brennpunkts F' von der Linse ist die *bildseitige Brennweite f'*. Fällt achsenparalleles Licht von *rechts* auf eine Linse, wird das Licht im *gegenstandsseitigen Brennpunkt F* gebündelt. Der Abstand des Brennpunkts F von der Linse ist die *gegenstandsseitige Brennweite f*. Es wird für Linsen folgende Vorzeichenregel eingeführt:

*Gegenstands- und Bildweite (a, a') sind positiv rechts von der Linse und negativ links von der Linse. Gegenstands- und Bildgröße (y, y') zählen positiv senkrecht nach oben, negativ nach unten. Das Licht kommt von links. Die Regeln entsprechen DIN 1336.*

Im Folgenden werden nur Linsen betrachtet, die nach beiden Seiten von Luft umgeben sind. In diesem Fall gilt:

$$f' = -f . \quad \text{Brennweiten } f' \text{ und } f \quad (9.7a)$$

Für Sammellinsen ist  $f'$  positiv. Aus diesem Grund wird im Folgenden die Brennweite einer Linse durch  $f'$  angegeben. Die Brennweite  $f'$  ist durch die Brechzahl  $n$  und die Krümmungsradien  $r_1$  und  $r_2$  bestimmt:

$$\frac{1}{f'} = D = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \quad \text{Brennweite } f' \quad (9.7b)$$

Folgende Vorzeichenregel ist zu beachten: für  $r > 0$  zeigt der Radiusvektor nach links (Bild 9-10). Für Sammellinsen erhält man positive, für Zerstreuungslinsen negative Brennweiten. Den reziproken Wert der Brennweite

$$D = \frac{1}{f'} \quad [D] = \frac{1}{\text{m}} \text{ Dioptrie} \quad \text{Brekraft } D \quad (9.7c)$$

nennt man *Brekraft*. Die Stärke einer Brille wird meist in Dioptrien angegeben, wobei die Einheit meist weggelassen wird.

bikonvex	plan-convex	pos. Menikus	bikonkav	plan-konkav	neg. Meniskus
$r_1 > 0$ $r_2 < 0$	$r_1 = \infty$ $r_2 < 0$	$r_1 < r_2 < 0$	$r_1 < 0$ $r_2 > 0$	$r_1 = \infty$ $r_2 < 0$	$r_2 < r_1 < 0$
$f' > 0$	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' < 0$

Bild 9-10 Linsenformen und Krümmungsradien (Radiusvektor nach links:  $r > 0$ )

### Bildkonstruktion

Bei der Brechung von Lichtstrahlen durch eine dünne Linse kann diese durch Hauptebene H repräsentiert werden. Die Konstruktion des Bildes erfolgt analog zu den Hohlspiegeln (Bilder 9-11a und b):

1. Der Parallelstrahl läuft nach der Brechung durch den Brennpunkt.
2. Der Mittelpunktstrahl durchdringt die Linse ungebrochen.
3. Der Brennpunktstrahl wird nach der Brechung Parallelstrahl.

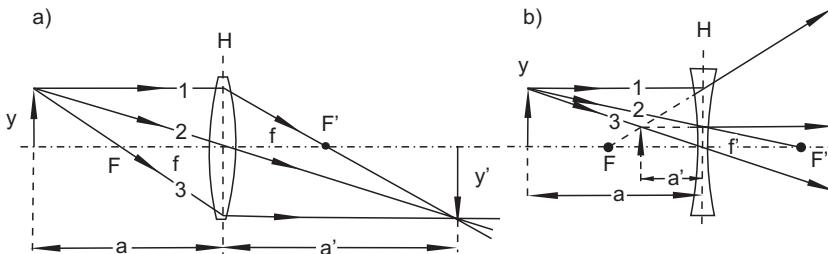


Bild 9-11 Bildkonstruktion für Linsen: a) Sammellinse b) Zerstreuungslinse

Bei der Bildkonstruktion durch eine Zerstreuungslinse (Bild 9-11b) ist zu beachten, dass die Brennweite  $f'$  negativ und die Lage der Brennpunkte F, F' gegenüber einer Sammellinse vertauscht sind. Die gestrichelten Linien stellen keine realen Lichtstrahlen dar. Sie sind erforderlich, um ein virtuelles Bild zu finden. Bild 9-12 und Tabelle 9.2 fassen verschiedene Fälle für Sammellinsen zusammen und geben Hinweise auf technische Anwendungen.

Virtuelle Bilder können nicht auf einem Schirm aufgefangen werden.

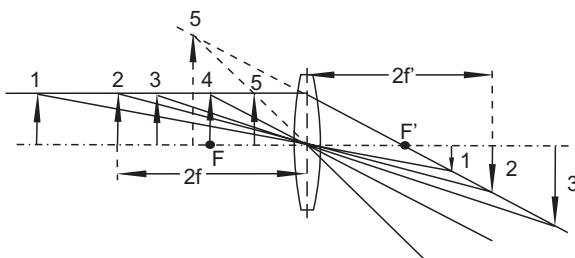


Bild 9-12  
Abbildung durch eine Linse bei unterschiedlichen Gegenstandsweiten (siehe auch Tabelle 9.2)

**Tabelle 9.2** Abbildung durch Linsen und Anwendungen (Bild 9-12)

Gegenstand	Bildlage	Bildart	Vergrößerung	Anwendung
1) $ a  > 2 f $	$f' < a' < f'$	reell	$< 1$	Fernrohr, Kamera, Auge
2) $ a  = 2 f $	$a' = 2f'$	reell	$= 1$	Bildumkehr
3) $2 f  >  a  >  f $	$a' > 2f'$	reell	$> 1$	Projektor
4) $ a  \approx  f $	$a' \rightarrow \infty$		$\rightarrow \infty$	Mikroskop, Projektor
5) $ a  \ll f$	$a' \approx 0$	virtuell	$> 1$	Lupe

### Linsensysteme

Eine Kombination aus zwei dünnen Linsen in Abstand  $d$  voneinander kann als eine einzige Linse mit Brechkraft  $D = 1/f'$  aufgefasst werden:

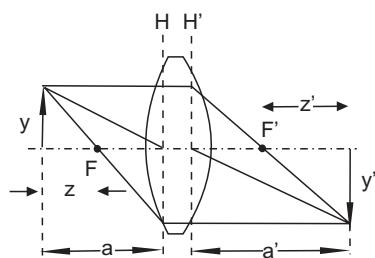
$$D = \frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{d}{f'_1 f'_2}. \quad \text{Linsensystem} \quad (9.8a)$$

Legt man die Linsen direkt übereinander ist  $d = 0$  und es addieren sich die beiden Brechkräfte:

$$D = D_1 + D_2. \quad \text{Linsensystem, Brechkraft } D \quad (9.8b)$$

### Dicke Linsen

Die bisherigen Betrachtungen vernachlässigen die Ausdehnung der Linsen. Bei dicken Linsen führt man die *beiden Hauptebenen*  $H$  und  $H'$  ein. Misst man Gegenstands-, Bild- und Brennweite ab der entsprechenden Hauptebene, so verläuft die Brechung und Bildkonstruktion genau wie bei dünnen Linsen (Bild 9-13). Die Hauptebenen können experimentell bestimmt werden.

**Bild 9-13**

Bildkonstruktion bei dicken Linsen. Alle Abstände werden von den Hauptebenen  $H$  und  $H'$  aus gemessen

### Abbildungsgleichungen

Zur Formulierung der *Abbildungsgleichungen* sind die bereits zitierten *Vorzeichenregeln* nach DIN 1335 notwendig:

*Koordinatenursprung ist die Hauptebene. Abstände nach rechts sind positiv, nach links negativ; Bildgrößen nach oben zählen positiv nach unten negativ.*

Unter Beachtung dieser Regeln werden (9.6a und b) für Hohlspiegel leicht modifiziert übernommen:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} \quad \text{und} \quad \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{a}. \quad \text{Abbildungsgleichungen} \quad (9.9a)$$

Dabei sind  $\beta$  der Abbildungsmaßstab,  $f'$  die Brennweite der Linse,  $y$  die Gegenstandsgröße,  $y'$  die Bildgröße,  $a$  der Abstand des Gegenstandes vom Spiegel und  $a'$  der Abstand des Bilds vom Spiegel. (Aufgrund der unterschiedlichen Vorzeichenregeln für Hohlspiegel und Linsen ändert sich das Vorzeichen vor der Bildweite  $a'$ .)

Die letzte Gleichung kann in die *Newton'sche Form* gebracht werden:

$$zz' = -f'^2.$$

Newton'sche Abbildungsgleichungen (9.9b)

In (9.9b) werden die Gegenstands- und Bildweite ( $z, z'$ ) vom jeweiligen Brennpunkt ( $F, F'$ ) aus gemessen (Bild 9-13).

### Farbfehler (chromatische Aberration)

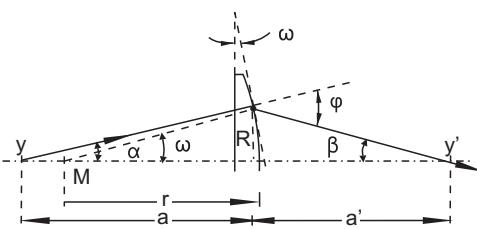
Nach (9.7) hängt die Brechkraft  $D$  einer Linse von  $n-1$  ab. Tabelle 9.1 zeigt, dass die Brechzahl  $n$  für blaues Licht gegenüber rotem ansteigt. Damit ist die Brennweite einer Linse  $f' = 1/D$  für Blau kleiner als für Rot. Bei der optischen Abbildung entstehen somit *Farbfehler*, die sich in bunten Bildsäumen bemerkbar machen. Diese Fehler können teilweise durch eine Kombination von Linsen korrigiert werden, z. B. eine Sammellinse aus Kronglas und eine Zerstreuulinse aus Flintglas (Achromat).

### Öffnungsfehler (sphärische Aberration)

Die Gültigkeit der Abbildungsgleichungen 9.9 ist auf achsennahe Strahlen begrenzt (Gauß'sche Näherung). Achsenferne Strahlen im Randbereich einer sphärischen Linse werden stärker gebrochen und die Brennweite wird kürzer. Diesen Linsenfehler nennt man *sphärische Aberration* oder *Öffnungsfehler*. Er kann durch eine Blende von der Linse verringert werden. Durch Kombination einer Sammel- und Zerstreuulinse unterschiedlicher Brechzahlen wurden so genannte *Aplanate* mit kleinem Öffnungsfehler entwickelt.

### Astigmatismus

Durch Fertigungsfehler kann eine Linsenfläche je nach Richtung verschiedene Krümmungsradien aufweisen. Den entsprechenden Bildfehler nennt man *Astigmatismus*, der häufig beim Auge auftritt. Auch bei ideal sphärischen Linsen kommt Astigmatismus vor, wenn ein Lichtbündel schräg einfällt.



**Bild 9-14**  
Zur Ableitung der Linsenformel

### Ableitung der Abbildungsgleichungen

Im Folgenden wird die Ableitung der Linsenformeln 9.7 und 9.9 am Beispiel einer dünnen Plan-Konvex-Linse äußerst knapp aber vollständig angedeutet (Bild 9-14). Für den gezeichneten

ten Strahl wirkt die Linse wie ein Prisma mit dem kleinen Dachwinkel  $\omega$ . Nach der Prismengleichung (9.4) gilt in der Näherung  $\sin x \approx x$  für den Ablenkinkel:  $\varphi = \omega(n-1)$ . Der Dachwinkel  $\omega$  beträgt  $\omega \approx R/r$ , wobei  $r$  der Radius der Linsenfläche und  $R$  der Abstand von der Achse bedeuten. Weiterhin gelten  $\varphi = \alpha + \beta$  mit  $\alpha \approx -R/a$  und  $\beta = R/a'$ . Kombiniert man diese Gleichungen, resultiert:

$$\frac{n-1}{r} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a}.$$

Man erhält daraus (9.7) und (9.9), was zu beweisen war.

### Fresnel-Linse

Für einfache Abbildungsaufgaben werden linsenähnliche Strukturen in Kunststofffolien geprägt. Es handelt sich um Kreisringzonen mit prismatischem Profil, die parallel einfallendes Licht in einem gemeinsamen Brennpunkt fokussieren. Man erhält *Fresnel-Linsen*, indem eine Plan-Konvex-Linse zonenförmig aufgeteilt und in axialer Richtung zusammengeschoben wird.

**Beispiel 9.1.3a** Die Brennweite des Auges beträgt (ungefähr) 20,0 mm. Wie verändert sich die Brennweite durch eine Brille der Stärke 2 ( $D_B = 2$  Dioptrien =  $2 \text{ m}^{-1}$ )?

Die Brechkraft des Auges beträgt nach (9.8a):  $D_A = 1/f' = 1/(20 \cdot 10^{-3}) \text{ m}^{-1} = 50 \text{ m}^{-1}$ . Für die Brechkraft mit Brille ergibt sich  $D = D_A + D_B = 52 \text{ m}^{-1}$  und für die Brennweite  $1/D = 1,92 \text{ cm}$ .

**Beispiel 9.1.3b** Eine dünne bikonvexe Linse ( $n = 1,530$ ) mit zwei gleichen Krümmungsradien bildet einen 1 m entfernten Gegenstand 20 cm von der Linsenmitte ab. Bestimmen Sie die Brennweite  $f'$  und Krümmungsradien  $r$ .

Aus (9.9a)  $1/a' = 1/f' + 1/a$  (mit  $a = -1 \text{ m}$ , Vorzeichenregel beachten!),  $a' = 0,2 \text{ m}$  folgt:  $f' = 0,1667 \text{ m}$ .

Für  $r$  ergibt sich aus (9.7b)  $1/f' = (n-1)(1/\eta_1 - 1/\eta_2)$  (mit  $\eta_1 = \eta_2 = -r$ , Vorzeichenregel beachten!):

$$r = 2(n-1)f' = 0,177 \text{ m}.$$

**Beispiel 9.1.3c** Ein Gegenstand befindet sich 8 cm vor einer Linse mit  $f' = 3 \text{ cm}$ . Wo liegt das Bild? Wie groß ist der Abbildungsmaßstab? Berechnen Sie das Gleiche mit  $f' = -3 \text{ cm}$ .

Aus (9.9a)  $1/a' = 1/(-8\text{cm}) + 1/(3\text{cm})$  (Vorzeichenregel beachten!) folgt für die Bildweite:  $a' = 4,8 \text{ cm}$ . Damit wird der Abbildungsmaßstab:  $y'/y = a'/a = -0,6$ .

Für  $f' = -3 \text{ cm}$  erhält man:  $a' = -2,2 \text{ cm}$  und  $y'/y = a'/a = 0,27$ .

## 9.1.4 Auge

### Anatomischer Aufbau

Das Auge ist nahezu kugelförmig und wird von der weißen Sehnenshaut umschlossen (Bild 9-15). An der Vorderseite geht sie in die vorgewölbte durchsichtige Hornhaut (Cornea) über. Dahinter befindet sich die Regenbogenhaut (Iris) mit der Pupille. Darauf folgt die Linse mit verschiedenen gekrümmten Flächen. Die Innenräume des Auges, die vordere und große Augenkammer, sind mit einer durchsichtigen Substanz gefüllt. Die Innenwand der großen Augenkammer ist mit der Aderhaut ausgekleidet, darüber liegt die Netzhaut (Retina), welche die lichtempfindlichen Sehzellen enthält. Die Sehnerven treten von hinten in das Auge, das an dieser Stelle lichtunempfindlich ist (Blinder Fleck). Etwas höher liegt der Gelbe Fleck (Macula lutea), die Stelle des schärfsten Sehens. Die Sehachse geht durch die Pupillenmitte und den Gelben Fleck mit der Netzhautgrube.

### Optische Eigenschaften

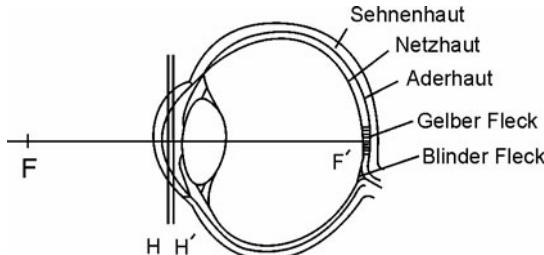
Die abbildende Wirkung des Auges wird durch die Linse und überwiegend durch die gekrümmte Hornhaut bewirkt. Die Brennweite des Auges kann sich im Bereich zwischen 19 mm und 23 mm einstellen, je nach Entfernung des betrachteten Gegenstandes (*Akkommodation*). Als

Bezugssehweite oder deutliche Sehweite  $a$  bezeichnet man die Entfernung, in die man einen Gegenstand bei genauer Betrachtung hält. Die deutliche Sehweite wird in den Normen zu

$$a = 25 \text{ cm.}$$

$$\text{Deutliche Sehweite } a \quad (9.10)$$

festgelegt.



**Bild 9-15**

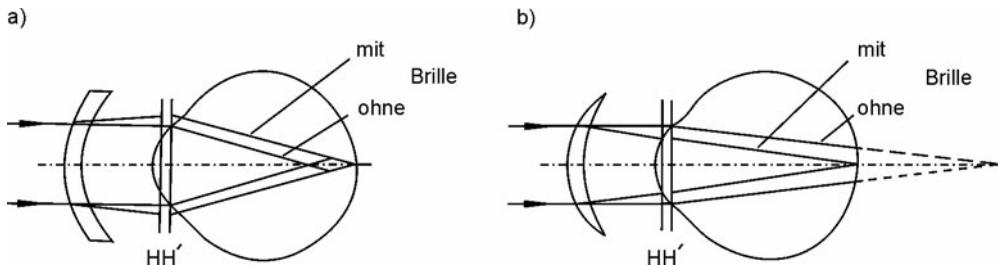
Anatomischer Aufbau des Auges

Der kleinste auflösbare Sehwinkel beträgt etwa 1 Winkelminute =  $3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ .

Diese Grenze wird einerseits durch die Beugung des Lichtes an der Pupille gegeben (siehe Abschnitt 9.2). Andererseits wird dieser Winkelabstand durch die Dichte der Sehzellen auf der Netzhaut begrenzt. Mit den Zäpfchen können Farben unterschieden werden, während die sensibleren Stäbchen nur schwarzweiß-empfindlich sind. Der Abstand der Stäbchen auf der Netzhaut liegt um  $5 \mu\text{m}$ ; bei den Zäpfchen ist er etwa 4-mal so groß. Die Farbauflösung des Auges ist somit schlechter als für Schwarzweiß.

### Brille

Bei *Kurzsichtigkeit* ist die Brechkraft des Auges so groß, dass parallel einfallendes Licht von einem entfernten Gegenstand vor der Netzhaut vereinigt wird. Erst im Nahbereich kann der Kurzsichtige scharf sehen. Zur Korrektur wird eine Brille mit Zerstreuungslinsen verwendet (Bild 9-16a).



**Bild 9-16** Korrektur von Augenfehlern durch eine Brille:  
a) Kurzsichtigkeit b) Weitsichtigkeit

Bei *Weitsichtigkeit* ist die Brechkraft zu gering, so dass der Brennpunkt hinter dem Auge liegt (Bild 9-16b). Bei entfernten Gegenständen kann dieser Fehler teilweise durch Akkommodation ausgeglichen werden. Bei kurzen Abständen hilft jedoch nur eine Brille mit Sammellinsen.

### Lupe

Eine Lupe ist eine Sammellinse mit einer Brennweite im cm-Bereich, die zur Vergrößerung des Sehwinkels  $\Gamma$  dient. Die Winkelvergrößerung  $\Gamma$  optischer Geräte ist definiert durch den

Sehwinkel  $\sigma'$ , unter dem ein Gegenstand unter Zuhilfenahme des Gerätes erscheint, und den Winkel  $\sigma$  beim Betrachten mit dem bloßen Auge in der Entfernung  $a = 25 \text{ cm}$ :

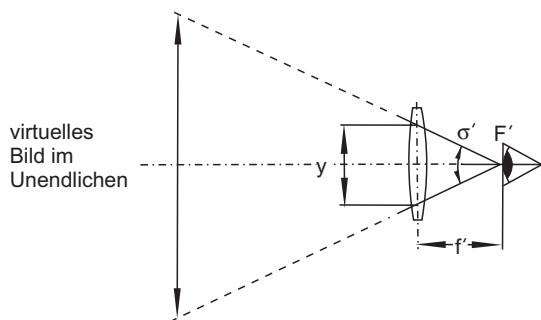
$$\Gamma = \frac{\sigma'}{\sigma}.$$

Vergrößerung  $\Gamma$  (9.11)

Die Vergrößerung  $\sigma'/\sigma$  einer Lupe hängt von der Brennweite  $f'$  und der Art des Gebrauches ab. Zur Einstellung der *Normalvergrößerung* hält man die Lupe so, dass der Gegenstand in der Brennebene liegt. Das Gesichtsfeld wird am größten, wenn sich das Auge möglichst am anderen Brennpunkt der Linse befindet, die Vergrößerung hängt jedoch davon nicht ab. Nach Bild 9-17 liegt das entstehende Bild des Gegenstandes im Unendlichen. Der Sehwinkel  $\sigma'$  beträgt  $\sigma' \approx y/f'$ . Ohne Lupe hält man den Gegenstand in der deutlichen Sehweite  $a = 25 \text{ cm}$ , d. h. der Sehwinkel beträgt  $\sigma \approx y/a$ . Die Winkelvergrößerung  $\Gamma$ , in diesem Fall die Normalvergrößerung, beträgt somit:

$$\Gamma = \frac{a}{f'} \quad \text{mit } a = 25 \text{ cm.}$$

Lupen-Normalvergrößerung  $\Gamma$  (9.12a)



**Bild 9-17**  
Zur Normalvergrößerung einer Lupe.  
Der Gegenstand liegt im Brennpunkt,  
das virtuelle Bild im Unendlichen

Man kann die Lupe auch so halten, dass das entstehende Bild in der deutlichen Sehweite  $a = 25 \text{ cm}$  liegt. Man beweise selbst, dass in diesem Fall die Vergrößerung folgenden Wert annimmt:

$$\Gamma = \frac{a}{f'} + 1.$$

Lupenvergrößerung (9.12b)

Okulare von optischen Geräten, wie Fernrohr oder Mikroskop, funktionieren im Prinzip als Lupe.

**Beispiel 9.1.4a** Das Auge hat eine Brennweite von  $f' = 23,0 \text{ mm}$ . Die Augenlinse ist in der Lage, die Brechkraft des Auges um  $10 \text{ dpt} = 10 \text{ 1/m}$  zu vergrößern (Akkommodation). Wie verändert sich die Brennweite des Auges?

Ohne Akkommodation:  $D = 1/f' = 43,5 \text{ m}^{-1}$ . Mit Akkommodation:  $D^* = D + 10 \text{ m}^{-1} = 53,5 \text{ m}^{-1}$  und  $f^* = 18,7 \text{ mm}$ . Das Auge kann also die Brennweite zwischen 18,7 und 23,0 mm verändern.

**Beispiel 9.1.4b** Welche Brennweite hat eine Lupe mit einer Normal-Vergrößerung von 10x?

Man erhält für die Brennweite nach (9.12a):  $f' = a/\Gamma = 25 \text{ cm}/10 = 2,5 \text{ cm}$ .

**Beispiel 9.1.4c** Berechnen Sie (nach den Gesetzen der Geometrischen Optik) den Radius  $r$  des Brennflecks auf der Netzhaut, wenn ein Laserstrahl mit dem halben Divergenzwinkel  $\theta = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$  in das Auge fällt ( $f_{\text{Auge}} = 23 \text{ mm}$ ).

Ein achsenparalleles Lichtbündel erzeugt (nach der Geometrischen Optik) ein Lichtpunkt im Brennpunkt des Auges. Ist das parallele Bündel um den Winkel  $\theta = 1,6 \cdot 10^{-4}$  rad gekippt, so verschiebt sich der Punkt um:  
 $r = f_{Auge}\theta = 3,7 \mu\text{m}$ . Die Aufgabe kann auch mit Hilfe der Wellenoptik berechnet werden.

**Beispiel 9.1.4d** Der kleinste auflösbare Schwinkel beträgt  $\theta = 3 \cdot 10^{-4}$  rad. Welchen Abstand  $y$  kann man in  $x = 1$  m und 100 m noch auflösen?

Es gilt näherungsweise:  $\theta = 3 \cdot 10^{-4}$  rad  $= y/x$ . Damit folgt:  $y = 0,3$  mm ( $x = 1$  m) und  $y = 3$  cm (für  $x = 100$  m).

## 9.1.5 Photoapparat

### Öffnungsverhältnis

Die Prinzipien der Abbildung bei Photoapparat und Auge sind ähnlich. Das Objektiv erzeugt ein umgekehrtes verkleinertes Bild auf dem Film. Zur Erzielung kurzer Belichtungszeiten soll das Objektiv einen möglichst großen Durchmesser  $d$  aufweisen. Da jedoch mit zunehmender Öffnung die Linsenfehler anwachsen, ist eine Korrektur der Objektive gegen diese Fehler notwendig. Ein Maß für die Qualität des Objektivs ist das Öffnungsverhältnis  $1 : k_{\min}$ , das wie folgt definiert ist:

$$\text{Öffnungsverhältnis} = 1 : k_{\min} = \frac{d}{f'} . \quad \text{Öffnungsverhältnis} \quad (9.13)$$

Ein Objektiv mit  $f' = 45$  mm und einem Öffnungsverhältnis 1: 2,8 besitzt einen Durchmesser der so genannten *Eintrittspupille* von  $d = 16$  mm.  $k_{\min} = 2,8$  ist die minimale Blendenzahl. Durch eine Blende mit den Werten  $k = 1,4, 2, 2,8, 4, 5,6, 8, 12, 16$  und 22 kann der Durchmesser verkleinert werden. Die Werte sind so abgestuft, dass sich die Fläche jeweils halbiert. Damit verdoppelt sich die notwendige Belichtungszeit.

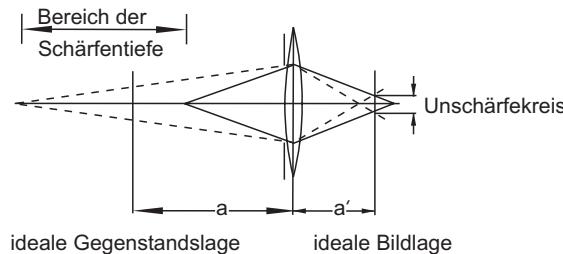
### Brennweite

Die Brennweite des Objektivs bestimmt das Gesichtsfeld, das auf dem Film gespeichert wird. Möchte man ein kleines Gesichtsfeld photographieren, benötigt man Teleobjektive mit großer Brennweite  $f'$ .

Rückt man beim Photographieren den Gegenstand näher heran, verlängert sich die Bildweite und das Objektiv muss herausgedreht werden. Dies geht nur bis zu einer gewissen Grenze. Bei noch kürzeren Abständen werden Zwischenringe eingesetzt oder die Brennweite wird durch eine Vorsatzlinse verkürzt.

### Schärfentiefe

Auf dem Film wird nur eine Gegenstandsebene scharf abgebildet. Bildpunkte außerhalb der idealen Ebene verursachen einen Unschärfekreis. Bei Verwendung kleiner Blenden reduziert sich die Unschärfe (Bild 9-18) und man erhält eine hohe Schärfentiefe, die oft auf dem Objektiv abgelesen werden kann. Man versteht unter diesem Begriff den Bereich der Gegenstandsweite, der scharfe Bilder ergibt.

**Bild 9-18**

Zur Erklärung der Schärfentiefe.  
Der Unschärfekreis verkleinert sich  
beim Zuziehen der Blende

**Beispiel 9.1.5a** Welche Fläche der Erde wird von einer Kamera mit  $f' = 5 \text{ cm}$  auf einem Film  $20 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$  aus einer Höhe von  $g = 5 \text{ km}$  abgebildet?

Aus (9.9a) folgt:  $y/y' = a/a'$  mit  $y' = 0,02 \text{ m}$ ,  $a' = 0,05 \text{ m}$  und  $a = -5000 \text{ m}$  (Vorzeichenregel!).

Daraus folgt  $y = y'a/a' = -2000 \text{ m}$ . Die Fläche beträgt somit  $4 \text{ km}^2$ .

**Beispiel 9.1.5b** Um welche Strecke  $s$  muss das Objektiv einer Kamera mit  $f' = 5 \text{ cm}$  verschiebbar sein, damit eine Einstellung zwischen  $0,7 \text{ m}$  und Unendlich möglich ist.

Bei  $a = -0,7 \text{ m}$  (Vorzeichenregel!) berechnet sich  $a'$  nach (9.9a) aus  $1/a' = 1/a + 1/f'$  zu  $a' = 53,8 \text{ m}$ .

Bei  $a = -\infty$  gilt  $a'_\infty = f' = 50 \text{ mm}$ . Damit beträgt  $s = a' - f' = 3,8 \text{ mm}$ .

**Beispiel 9.1.5c** Ein Digitalkamera hat eine Chipbreite von  $x = 5 \text{ mm}$ . Die Brennweite beträgt  $f' = 2 \text{ cm}$ . Wie groß ist Winkelbereich  $2\alpha$ , unter dem Objekt aufgenommen werden können?

Es gilt:  $\tan \alpha \approx (x/2)/f' = 2,5/20 = 0,125$  und  $2\alpha \approx 14^\circ$ .

**Beispiel 9.1.5d** Ein Objektiv ( $f' = 5 \text{ cm}$ ) ein Öffnungsverhältnis von  $1:1,6$ .

Wie groß ist der Durchmesser des Objektivs  $D$ ?

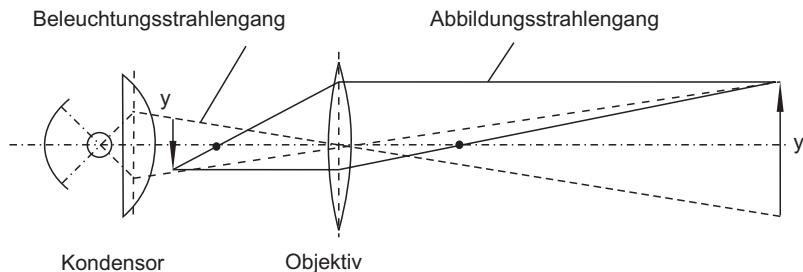
Es gilt (9.13):  $1:1,6 = d/f'$  und  $d = f'/1,6 = 3,1 \text{ cm}$ .

## 9.1.6 Projektor

Das Objektiv eines Bildprojektors entwirft ein vergrößertes, umgekehrtes, reelles Bild auf einem Schirm oder einer Wand. Der Gegenstand befindet sich zwischen der einfachen und doppelten Brennweite des Objektivs. Bei hohen Vergrößerungen ist die Gegenstandsweite nur wenig größer als die Brennweite.

### Diaprojektor und Beamer

Zur Abbildung dienen durchsichtige von hinten beleuchtete Objekte. Durch einen *Kondensor* wird erreicht, dass das durch das Objekt tretende Licht nahezu vollständig durch das *Objektiv* auf den Projektionsschirm gelangt. Dazu ist es notwendig, dass der Kondensor die Lichtquelle in das Objektiv abbildet.



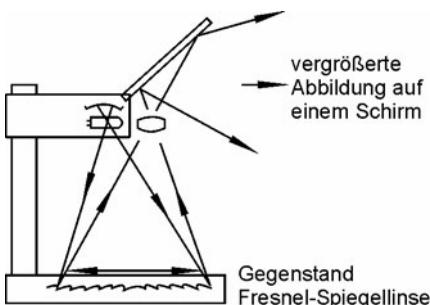
**Bild 9-19** Prinzip eines Projektors. Man unterscheidet zwischen dem Strahlengang der Abbildung und der Beleuchtung

Man unterscheidet nach Bild 9-19 zwischen dem *Abbildungs- und Beleuchtungsstrahlengang*. Bei gegebenem Abstand Projektor-Wand bestimmt die Brennweite des Objektivs die Bildgröße. Man benötigt also für verschiedene lange Räume und Bildgrößen Projektoren mit unterschiedlichen Brennweiten.

Als Projektor für Computer benutzt man Beamer, bei denen als Objektiv ein transparentes Display aus Flüssigkristallen verwendet wird.

### Schreibprojektor

Beim Overhead-Projektor werden durchsichtige Folien im Format einer Schriftseite im unverdunkelten Raum projiziert. Als Lichtquelle dient eine leistungsfähige Halogenlampe und als Kondensator eine flache Fresnellinse, die sich unmittelbar unter der Schreibfläche befindet. Bei Beleuchtung von oben wird die Konstruktion kompakter (Bild 9-20). In diesem Fall setzt man als Kondensator eine Fresnelspiegellinse ein.



**Bild 9-20**

Aufbau eines Schreibprojektors mit Beleuchtung von oben. Der Abbildungsstrahlengang verläuft wie in Bild 9.19 und ist nicht gezeichnet. (Die Strukturen der Fresnel-Spiegellinse sind nicht maßstabsgerecht.)

### Filmprojektor

Der optische Strahlengang bei Filmprojektoren ist dem der Diaprojektoren analog. Durch die unterschiedliche Größe der zu projizierenden Objekte ergeben sich andere Brennweiten.

**Beispiel 9.1.6a** Berechnen Sie die Brennweite des Objektivs eines Beamers, welches das 24 mm hohe Display auf eine  $a' = 4$  m entfernte Wand 1,5 m groß abbildet.

Es gilt (9.9a):  $y'/y = a'/a = -150/2,4 = -62,5$  (Das Minuszeichen gibt eine Bildumkehr an.).

Aus  $1/f' = 1/a' - 1/a$  erhält man mit  $a' = 400$  cm und  $a = -a'/62,5 = -6,4$  cm die Brennweite  $f' = 6,3$  cm.

**Beispiel 9.1.6b** Ein Schreibprojektor mit einer Brennweite von  $f' = 50$  cm liefert an einer 5 m entfernten Wand ein Bild mit 2 m x 2 m. Wie groß sind Gegenstand und Gegenstandsweite?

Aus (9.9a)  $1/a = 1/a' - 1/f'$  folgt mit  $a' = 5$  m und  $f' = 0,5$  m: Gegenstandsweite  $a = -0,56$  m.

Die Gegenstandsgröße  $y$  berechnet man aus  $y'/y = a'/a$  zu:  $y = -0,22$  m (Bildumkehrung!).

### 9.1.7 Fernrohr

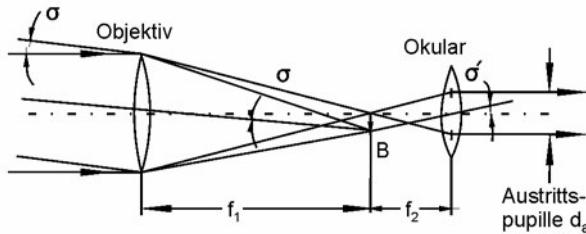
Fernrohre dienen zur Vergrößerung des Sehwinkels weit entfernter Gegenstände. Die Vergrößerung  $\Gamma$  wird wie bei der Lupe definiert; sie ist durch die Sehwinkel beim Beobachten mit und ohne Instrumente ( $\sigma'$  und  $\sigma$ ) gegeben:

$$\Gamma = \frac{\sigma'}{\sigma}.$$

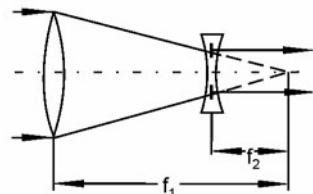
Vergrößerung  $\Gamma$  (9.11)

Man unterscheidet Fernrohre zum Beobachten von terrestrischen oder astronomischen Objekten, sowie Fernrohre für Sonderzwecke, z. B. für Mess- und Prüfaufgaben.

a) Kepler



b) Galilei



**Bild 9-21** Strahlengang durch ein a) Kepler-Fernrohr b) Galilei-Fernrohr. (Der „Strich“ bei den Brennweiten  $f_1, f_2$  wird weggelassen.)

### Kepler-Fernrohr

Das *Objektiv* entwirft von einem weit entfernten Gegenstand ein Bild in der Brennebene. Dieses verkleinerte umgekehrte Bild wird mit dem *Okular*, das wie eine Lupe funktioniert, vergrößert betrachtet (Bild 9-21a). Der weit entfernte Gegenstand erscheint ohne Instrument unter dem Sehwinkel  $\sigma$ . Nach Bild 9-21 kann die Bildgröße  $B$  aus der Brennweite des Objektivs  $f_1$  näherungsweise berechnet werden:

$$\sigma = \frac{B}{f_1}.$$

Das Okular mit der Brennweite  $f_2$  wird so eingestellt, dass das Zwischenbild in dessen Brennebene fällt. Es wirkt als Lupe (Bild 9-17); das entstehende Bild wird unter dem Sehwinkel

$$\sigma' = \frac{B}{f_2}.$$

erblickt (Bild 9.21a). Damit ergibt sich für die Vergrößerung eines Fernrohres:

$$\Gamma = \frac{f_1}{f_2}.$$
Fernrohr-Vergrößerung  $\Gamma$       (9.14a)

Das Bild beim Kepler'schen Fernrohr „steht auf dem Kopf“, was in (9.14a) nicht berücksichtigt wurde.

### Prismenfernrohr

Die Baulänge von Kepler'schen Fernrohren ist gleich der Summe der Brennweiten von Objektiv und Okular  $f_1 + f_2$ . Bei terrestrischen Ferngläsern erfolgt eine Faltung des Strahlenganges durch den Einbau zweier totalreflektierender Umkehrprismen (Bild 9-5b). Die Baulänge wird verkürzt und die Bildumkehrung rückgängig gemacht.

### Bezeichnungen

Fernrohre werden durch die Vergrößerung  $\Gamma$  und den Durchmesser des Objektivs charakterisiert, z. B. 8 x 40. Bei dieser Bezeichnung gibt 8 x die Vergrößerung und 40 den Durchmesser in mm an. Der Objektivdurchmesser bestimmt die Helligkeit des Bildes.

Schaut man aus größerer Entfernung auf das Okular eines Fernglases, sieht man ein helles Scheibchen einige mm über dem Okular schweben. Es handelt sich um das Bild des Objektivs,

das vom Okular entworfen wird. Man bezeichnet es als *Austrittspupille*. Der Benutzer eines Fernrohres bringt seine Augenpupille an die Stelle der Austrittspupille. Daraus ergeben sich folgende Konsequenzen: Am Tage ist die Augenpupille klein, nachts ist sie weit geöffnet. Damit sind bei Taggläsern kleinere Objektivdurchmesser  $d$  möglich als bei Nachtgläsern. Für den Durchmesser der Austrittspupille  $d_A$  gilt näherungsweise (Bild 9-22a):

$$d_A = \frac{d}{\Gamma} . \quad \text{Fernrohr, Austrittspupille} \quad (9.14b)$$

### Galilei-Fernrohr

Dieser Fernrohrtyp, als Opernglas bekannt, hat eine kürzere Baulänge, da als Okular eine Zerstreuungslinse eingesetzt wird. Nach Bild 9-22b fallen die Brennpunkte von Objektiv und Okular, wie beim Kepler'schen Fernrohr, zusammen. Da jedoch  $f_2$  negativ ist, erhält man für die Baulänge  $f_1 - |f_2|$ . Bild 9-22b zeigt den Strahlengang zur Bildkonstruktion. Es entsteht ein aufrechtes Bild mit der Vergrößerung  $\Gamma = f_1 / f_2$  (9.14a). Da die Austrittspupille zwischen Objektiv und Okular liegt, ist das Gesichtsfeld eingeschränkt. Man beobachtet „wie durch ein Schlüsselloch“.

### Spiegelteleskop

In der Wellenoptik wird gezeigt, dass das Auflösungsvermögen eines Fernrohres mit steigendem Objektivdurchmesser zunimmt. Die Ursache dafür ist die Beugung am Rand des Objektivs. In der Astronomie möchte man möglichst viele Details erkennen und benötigt daher Objektive mit Durchmesser im m-Bereich. Da Linsen dieser Größe nicht herstellbar sind, wählt man Hohlspiegel mit Durchmessern bis zu 5 m.

### Messfernrohre

In der Technik und Wissenschaft werden Fernrohre für verschiedene Messaufgaben verwendet. Der Theodolit, ein drehbares Fernrohr, dient zur Winkelmessung. Bei Entfernungsmessern wird aus der Stellung des Okulars bei Scharfstellung des Bildes auf die Entfernung des Gegenstandes geschlossen. Ein Kollimator ist ein Projektor, der eine beleuchtete Strichplatte nach Unendlich abbildet. Er wird in Kombination mit einem Fernrohr zur Winkelmessung eingesetzt.

**Beispiel 9.1.7a** Was bedeuten die Bezeichnungen auf einem Fernglas: a) 5 x 35; 150 m und b) 7 x 21; 7,5° ?

Die erste Ziffer gibt die Vergrößerung  $\Gamma$  und die zweite den Durchmesser des Objektivs (Eintrittspupille) in mm. Hinter dem Semikolon steht der Durchmesser des Sehfeldes in 1000 m Entfernung oder der volle Schenkel des Sehfeldes.

**Beispiel 9.1.7b** Ein Fernglas (Kepler-Typ) trägt die Bezeichnung 8 x 30 und es besitzt eine Brennweite des Objektivs von  $f_1 = 12$  cm. Wie groß sind die Vergrößerung  $\Gamma$ , die Okularbrennweite  $f_2$ , die Baulänge  $l$  (bei ungefaltetem Strahlengang) und der Durchmesser der Austrittspupille  $d_A$ ?

Es gilt mit (8.14a und b):  $\Gamma = 8$ ,  $f_2 = f_1 / \Gamma = 1,5$  cm,  $l = f_1 + f_2 = 13,5$  cm,  $d_A = d / \Gamma = 3,75$  mm.

**Beispiel 9.1.7c** Ein Kepler-Fernrohr soll zur Vergrößerung des Durchmessers eines Laserstrahls  $d_1 = 0,7$  mm auf  $d_2 = 5$  mm eingesetzt werden. Die Baulänge soll  $l = 12$  cm betragen. Wie groß sind  $f_1$  und  $f_2$ ?

Für die Strahlaufweitung gilt mit Hilfe von Bild 9-21:  $f_2 / f_1 = d_2 / d_1 = 5 / 0,7 = 7,16$ . Die Baulänge beträgt:  $l = f_1 + f_2 = 12$  cm. Daraus folgt:  $f_1 + 7,16 \cdot f_1 = 12$  cm,  $f_1 = 1,47$  cm und  $f_2 = 10,53$  cm.

**Beispiel 9.1.7d** Ein Opernglas (Galilei-Typ) weist folgende Daten auf: Objektiv:  $f_1 = 8$  cm, Durchmesser  $d_1 = 3$  cm, Okular:  $f_2 = -2$  cm. Geben Sie Vergrößerung  $\Gamma$  und die Baulänge  $l$  an.

Aus (9.14) folgt:  $\Gamma = 4$ ,  $l = f_1 + f_2 = 6$  cm ( $f_2$  ist negativ!).

### 9.1.8 Mikroskop

#### Aufbau

Mit Mikroskopen werden kleine im Nahbereich liegende Gegenstände in zwei Stufen vergrößert abgebildet. Während beim Fernrohr Objektive großer Brennweite eingesetzt werden, liegt beim Mikroskop die Brennweite im mm-Bereich. Der Gegenstand befindet sich in der Nähe des Brennpunktes und das vergrößerte Zwischenbild wird im Tubus erzeugt (Bild 9-23a). Es wird mit dem Okular, das als Lupe wirkt, nochmals vergrößert. Die Gesamtvergrößerung  $\Gamma$  errechnet sich aus dem Abbildungsmaßstab des Objektivs  $\beta$  und der des Okulars  $\Gamma_{Ok}$ :

$$\Gamma = \beta \Gamma_{Ok} . \quad \text{Gesamtvergrößerung } \Gamma \quad (9.15a)$$

Die entsprechenden Werte für  $\beta$  und  $\Gamma_{Ok}$  sind auf dem Objektiv und Okular angegeben, z. B.  $\beta = 40$  und  $\Gamma_{Ok} = 12$ . Die Vergrößerung des Objektivs  $\beta$  kann man nach Bild 9-23a aus dessen Brennweite  $f_1$  berechnen. Es gilt näherungsweise:

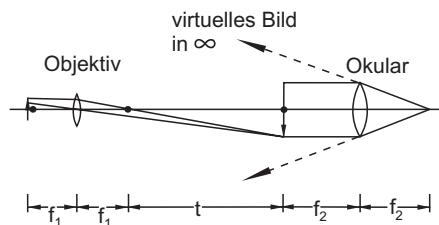
$$\beta = \frac{t}{f_1} . \quad \text{Objektivvergrößerung } \beta \quad (9.15b)$$

wobei  $t$  die Tubuslänge angibt. Sie ist als Abstand der Brennpunkte definiert und konstruktiv meist zu  $t = 160$  mm festgelegt. Die Vergrößerung des Okulars  $\Gamma_{Ok}$  ergibt sich aus der Lupenvergrößerung (9.12):

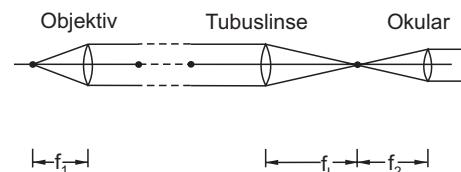
$$\Gamma_{Ok} = \frac{a}{f_2} . \quad \text{Okularvergrößerung } \Gamma_{Ok} \quad (9.15c)$$

wobei  $a = 25$  cm die deutliche Sehweite und  $f_2$  die Brennweite des Okulars angeben.

a) Mikroskop mit endlicher Tubuslänge



b) Mikroskop mit „Tubuslänge  $\infty$ “



**Bild 9-22** Aufbau von Mikroskopen. (Der „Strich“ bei den Brennweiten  $f_1, f_2$  wird weggelassen.)  
 a) Abbildung durch Objektiv und Okular (klassisches Mikroskop)  
 b) Mikroskop mit „Tubuslänge  $\infty$ “

#### Mikroskop mit Tubuslänge „unendlich“

Moderne Mikroskope sind oft anders aufgebaut. Der Gegenstand befindet sich genau in der Brennebene des Objektivs und wird nach Unendlich abgebildet, wie bei einem Kollimator (Bild 9-22b). Danach wirken ein Zwischenobjektiv (Tubuslinse) zusammen mit dem Okular als Kepler'sches Fernrohr. Diese Konstruktion hat den Vorteil, dass zwischen Objektiv und

Zwischenobjektiv ein paralleler Strahlengang vorliegt. Damit können durch einen Strahlteiler andere Strahlengänge zur Beleuchtung oder Beobachtung mit einer Fernsehkamera eingespiegelt werden.

Man berechnet die Gesamtvergrößerung  $\Gamma$  aus den Vergrößerungen des Objektivs  $\Gamma_{Ob}$  und des Fernrohrs  $\Gamma_F$ , bestehend aus Tubuslinse und Okular:

$$\Gamma = \Gamma_{Ob}\Gamma_F . \quad (9.16a)$$

Da das Objektiv mit der Brennweite  $f_1$  als Lupe wirkt, gilt:

$$\Gamma_{Ob} = \frac{a}{f_1} . \text{ Für das Fernrohr erhält man mit (9.14): } \Gamma_F = \frac{f_L}{f_2} , \quad (9.16b)$$

wobei  $f_L$  die Brennweite der Tubuslinse und  $f_{Ok}$  die des Okulars darstellen. Durch Umschreiben der Gleichungen resultiert für die Gesamtvergrößerung  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \Gamma_{Ob} q \Gamma_{Ok} \quad \text{mit} \quad q = \frac{f_L}{a} \quad \text{und} \quad \Gamma_{Ok} = \frac{a}{f_2} . \quad (9.16c)$$

Dabei ist  $q$  der *Tubusfaktor* und  $\Gamma_{Ok}$  die Vergrößerung des Okulars. Ein Beispiel für eine Mi-kroskopbeschriftung lautet: Objektiv 10 x, Tubus 1,25 x, Okular 5 x: die Gesamtvergrößerung beträgt 62,5.

Es wurden Mikroskope für unterschiedliche Aufgaben entwickelt: Mikroskope hoher Vergrößerung und Auflösung zur Beobachtung kleinstter Objekte, Operationsmikroskope geringerer Vergrößerung für medizinisches Arbeiten, Messmikroskope und andere.

Neben den Lichtmikroskopen gibt es Geräte, die auf anderen Prinzipien beruhen: Elektronenmikroskop, Tunnel-Mikroskop, Feld-Ionen- und Elektronenmikroskope und Laser-Scanning-Mikroskop (Abschnitt 10.1.3).

### Auflösungsvermögen

Die Wellenoptik in Abschnitt 9.2.4 zeigt, dass die Grenze der Auflösung, d. h. die Genauigkeit, mit der Strukturen sichtbar werden, durch die Lichtwellenlänge  $\lambda$  begrenzt ist. Man erhält für den kleinsten auflösbaren Abstand  $g$ :

$$g = \frac{\lambda}{2n \sin u} . \quad \text{Mikroskop, Auflösungsvermögen} \quad (9.26)$$

Dabei ist  $n$  die Brechzahl des Mediums zwischen dem Objekt und Objektiv und  $u$  der halbe Öffnungswinkel des Objektivs mit dem Durchmesser  $d$  und der Brennweite  $f_1$ :  $\tan u = d/(2 f_1)$ .

Man nennt  $n \sin u$  die *numerische Apertur*. Durch Einbringen eines Öltropfens zwischen Objekt und Objektiv mit  $n \approx 1,3$  erreicht man numerische Aperturen bis über 1. Damit können Strukturen mit  $g \approx \lambda/2$  sichtbar gemacht werden. Neben der Vergrößerung ist die numerische Apertur ein wichtiges Charakteristikum für die Funktion und Qualität eines Mikroskops.

**Beispiel 9.1.8a** Ein Mikroskop ist mit einem Objektiv 40x und einem Okular 12x ausgestattet. Geben Sie die Gesamtvergrößerung  $\Gamma$ , die Brennweiten und die genaue Gegenstandweite an.

$\Gamma = 40 \times 12 = 480$ , nach (9.15b)  $f_1 = t/\beta = 160 \text{ mm}/40 = 4 \text{ mm}$  ( $t = 160 \text{ mm} = \text{Tubuslänge}$ ),  
nach (9.15c)  $f_2 = a/\Gamma_{ok} = 250 \text{ mm}/12 = 20,8 \text{ mm}$  ( $a = 250 \text{ mm} = \text{deutliche Sehweite}$ ).  
Aus  $1/a = 1/a' - 1/f_1$  mit  $a' = t + f_1 = 164 \text{ mm}$  folgt:  $a = -4,1 \text{ mm} \approx -f_1$ .

**Beispiel 9.1.8b** Ein Objektiv 100x hat eine numerische Apertur von  $n \sin u = 1,3$  (Öl mit  $n = 1,4$ ). Wie groß ist der kleinste auflösbare Abstand  $g$  bei Beleuchtung mit blauem Licht  $\lambda = 500 \text{ nm}$ . Wie groß ist der Objektdurchmesser  $D$ ? Auflösbarer Abstand (9.26):  $g = \lambda / 2n \sin u = 500 / (2 \cdot 1,3) \text{ nm} = 192 \text{ nm}$ .  
Objektivdurchmesser:  $\sin u = 1,3/1,4 = 0,93$ ,  $u = 68,2^\circ$ ,  $f_1 = t/100 = 1,6 \text{ mm}$ ,  $D = 2f_1 \tan u = 8 \text{ mm}$ .

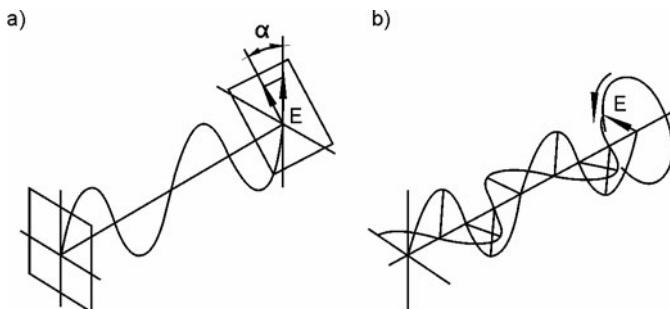
## 9.2 Wellenoptik

Licht ist eine *elektromagnetische Welle* mit einer Wellenlänge zwischen 400 und 700 nm (Abschnitt 8.3.4), welche die Farbe bestimmt: violett (400 nm), blau (470 nm), grün (525 nm) und rot (670 nm). In der geometrischen Optik (Abschnitt 9.1) wird die Wellennatur des Lichtes nicht betrachtet. Viele Erscheinungen, wie Polarisation, Interferenz oder Beugung, erfordern jedoch eine Beschreibung durch die Wellenoptik.

Licht breitet sich im Vakuum wie alle elektromagnetischen Wellen mit der Lichtgeschwindigkeit  $c_0 = 299.792 \text{ km/s}$  aus. In einem Medium verringert sich die Geschwindigkeit:  $c = c_0/n$ , wobei  $n$  die Brechzahl des Mediums ist. Der Zusammenhang zwischen der Frequenz  $f$  und Wellenlänge  $\lambda$  des Lichtes lautet:

$$f = \frac{c_0}{\lambda} \quad \text{mit} \quad c_0 = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad \text{Lichtwelle} \quad (9.17\text{a})$$

Die Lichtfrequenz liegt im Bereich von einigen  $10^{14} \text{ Hz}$  und ist messtechnisch nicht direkt erfassbar.



**Bild 9-23**

Polarisation von Licht:

- a) Lineare Polarisation
- b) Durch Überlagerung zweier verschobener linear polarisierter Wellen entsteht zirkular polarisiertes Licht

### 9.2.1 Polarisation von Licht

#### Lineare Polarisation

In einer Lichtwelle schwingen die elektrische und magnetische Feldstärke senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und auch senkrecht zueinander. Sie sind mit einander verkoppelt. Es reicht daher aus, allein die elektrische Feldstärke  $E$  zu betrachten. Eine Ausrichtung der Feldstärke nennt man *Polarisation*. Bei unpolarisiertem Licht schwingt die elektrische Feldstärke statistisch in alle Richtungen senkrecht zur Ausbreitung. Die Sonne und übliche Lichtquellen emittieren unpolarisierte Strahlung. Durch spezielle Polarisationsfilter wird erreicht, dass Licht nur in einer Ebene schwingt. Eine „Momentaufnahme“ einer linear polarisierten Welle zeigt Bild 9-23a.

## Zirkulare Polarisation

Neben der *linearen Polarisation* sind auch komplizierte Schwingungsformen möglich. Durch die Überlagerung zweier geeigneter linear polarisierter Wellen kann eine *zirkulare Polarisation* entstehen, bei dem sich die Feldstärke schraubenförmig durch den Raum bewegt (Bild 9-23b). In der Wellenlehre wurde unter dem Begriff *Lissajous'sche Figuren* gezeigt, dass zwei senkrechte Schwingungen gleicher Frequenz eine Kreisbewegung ausführen, wenn eine Phasenverschiebung um  $90^\circ$  vorliegt (Abschnitt 6.1.4). Zirkular polarisiertes Licht entsteht durch Überlagerung zweier linear polarisierter Lichtwellen, die senkrecht zueinander schwingen und gegeneinander um  $\lambda/4$  (oder  $90^\circ$ ) verschoben sind. Ändert man die Verschiebung, entsteht eine *elliptische Polarisation*.

## Polarisationsfolien

Dichroitische längliche Moleküle absorbieren nur eine Schwingungskomponente. Strahlt man unpolarisiertes Licht auf eine Folie mit derartigen Substanzen, so wird das hindurchtretende Licht bis zu 99 % linear polarisiert.

Stellt man zwei Polarisationsfilter hintereinander in einen Lichtstrahl, so dass ihre Vorzugsrichtungen gekreuzt sind, wird das Licht vollständig absorbiert. Bringt man sie in parallele Stellung, entsteht maximale Transmission. Wird ein Filter um den Winkel  $\alpha$  aus der parallelen Lage gedreht, tritt von der Feldstärke  $E$  aus dem ersten Filter (Polarisator) nur die Komponente  $E \cos \alpha$  hindurch (Bild 9-23a). Die Intensität  $I$  ist proportional zum Quadrat der Feldstärke. Bei Drehung ändert sich die Intensität  $I$  wie folgt:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha, \quad \text{Polarisationsfilter, Drehung} \quad (9.17b)$$

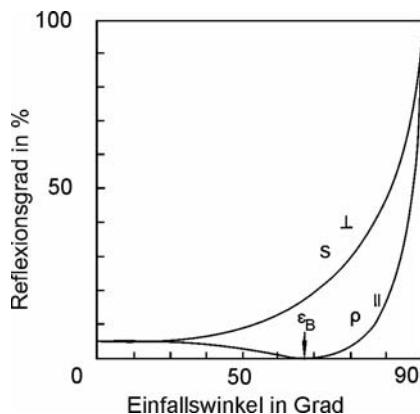
wobei  $I_0$  die maximale Intensität bei paralleler Stellung ( $\alpha = 0$ ) angibt.

## Polarisation durch Reflexion

Bei Reflexion an Grenzflächen wird das Licht teilweise polarisiert. Bei Metallen sind die Verhältnisse kompliziert, es entsteht elliptisch polarisiertes Licht. Auf die Metalloptik wird nicht weiter eingegangen. Im Folgenden wird das Verhalten durchsichtiger Medien beschrieben. Licht wird an einer Glasfläche teilweise reflektiert und gebrochen (Abschnitt 9.1.1). Das unpolarisierte einfallende Licht kann in zwei Komponenten zerlegt werden: parallel und senkrecht zur Reflexionsebene. Bei senkrechtem Einfall werden beide Komponenten zu etwa je 4 % reflektiert (Bild 9-24). Bei schräger Einstrahlung wird jedoch die senkrechte Komponente stärker gespiegelt. Damit tritt nach Reflexion eine partielle Polarisation auf. Bild 9-25 zeigt, dass die Reflexion unter dem Brewster-Winkel verschwindet, so dass das reflektierte Licht vollständig polarisiert ist.

Der Brewster-Winkel kann aus dem Brechungsgesetz errechnet werden. Man stellt sich vor, dass die Reflexion durch die Emission der Elektronen im Glas mit der Brechzahl  $n$  erfolgt, die durch die einfallende Lichtwelle angeregt werden. Die Elektronen strahlen wie ein schwingender Dipol: in Richtung der Schwingung ist die Emission Null, senkrecht dazu maximal. Damit kann eine Reflexion für die parallele Polarisationskomponente nicht erfolgen, wenn der Winkel zwischen dem gebrochenem und reflektiertem Strahl gleich  $90^\circ$  beträgt. Aus dem Brechungsgesetz (9.2) erhält man für den *Brewster-Winkel*  $\varepsilon_B$ :

$$\tan \varepsilon_B = n. \quad \text{Brewster-Winkel } \varepsilon_B \quad (9.17c)$$

**Bild 9-24**

Reflexionsgrad an einer Glasfläche mit  $n = 1,52$  für verschiedene polarisiertes Licht. Für unpolarisierte Strahlung gilt der Mittelwert beider Kurven. (s = Polarisationsrichtung steht senkrecht zur Einfallsebene, p = parallel zu Einfallsebene)

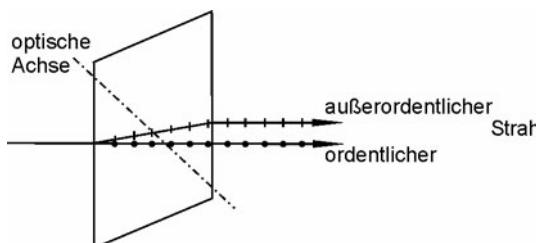
Reflektiertes Licht ist stets teilweise polarisiert. Damit ergibt sich die Möglichkeit, Reflexe an Glas- oder Wasserflächen durch Polarisationsfolien zu reduzieren. Davon wird in der Photographie und bei so genannten Polaroid-Sonnenbrillen Gebrauch gemacht.

### Polarisation durch Streuung

Licht wird an Molekülen und kleinen Teilchen gestreut. Auch hier stellt man sich vor, dass Elektronen durch die Lichtwelle zu Dipolschwingungen angeregt werden. Daher wird Licht in Richtung der Polarisierung, d. h. der Schwingung, minimal und senkrecht dazu maximal gestreut. Aus diesem Grund ist Sonnenlicht, das in der Erdatmosphäre gestreut wird, teilweise linear polarisiert.

### Doppelbrechung

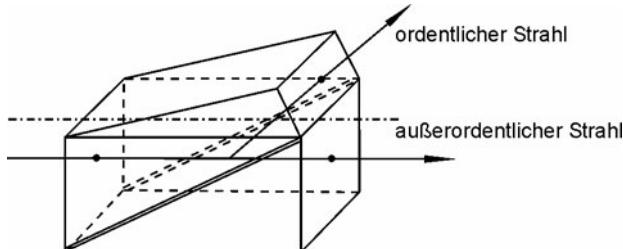
In *anisotropen Medien*, wie Kristallen oder optischen Medien unter mechanischer Spannung, hängt die Brechzahl  $n$  von der Richtung der Polarisierung und Lichtausbreitung ab. Die Verhältnisse der Kristallopik sind kompliziert, so dass hier nur einige wichtige Sonderfälle erwähnt werden.

**Bild 9-25**

Doppelbrechung in Kalkspat.  
Zerlegung unpolarisierten Lichtes in senkrecht zueinander polarisiertes Licht

In Kristallen gilt das Brechungsgesetz (9.2) nicht vollständig. Dies wird am Beispiel einer Kalkspatplatte deutlich, die in einer speziellen Kristallrichtung geschnitten ist. Unpolarisiertes Licht wird im Kristall in zwei Polarisationskomponenten aufgespalten (Bild 9-25). Der so genannte *ordinante Strahl* verhält sich völlig normal, die Brechzahl hängt nicht von der Ausbreitungsrichtung ab. Der *außerordinante Strahl* ist senkrecht dazu polarisiert, und er wird im Widerspruch zum Brechungsgesetz gebrochen. Die Brechzahl  $n$  hängt von der Ausbreitungsrichtung ab.

*Polarisationsprismen* nutzen die Doppelbrechung aus. Häufig wird das *Glan-Thompson-Prisma* verwendet, bei dem eine Polarisationsrichtung durch Totalreflexion aus dem Strahlengang gespiegelt wird (Bild 9-26). Die selektive Totalreflexion beruht darauf, dass die Brechzahlen für den ordentlichen und außerordentlichen Strahl verschieden sind. Sie findet an einer Kittschicht mit geringerer Brechzahl statt.



**Bild 9-26**  
Glan-Thompson-Prisma zur Erzeugung linear polarisierten Lichtes

### $\lambda/4$ - und $\lambda/2$ -Platte

Bei einer Kalkspatplatte, in der das Licht senkrecht zur *optischen Achse* einfällt, findet keine Aufspaltung in die ordentliche und außerordentliche Welle statt. Allerdings sind die Brechzahlen ungleich, beide Wellen breiten sich verschieden schnell aus. Damit entsteht ein Phasenunterschied zwischen den Wellen, der von der Dicke des Kristalls abhängt. Bei der  $\lambda/4$ -Platte beträgt der Phasenunterschied  $90^\circ$  und es entsteht für eine Wellenlänge zirkular polarisiertes Licht (Bild 9-24b), sofern man linear polarisiertes Licht einstrahlt (unter  $45^\circ$  zur optischen Achse). Dementsprechend dreht eine  $\lambda/2$ -Platte die Polarisationsebene um  $90^\circ$ . Derartige Baulemente haben in der Lasertechnik Bedeutung.

Eine  $\lambda/4$ -Platte dient zur Erzeugung von zirkular polarisiertem Licht aus linear polarisiertem Licht. Eine  $\lambda/2$ -Platte dreht die Polarisationsebene von linear polarisiertem Licht um  $90^\circ$ .

### Spannungsdoppelbrechung

Gläser und Kunststoffe werden durch mechanische Spannungen *doppelbrechend*. Dieser Effekt wird zur optischen Darstellung von Spannungen ausgenutzt. Man bringt den zu untersuchenden durchsichtigen Körper zwischen zwei gekreuzte Polarisationsfilter. Im spannungsfreien Zustand läuft kein Licht durch das System. Bei Wirkung von Kräften erscheinen im hindurchgehenden Licht helle Streifen, die bei weißem Licht farbig sind. Kurven gleicher Helligkeit oder Farbe stellen Bereiche gleicher Spannung dar.

### Optische Aktivität

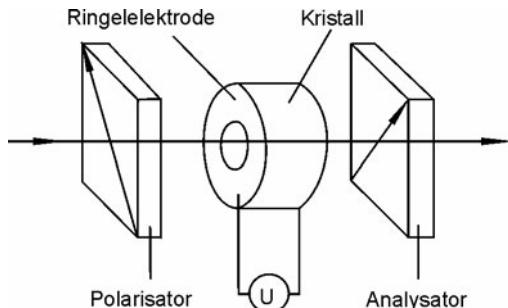
*Optisch aktive Substanzen* drehen die Polarisationsebene von Licht.

Dieser Effekt wird dazu ausgenutzt, um die Konzentration von Zucker in Lösungen zu bestimmen (Saccharimeter). Neben schraubenförmigen Molekülen sind auch Flüssigkristalle optisch aktiv, was in Anzeigeeinheiten ausgenutzt wird (Abschnitt 11.1.4).

### Faraday-Effekt

Bringt man isotrope transparente Medien in ein Magnetfeld, tritt *optische Aktivität* auf. Bei Durchstrahlung von Licht in Feldrichtung wird die Schwingungsebene von linear polarisiertem Licht gedreht. Als *Faraday-Isolator* bezeichnet man Systeme, oft mit Permanentmagneten, die wie eine  $\lambda/2$ -Platte wirken. In Verbindung mit einem Polarisationsfilter verhindern sie, dass

Licht in einem Strahlengang durch Spiegelung an Grenzflächen zurückläuft. Laser werden leicht durch rückgestreutes Licht gestört.



**Bild 9-27**  
Pockels-Zelle zur Modulation von Licht

### Pockelszelle

Elektrische oder magnetische Felder können in Materialien *Doppelbrechung* hervorrufen. Der *Pockelseffekt* wird in der Lasertechnik zur Konstruktion von Lichtschaltern ausgenutzt. Ein Kristall mit zwei Elektroden, z. B. KDP (Kaliumdihydrogenphosphat) oder ADP (Ammoniumdihydrogenphosphat), wird zwischen zwei gekreuzte Polarisatoren gebracht (Bild 9-28). In dieser Form ist der optische Schalter geschlossen. Bei Anlegen einer so genannten  $\lambda/2$ -Spannung von etwa 4 kV wird der Kristall doppelbrechend und er wirkt wie eine  $\lambda/2$ -Platte. Die Polarisation wird um  $90^\circ$  gedreht und das Licht kann durch das System hindurchtreten: der Schalter ist offen.

Der *Kerreffekt* tritt hauptsächlich in Flüssigkeiten auf, beim Anlegen eines elektrischen Feldes wird das Material doppelbrechend.

**Beispiel 9.2.1a** Ein unpolarisierter Lichtstrahl fällt nacheinander durch drei Polarisationsfilter, die jeweils um  $60^\circ$  gegeneinander verdreht sind. Wie groß ist die Intensität nach Durchgang durch das 1., 2. und 3. Filter?

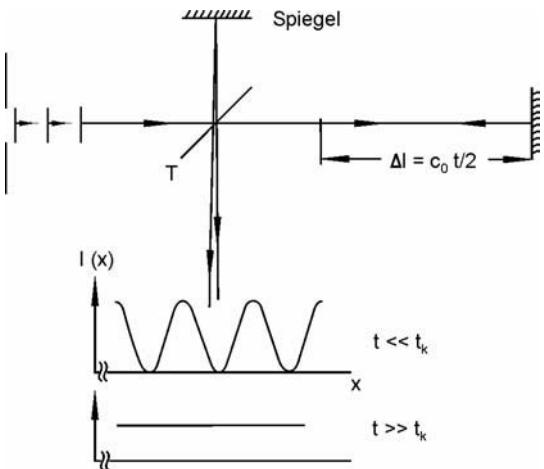
Das erste Filter polarisiert das Licht und es lässt somit (9.17b) 50 % durch. Die Intensität  $I$  nach dem zweiten und dritten Filter wird jeweils um  $\cos^2 \alpha = \cos^2 60^\circ = 0,25$  geschwächt. Es ergibt sich nach dem zweiten und dritten Filter eine Schwächung um  $0,5 \cdot 0,25 = 12,5\%$  und  $0,5 \cdot 0,25 \cdot 0,25 = 3,125\%$ .

**Beispiel 9.2.1b** Unter welchem Winkel müssen die Endfenster ( $n = 1,56$ ) des Entladungsrohres eines HeNe-Lasers stehen, damit linear polarisiertes Licht ohne Verluste hindurchtritt.

In der EinfallsEbene polarisiertes Licht wird an einer Glasfläche unter dem Brewster-Winkel  $\varepsilon_B$  nicht reflektiert. Nach (9.17c) gilt:  $\tan \varepsilon_B = n = 1,56$ . Daraus folgt  $\varepsilon_B = 57,3^\circ$ .

### 9.2.2 Eigenschaften der Kohärenz

Weißes Licht besteht aus einem kontinuierlichen Wellenlängenspektrum, d. h. einem Gemisch unterschiedlicher Wellen. Dagegen strahlen Laser monochromatisch mit nahezu konstanter Wellenlänge. Man sagt Laserlicht ist *kohärent* (zusammenhängend). Bei kohärenten Lichtwellen machen sich spezielle *Interferenzeffekte* bemerkbar; dieses sind Erscheinungen bei der Überlagerung von Wellen. Weißes Licht dagegen ist *inkohärent*. Interferenzen sind nicht beobachtbar, da sie sich durch die Unregelmäßigkeiten der Wellen herausmitteln.

**Bild 9-28**

Michelson-Interferometer zur Messung der zeitlichen Kohärenz. Die Intensitätsverteilung  $I(x)$  in der Beobachtungsebene hängt von der Verzögerungszeit  $t = 2 \Delta l / c_0$  der Teilwellen ab, die durch den Strahlteiler  $T$  erzeugt werden.

### Zeitliche Kohärenz

Die Begriffe *Interferenz* und *Kohärenz* werden an der Funktion eines *Michelson-Interferometers* erläutert (Bild 9-28). Eine Lichtwelle, bevorzugt aus einem Laser, wird durch einen halbdurchlässigen Spiegel in zwei Teilbündel aufgespalten. Die beiden Wellen werden an zwei Spiegeln in sich selbst reflektiert und hinter dem Strahlteiler wieder zur Überlagerung gebracht. Kippt man einen der Spiegel leicht an, erhält man die Überlagerung zweier ebener Wellen unter einem kleinen Winkel. Wie in Bild 9-28 dargestellt, gibt es Stellen der Überlagerung zweier Wellenberge und es ist hell. Das Gleiche gilt für die Überlagerung der Wellentäler. Zwischen den hellen Stellen treffen Berg und Tal aufeinander, die sich gegenseitig auslöschen und es ist dunkel. Es entstehen bei der Überlagerung zweier verkippter ebener Wellen helle und dunkle Interferenzstreifen.

Bewegt man einen der Spiegel in Bild 9-28 in Richtung der Wellenausbreitung, so verschiebt man beide Teilwellen und die Interferenzstreifen im Überlagerungsgebiet gegeneinander. Sofern die primäre Welle kohärent ist, ändert sich nichts am Kontrast der Streifen. Ist sie jedoch nur teilweise kohärent, nimmt der Kontrast mit zunehmender Verschiebung ab. Es interferieren verschiedene Teilstücke der Welle, die einander nicht mehr exakt entsprechen. Die Interferenzstreifen werden unscharf und verschwinden bei großen Spiegelverschiebungen.

Mit dem Michelson-Interferometer kann der Kohärenzgrad einer Lichtquelle gemessen werden. Man definiert als *Kohärenzlänge*  $l_K$  die Verschiebung der Wellen gegeneinander, bei welcher der Kontrast stark abnimmt (um den Faktor  $1/\sqrt{2}$ ). Dem entspricht die Kohärenzzeit  $t_K$ :

$$l_K = t_K c_0 \quad \text{Kohärenzlänge } l_K \quad (9.18a)$$

Licht entsteht durch atomare und molekulare Übergänge von höheren zu tieferen Energieniveaus. Man kann sich vorstellen, dass im Prinzip ein emittierter Wellenzug nur mit sich selbst interferiert, da Wellen von anderen Atomen zu unterschiedlich sind. Die Kohärenzzeit  $t_K$  entspricht daher etwa der Emissionsdauer oder der Lebensdauer  $\tau$  des Ausgangsniveaus. Durch den mathematischen Formalismus der Fourier-Analyse (Abschnitt 6.1.5) kann eine Welle der zeitlichen Dauer  $\tau$  durch ein Spektrum von Sinuswellen mit der Bandbreite  $\Delta f$  beschrieben werden:

$$\Delta f \approx \frac{1}{\tau}.$$

Spektrale Bandbreite  $\Delta f$ 

Die Kohärenzzeit  $t_K$  wird somit durch die spektrale Bandbreite  $\Delta f$  der Lichtquelle bestimmt (Tabelle 9.3):

$$l_K = \frac{c_0}{\Delta f}.$$

Kohärenzzeit  $t_K$  (9.18b)

Die Kohärenzzeit  $t_K$  und Kohärenzzeit  $t_K$  beschreiben die *zeitliche Kohärenz*, da bei der Messung zwei Teilwellen zeitlich gegeneinander verschoben werden.

**Tabelle 9.3** Kohärenzzeit  $t_K$  verschiedener Lichtquellen

Lichtquelle	$\Delta f$ in Hz	$l_K$	Laser	$\Delta f$ in Hz	$l_K$
Sonne	$5 \cdot 10^{14}$	$0,6 \mu\text{m}$	He-Ne-Laser	$10^9$	30 cm
Spektrallampe	$10^9$	30 cm	" " stabilisiert	$1,5 \cdot 10^{-5}$	2 km

### Örtliche Kohärenz

Die örtliche Kohärenz untersucht die Interferenz an zwei verschiedenen Stellen einer Lichtwelle zur gleichen Zeit. Zur Untersuchung dieser Kohärenz blendet man aus einer breiten Wellenfront zwei spaltförmige Bereiche aus und bringt diese Teilwellen zur Überlagerung (Doppel-Spaltsversuch nach Young). Man beobachtet bei Vergrößerung des Spaltabstandes eine Abnahme des Kontrastes der Interferenzstreifen. Bei der technischen Anwendungen von Interferenzen werden meist Laser in der TEM<sub>00</sub>-Mode eingesetzt, die örtlich vollständig kohärent sind.

**Beispiel 9.2.2a** Wie groß ist die Kohärenzzeit eines HeNe-Lasers mit einer Bandbreite von 1 GHz?

Nach (9.18b) gilt:  $l_K = c_0 / \Delta f = 0,3 \text{ m}$ .

**Beispiel 9.2.2b** In einen weißen Lichtstrahl wird ein Interferenzfilter ( $\lambda = 500 \text{ nm}$ ,  $\Delta\lambda = 1 \text{ nm}$ ) gestellt.

Wie groß ist die Kohärenzzeit?

Aus  $f = c_0 / \lambda$  (9.17a) erhält man durch Differenzieren  $|\Delta f| = c_0 \Delta\lambda / \lambda^2 = 1,2 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$ .

Damit erhält man die Kohärenzzeit (9.18b)  $l_K = c_0 / \Delta f = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ .

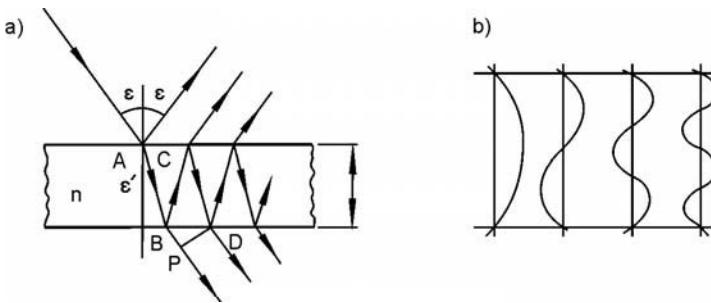
### 9.2.3 Erscheinungen der Interferenz

Die Anwendungen der Interferenzoptik sind durch die Erfindung des Lasers stark angewachsen. Wichtige Bauelemente und Geräte dieses Fachgebietes sind beispielsweise: Gitter, Filter, Schichten zur Ent- und Verspiegelung, Interferometer und holographische Systeme.

#### Interferenzen an parallelen Schichten

Zwischen parallelen Schichten können sich stehende Lichtwellen ausbilden. Bild 9-30a zeigt eine Lichtwelle, die auf eine Planplatte fällt. An den Grenzflächen findet mehrfach Brechung und Reflexion statt. Betrachtet man im durchgehenden Licht den Wegunterschied  $\Delta$  zwischen zwei benachbarten Wellen, findet man mit Hilfe des Brechungsgesetzes:

$$\Delta = n(\overline{BC} + \overline{CD}) - \overline{BP} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon}.$$



**Bild 9-29** Interferenzen an parallelen Schichten: a) Zur Berechnung der maximalen Transmission.  
b) Bedingung für maximale Transmission bei senkrechtem Einfall. Moden in Schichten und Lasern

In der Gleichung wurde berücksichtigt, dass an der Grenzfläche zum dichtenen Medium ein Phasensprung von  $\pi$  (Verschiebung der Welle um  $\lambda/2$ ) auftritt und dass im Glas die Wellenlänge  $\lambda$  auf den Wert  $\lambda/n$  verkleinert wird. Um dies nicht jedes Mal mit bedenken zu müssen, setzt man im Medium statt des zurückgelegten Weges  $x$  den optischen Weg  $nx$  ein und arbeitet dementsprechend mit der normalen Wellenlänge  $\lambda$ . Die beiden Teilwellen überlagern sich konstruktiv, wenn der Gangunterschied  $\Delta$  gleich der Wellenlänge oder ein Vielfaches davon ist ( $\Delta = m\lambda$ ). Maximale Helligkeit entsteht also, wenn

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon} = m\lambda \quad \text{mit } m = 1, 2, 3, \dots \quad \text{Interferenz} \quad (9.19a)$$

gilt. Dagegen entsteht ein Minimum der Transmission, wenn Berg und Tal der beiden Teilwellen zusammenfallen:  $\Delta = m\lambda - \lambda/2$ .

Für senkrechten Einfall ( $\varepsilon = 0$ ) kann (9.19a) vereinfacht werden. Maximale Transmission entsteht, wenn die Schichtdicke  $nd$  ein Vielfaches von  $\lambda/2$  beträgt:

$$nd = m \frac{\lambda}{2} \quad \text{mit } m = 1, 2, 3, \dots \quad \text{Maximale Transmission} \quad (9.19b)$$

Dieser Fall ist in Bild 9-29b skizziert. Es ergeben sich folgende technische Anwendungen.

*Interferenzfilter:* Derartige Filter bestehen aus einem Glasträger, auf dem folgende Schichtfolge aufgedampft ist: dünne metallische Spiegelschicht mit einem Reflexionsgrad etwas unterhalb von 100 %, eine transparente Schicht der Dicke  $\lambda/n$  oder ein Vielfaches davon und eine weitere Spiegelschicht. Für eine Zwischenschicht  $nd = 600$  nm erhält man nach (9.19b) maximale Transmission für  $\lambda = 1200$  nm, 600 nm, 400 nm, 300 nm, 200 nm, usw. Durch den hohen Reflexionsgrad der Verspiegelung wird eine mehrfache Reflexion in der Zwischenschicht erreicht. Die Transmissionsbereiche können bis auf 10 nm scharf definiert sein. Zur Beschränkung der Durchlässigkeit auf eine einzelne Wellenlänge wird die Schichtstruktur mit einem Farbfilter kombiniert.

*Laserresonatoren:* Ein Laser besteht aus einem aktiven Medium, das sich zwischen zwei Spiegeln befindet (Abschnitt 9.3). In der Praxis werden Hohlspiegel mit einem Krümmungsradius im m-Bereich verwendet, die näherungsweise als eben angesehen werden können. Zwischen diesen Spiegeln bilden sich stehende Wellen aus, die nach Gleichung 9.19b beschrieben werden. Auch Bild 9-29b ist mit dem Hinweis gültig, dass die Spiegelabstände  $L$  (außer bei Halbleiterlasern) im 10-cm-Bereich liegen, so dass die Zahl der Halbwellen etwa  $m \approx 10^5$  beträgt. Die Frequenzen eines Laserresonators erhält man aus (9.19b) mit  $f = c_0 / \lambda$ :

$$f = m \frac{c_0}{2L} .$$

Laserresonator

Daraus ergibt sich für den Frequenzabstand  $\Delta f = (m+1)c_0 / 2L - mc_0 / 2L$  benachbarter Moden (Schwingungsformen) mit  $m+1$  und  $m$ :

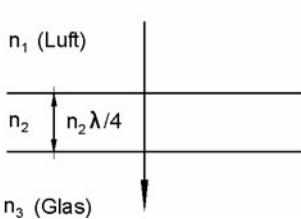
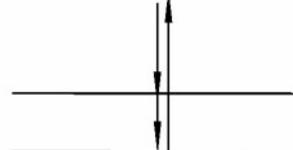
$$\Delta f = \frac{c_0}{2L} .$$

Longitudinale Moden

(9.20)

Im Allgemeinen strahlen Laser mehrere Moden, deren Zahl durch die Linienbreite des Laserüberganges bestimmt ist: man dividiert die Linienbreite durch  $\Delta f$ . Kurze Laser weisen nach (9.20) einen großen Modenabstand  $\Delta f$  auf. Man kann erreichen, dass nur eine Mode auftritt. Auch bei langen Lasern ist Monomode-Betrieb möglich, wenn man einen zusätzlichen kurzen Resonator zwischen die Laserspiegel bringt. Dieser besteht aus einer planparallelen beidseitig verspiegelten Glasplatte mit einer Dicke um 1 cm, die man *Etalon* oder *Fabry-Perot-Etalon* nennt.

**Entspiegelung:** Nach Bild 9-25 reflektiert eine Glasplatte bei senkrechtem Einfall etwa 4 % an jeder Grenzfläche. Durch Aufdampfen dünner  $\lambda/4$ -Schichten kann je nach Wahl der Brechzahl eine Ent- oder Verspiegelung erreicht werden. Bei der einfachsten Art der Entspiegelung wird auf das Glas ein durchsichtiges Material mit einer Brechzahl  $n_2$  gedampft, die zwischen der des Glases ( $n_3$ ) und der Luft ( $n_1 = 1$ ) liegt. Damit minimale Reflexion auftritt, muss bei senkrechtem Einfall der Wegunterschied  $2n_2d = \lambda/2$  betragen. In diesem Fall löschen sich an den beiden Grenzflächen reflektierten Wellen aus. Man kann somit für eine Schichtdicke von  $n_2d = \lambda/4$  bei senkrechtem Einfall eine Entspiegelung erzielen (Bild 9-30a). Durch mehrere  $\lambda/2$ -Schichten wird eine Entspiegelung für ein breites Wellenlängenspektrum nahezu vollständig erreicht. Dadurch wird die Lichtstärke von Objektiven mit mehreren Linsen erheblich erhöht. (Gegenüber (9.19b) erhält man einen Unterschied, da bei der Entspiegelung die parallele Schicht auf Glas aufgebracht ist. Bei Reflexion an den beiden Grenzflächen entsteht jeweils ein Phasensprung von  $\pi$ , der bei der Überlagerung der beiden reflektierten Wellen keine Rolle spielt.)

a)  $n_1 < n_2 < n_3$ b)  $n_1 < n_2 > n_3$ 

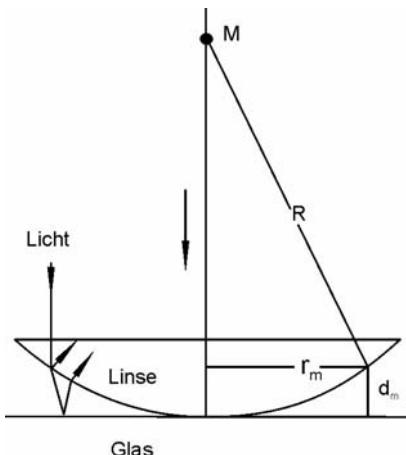
**Bild 9-30**  
Interferenzen an  
dünnen Schichten:  
a) Entspiegelung  
b) Verspiegelung,  
z. B. Laserspiegel

**Laserspiegel:** Besitzt die aufgedampfte  $\lambda/4$ -Schicht eine Brechzahl  $n_2$  größer als die des Glases ( $n_3$ ), resultiert statt der Ent- eine Verspiegelung. Der Phasensprung tritt nur an der ersten Grenzfläche auf. Entsprechend den oben dargelegten Gedankengängen entsteht im durchgehenden Licht eine destruktive Interferenz. Durch mehrere  $\lambda/4$ -Schichten mit unterschiedlichen Brechzahlen können Spiegel mit Reflexionsgraden bis über 99,9 % produziert werden, die beispielsweise als Laserspiegel eingesetzt werden (Bild 9-30b).

### Interferenzen an keilförmigen Schichten

Auch an nichtparallelen Schichten treten Interferenzen auf. Am bekanntesten sind die *Newton'schen Ringe*, die an dünnen Luftkeilen auftreten, z. B. bei in Glas gerahmten Diapositiven. Bild 9-31 zeigt die Entstehung von Interferenzen durch Reflexion an der Oberfläche einer plankonvexen Linse und einer ebenen Glasplatte. Die beiden reflektierten Wellen verlaufen nicht genau parallel, werden jedoch bei der optischen Abbildung durch die Augenlinse zur Überlagerung gebracht. Bei Beobachtung in Reflexion treten Interferenzringe auf, wenn der Luftkeil die Dicke  $d_m = m\lambda/2 + \lambda/2$  aufweist. Der Term  $\lambda/2$  entsteht durch den Phasensprung bei Reflexion am dichten Medium (Glasplatte). Der Satz von Pythagoras liefert (Bild 9-31):  $R^2 = r_m^2 + (R - d_m)^2$  oder näherungsweise  $d_m = r_m^2/(2R)$  (für  $R \gg r_m$ ). Damit resultiert für den Radius  $r_m$  der hellen Ringe:

$$r_m = \sqrt{(m+1/2)\lambda R} \quad \text{mit } m = 0, 1, 2, \dots \quad \text{Newton'sche Ringe} \quad (9.21a)$$



**Bild 9-31**

Zur Entstehung von Interferenzen an keilförmigen Schichten am Beispiel der Newton'schen Ringe

Für den Radius der dunklen Ringe erhält man:  $m$

$$r_m = \sqrt{m\lambda R} \quad \text{mit } m = 0, 1, 2, \dots \quad (9.21b)$$

Die Newton'schen Ringe können als Höhenschichtlinien des Luftkeils angesehen werden. Von Streifen zu Streifen ändert sich die Dicke um  $\lambda/2$ . Ähnliche Erscheinungen werden an einer normalen Glasplatte beobachtet, an der ein aufgefächelter Laserstrahl reflektiert wird. Im an beiden Oberflächen gespiegelten Licht treten unregelmäßige dunkle Streifen auf, welche die Abweichungen der Glasplatte von der Parallelität anzeigen.

### Farben dünner Plättchen

Dünne Schichten, wie Ölfilme, Oxid- oder Aufdampfschichten, zeigen bei Beleuchtung mit weißem Licht schillernde Interferenzfarben. Dies liegt daran, dass jede Wellenlänge ein eigenes System von Interferenzstreifen verursacht.

### Interferometer

Das bekannte Michelson-Interferometer wurde bereits in Abschnitt 9.3.6 zur Messung der Kohärenzlänge dargestellt. Es wird auch zu anderen Messaufgaben eingesetzt. Beispielsweise können Längenänderungen sehr genau durch die Bewegung und Zählung der Streifen bei Verschieben eines Spiegels gemessen werden. Dies wird zur Steuerung von Werkzeugmaschinen

hoher Präzision ausgenutzt. Ein anderes Verfahren prüft die Oberflächenstruktur von reflektierenden Werkstücken, die einen der Spiegel ersetzen. Das Interferenzbild ist entsprechend der Oberfläche deformiert. Die Messgenauigkeit liegt unterhalb von 100 nm.

Beim Interferenzmikroskop wird das Prinzip des Michelson-Interferometers mit der Mikroskopie kombiniert. Es wird eine ideal plane Oberfläche mit dem Objekt verglichen, z. B. eine Schleifspur in einem Metall. Die Interferenzstreifen geben als Höhenschichtlinien das Oberflächenprofil des Werkstücks an. Eine Verschiebung um einen Streifenabstand entspricht der Veränderung der Oberfläche um  $\lambda/2$ .

**Beispiel 9.2.3a** Eine Glasplatte ( $n_G = 1,54$ ) soll durch Aufdampfen eines Materials ( $n = 1,36$ ) für die Wellenlänge  $\lambda = 550 \text{ nm}$  entspiegelt werden. Wie groß ist die Schichtdicke  $d$ ?

Für Entspiegelung gilt:  $nd = \lambda/4$ ,  $d = \lambda/(4n) = 101 \text{ nm}$ .

**Beispiel 9.2.3b** Wie groß ist der longitudinale Frequenzabstand longitudinaler Moden in einem Laser der Länge  $L = 1 \text{ m}$  und  $0,1 \text{ m}$ ?

Nach (9.20) gilt:  $\Delta f = c_0/(2L)$ :  $L = 1 \text{ m}$ :  $\Delta f = 3 \cdot 10^8 / 2 \text{ Hz} = 150 \text{ MHz}$ .  $L = 1 \text{ m}$ :  $\Delta f = 1,5 \text{ GHz}$ .

## 9.2.4 Beugung von Licht

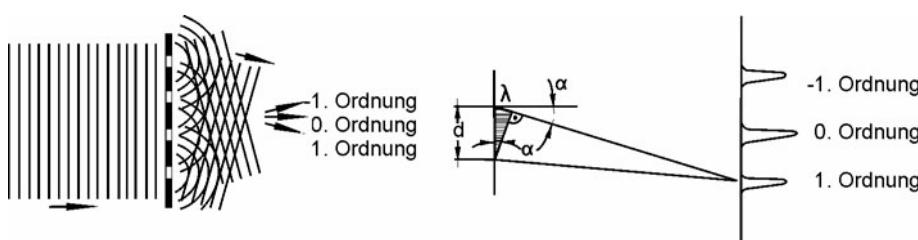
Unter Beugung versteht man das Eindringen von Licht in den geometrischen Schattenraum hinter Hindernissen. Mit dem Huygens'schen Prinzip können Effekte der Beugung erklärt werden:

Jeder Punkt einer Wellenfläche ist Ausgangspunkt einer kugelförmigen Elementarwelle.

### Beugung am Gitter

Die Beugung an einem regelmäßigen Gitter, das aus strichförmigen durchsichtigen Bereichen besteht, ist relativ einfach zu berechnen (Bild 9-32). Von jedem Punkt der Gitterstriche breiten sich kugelförmige Elementarwellen aus, die sich überlagern. Auf einem entfernten Schirm erhält man eine Beugungsfigur mit mehreren Maxima und Minima (Bild 9-32a). Das erste Maximum entsteht unter dem Winkel  $\alpha$ , bei dem der Weglängenunterschied von zwei Spalten bis zum Schirm gleich einer Wellenlänge  $\lambda$  beträgt. Für große Entfernung des Schirmes vom Gitter gilt näherungsweise Bild 9-32b. Man erhält aus dem schraffierten Dreieck für die erste seitliche Beugungsordnung:  $\sin \alpha = \lambda/d$ , wobei  $d$  der Gitterabstand ist (Gitterkonstante). Weitere Beugungsmaxima entstehen für die Wegunterschiede  $m\lambda$ . Allgemein gilt für die Maxima:

$$\sin \alpha = m \frac{\lambda}{d} \quad \text{mit } m = 1, 2, 3, \dots \dots \quad \text{Beugungsgitter} \quad (9.22)$$



**Bild 9-32** Beugung am Gitter:

- Durch Überlagerung von Elementarwellen entstehen verschiedene Beugungsordnungen.
- Geometrische Beziehungen zur Berechnung der Beugungswinkel

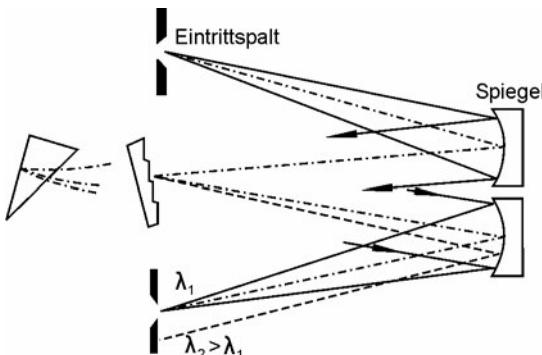
Die 0. Ordnung tritt in Richtung der einlaufenden Welle auf, rechts und links davon entsteht die 1., 2., 3., usw. Beugungsordnung.

### Spektralapparat

Beugungsgitter werden zur Vermessung von Wellenlängen in Spektralapparaten verwendet, meist als Reflexionsgitter. Bild 9-34 zeigt, dass das zu analysierende Licht parallel auf das Gitter fällt. Licht verschiedener Wellenlängen  $\lambda$  wird in unterschiedliche Richtungen gebeugt. Mittels eines Hohlspiegels wird das gebeugte Licht einer Wellenlänge auf den Austrittsspalt fokussiert. Durch Drehen des Gitters schiebt sich das gesamte Spektrum über den Spalt, an dem das Licht optoelektronisch nachgewiesen wird. Statt des Spaltes kann auch ein Diodenarray eingesetzt werden. Es entsteht ein optischer Vielkanalanalysator, der das gesamte Spektrum gleichzeitig erfassst. Das Auflösungsvermögen eines Gitters lässt sich zu

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m p . \quad \text{Auflösungsvermögen eines Beugungsgitters}$$

berechnen, wobei  $m$  die Beugungsordnung,  $p$  die Zahl der beleuchteten Gitterstriche und  $\Delta\lambda$  der kleinste nachweisbare Wellenlängenunterschied angeben. Die Herstellung von Beugungsgittern erfolgt holographisch durch Ätzverfahren. Statt Gitter lassen sich auch Prismen einsetzen (Bild 9.33), allerdings ist das Auflösungsvermögen geringer. Die Anwendung von Spektralapparaten ist in Abschnitt 10.3.1 beschrieben.



**Bild 9-33**

Darstellung eines Gitterspektrometers. Im Prinzip kann das Gitter durch ein (reflektierendes) Prisma ersetzt werden.

### Diffraktive optische Elemente

Das Beugungsgitter ist das einfachste Element der *diffraktiven Optik*. Durch komplizierte Gitterstrukturen können zahlreiche optische Bauelemente hergestellt werden, die beispielsweise wie Linsen, Prismen, Strahlteiler oder Strahlablenker wirken. Während übliche optische Elemente auf den Prinzipien von Brechung und Reflexion beruhen, nutzen diffraktive Systeme die Beugung und Interferenz aus. Im Abschnitt (9.2.5) wird in der Holographie nochmals auf diese Thematik eingegangen.

### Beugung am Spalt

Trifft Licht auf einen dünnen Spalt, tritt ähnlich wie beim Gitter Beugung auf. Zur Berechnung des Beugungswinkels  $\alpha$  wird nach Bild 9-34a der untere Randstrahl mit einem Strahl in Spaltmitte verglichen. Beträgt der Gangunterschied dieser gebeugten Wellen ein Vielfaches von  $m\lambda/2$ , löschen sie sich aus. Jeder Strahl der unteren Bündelhälfte findet einen Partner in der

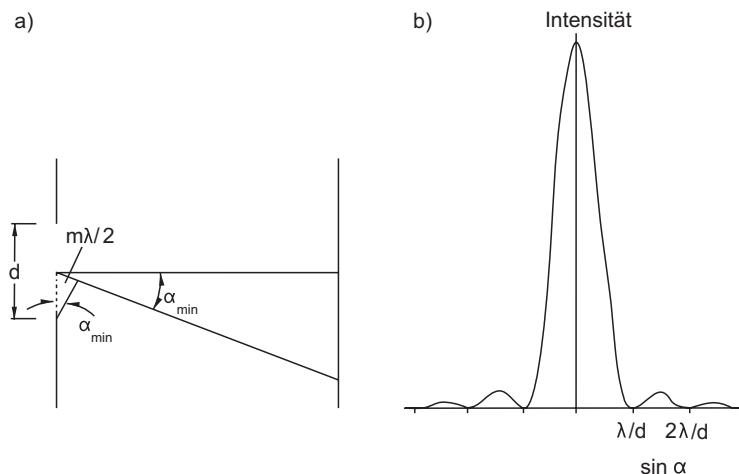
oberen, mit dem er sich kompensiert. Der Winkel, unter dem ein *Beugungsminimum* auftritt, berechnet sich nach Bild 9-35a:

$$\sin \alpha = m \frac{\lambda}{d} \quad \text{mit } m = 1, 2, 3, \dots \quad (9.23a)$$

Die Beugungsmaxima befinden sich zwischen den Minima:

$$\sin \alpha = (m + 1/2) \frac{\lambda}{d} \quad \text{mit } m = 1, 2, 3, \dots \quad \text{Beugung am Spalt} \quad (9.23b)$$

Die Gleichungen für den Spalt (9.23) und das Beugungsgitter (9.22) sind unterschiedlich. Die Intensitätsverteilung der Beugung am Spalt zeigt Bild 9-34b. Die Beugung am Draht ergibt die gleichen Interferenzstrukturen wie die des Spaltes. Diese Aussage gilt allgemein für komplementäre Strukturen, wie Spalt und Draht oder Kreisblende und Vollkreis (*Babinet'sches Theorem*). Allerdings verhält sich das nicht gebeugte Licht unterschiedlich.



**Bild 9-34** Beugung am Spalt:  
a) Geometrische Beziehungen zur Berechnung der Beugungswinkel.  
b) Darstellung der Beugungsfigur

### Beugung an der Kreisblende

Die Berechnung ringförmiger Beugungsstrukturen kreisförmige Öffnungen übersteigt den Rahmen dieses Buches. Die radiale Intensitätsverteilung ähnelt Bild 9-34b. Allerdings liegen die Extremwerte anders; der erste dunkle Ring (Minimum) erscheint unter dem Winkel  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = 1,22 \frac{\lambda}{d} . \quad \text{Beugung an Kreisblende} \quad (9.24)$$

wobei  $d$  den Durchmesser der Kreisöffnung angibt.

### Auflösung optischer Geräte

Bei der optischen Abbildung tritt Beugung am Linsenrand auf und es entstehen konzentrische helle und dunkle Ringe. Das erste Minimum entsteht unter dem Winkel  $\alpha$  nach (9.24). Die Anwesenheit von Linsen ändert nichts daran. Bildpunkte bestehen durch den Einfluss der Beugung aus einem zentralen Beugungsscheibchen, umgeben von Ringen. Dadurch wird die Abbildung unscharf.

Zur Berechnung der Auflösung denke man sich zwei Punkte eines entfernten Gegenstandes. Jeder sendet aufgrund der großen Entfernung näherungsweise eine ebene Welle aus und in der Bildebene entstehen statt zweier Bildpunkte kleine Beugungsfiguren. Verringert man den Winkelabstand der Objektpunkte, z. B. durch Verschieben des Objekts zu größeren Entfernung, so fließen die Beugungsscheibchen ineinander. Schließlich ist es in der Bildebene nicht mehr möglich zu unterscheiden, ob es sich um einen oder zwei Punkte handelt. Die Grenze der Auflösung ist ungefähr dann erreicht, wenn das Hauptmaximum der einen Beugungsfigur in das Minimum der anderen fällt. Damit erhält man als Bedingung für den kleinsten Winkelabstand  $\delta$ , unter dem Gegenstandspunkte bei der Abbildung noch getrennt werden:

$$\sin \delta = 1,22 \frac{\lambda}{d}. \quad \text{Winkelauflösung } \delta \quad (9.25)$$

Dieser Ausdruck für die Winkelauflösung bei der optischen Abbildung ist der Form nach identisch mit (9.24). Je größer der Linsendurchmesser  $d$  umso kleinere Strukturen werden aufgelöst.

*Auge:* Als Beispiel wird der kleinste auflösbare Sehwinkel des Auges bei einem Pupillendurchmesser von  $d = 3$  mm und einer Wellenlänge von  $\lambda = 600$  nm ermittelt. Man erhält aus (9.25):  $\sin \delta \approx \delta \approx 0,24$  mrad  $\approx 1$  Bogenminute (siehe Abschnitt 9.1.4).

*Fernrohr:* Um genaue astronomische Bilder zu erhalten, werden Fernrohre mit großen Objektivdurchmessern benötigt (Abschnitt 9.1.7). Für ein Spiegelteleskop mit  $d = 5$  m und  $\lambda = 400$  nm resultiert eine Auflösung von  $\delta \approx 10^{-7}$  rad. Auch die Bildschärfe von Satellitenbildern der Erde ist durch (9.25) gegeben.

*Mikroskop:* Beim Mikroskop liegt der Gegenstand praktisch in der Brennebene des Objektivs. Die zitierte Beugungstheorie mit ebenen Wellen muss daher modifiziert werden. Der kleinste auflösbare Punktabstand  $g$  beim Mikroskop hängt von der *numerischen Apertur*  $n \sin u$  ab:

$$g = \frac{\lambda}{2n \sin u}. \quad \text{Auflösung beim Mikroskop} \quad (9.26)$$

Dabei bedeuten  $u$  den halben Öffnungswinkel des Objektivs und  $n$  die Brechzahl des Mediums zwischen Objekt und Objektiv (Abschnitt 9.1.8).

Zum Beweis betrachtet man zwei Gegenstandspunkte im Abstand  $g$  voneinander als Teil eines Beugungsgitters. Zur Bildentstehung im Mikroskop muss neben der 0. Ordnung noch mindestens die 1. Ordnung der Beugungsfigur des beleuchteten Objekts durch das Objektiv gelangen. Für den Beugungswinkel der 1. Ordnung eines Gitters gilt (9.22):  $\sin \alpha = \lambda / d$ . Führt man den halben Öffnungswinkel des Objektivs  $u$  ein, erhält man bei schräger Beleuchtung als Bedingung für die Auflösung  $\alpha = 2u$ . Damit wird der kleinste auflösbare Abstand beim Mikroskop  $g \approx \lambda / (2n \sin u)$ . Berücksichtigt man, dass die Wellenlänge in einem Medium durch  $\lambda/n$  gegeben ist, entsteht die zu beweisende Gleichung 9.26.

**Beispiel 9.2.4a** Unter welchem Winkel wird paralleles weißes Licht (400 bis 750 nm) an einem Gitter (700 Linien/mm) bei senkrechtem Einfall gebeugt (1. Ordnung)?

Für die 1. Ordnung gilt (9.22):  $\sin \alpha = m\lambda / d$  mit  $m = 1$  und  $d = 1/700$  mm = 1430 nm. Daraus erhält man:  $\sin \alpha_{400} = 400/1430 = 0,28$  und  $\alpha_{400} = 0,28$  rad = 16,1° sowie  $\alpha_{700} = 0,55$  rad = 31,6°. Der Winkelbereich für weißes Licht umfasst also 16,1° bis 31,6°.

**Beispiel 9.2.4b** Ein paralleles Lichtbündel fällt auf ein *Gitter* bzw. ein *Prisma*. Welche Erscheinungen treten in beiden Fällen auf?

**Gitter:** Licht wird gebeugt. Rotes Licht wird mit seiner längeren Wellenlänge stärker gebeugt als blaues Licht.

**Prisma:** Licht wird gebrochen. Rotes Licht hat eine kleinere Brechzahl und wird daher schwächer gebrochen als blaues Licht.

**Beispiel 9.2.4c** Eine Kamera in einem Satellit soll zwei Punkte im Abstand von  $x = 1\text{m}$  aus einer Höhe  $h = 300\text{ km}$  noch unterscheiden können. Wie groß muss der Linsendurchmesser  $d$  sein ( $\lambda = 550\text{ nm}$ )?

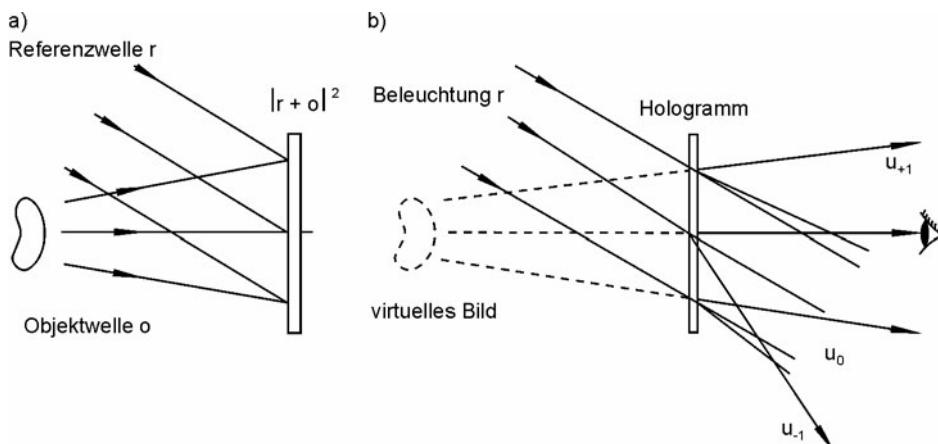
Nach (9.25) gilt:  $\sin \delta = 1,22\lambda/d$  mit  $\delta = x/h = 3,3 \cdot 10^{-6}$ . Daraus folgt:  $d = 1,22\lambda/\sin \delta \approx 1,22\lambda/\delta = 20\text{ cm}$ .

**Beispiel 9.2.4d** Wie groß ist der kleinste auflösbare Abstand bei einem Mikroskop mit der numerischen Apertur von  $n \sin u = 1,3$  bei einer Wellenlänge von  $\lambda = 500\text{ nm}$ ?

Nach (9.26) gilt:  $g = \lambda/(2n \sin u) \approx 200\text{ nm}$ .

## 9.2.5 Holographie

Wird ein Gegenstand beleuchtet, geht von diesem eine Lichtwelle aus. In dieser *Objektwelle* ist die Information über die dreidimensionale Struktur des Gegenstandes enthalten. In der Holographie gelingt es, die Eigenschaften der Objektwelle zu speichern und später zu rekonstruieren. Damit ist die Herstellung dreidimensionaler Bilder von Gegenständen möglich. In der Photographie dagegen entstehen nur zweidimensionale Bilder, da bei der Speicherung Information verloren geht. Es wird nur die *Intensität*, d. h. die Helligkeit, der Objektwelle festgehalten. Die *Phase*, welche die Form der Wellenfronten widerspiegelt, geht verloren.



**Bild 9-35** Prinzip der Holographie:

a) Aufnahme eines Hologramms b) Wiedergabe des holographischen Bildes

### Objektwelle

Eine Welle wird durch eine komplexe Funktion gegeben, die in diesem Abschnitt durch Fettdruck wiedergegeben wird. Die Objektwelle ist  $\mathbf{o}$ , wobei  $\mathbf{o}$  die elektrische Feldstärke in der Lichtwelle angibt. In  $\mathbf{o}$  ist die optische Information über den Gegenstand enthalten.

Die folgende kurze Erläuterung über die mathematische Form einer Welle ist für das Verständnis der Holographie wichtig, aber nicht unbedingt erforderlich. Eine Lichtwelle in  $z$ -Richtung kann als Sinusfunktion dargestellt werden, einfacher ist jedoch die Beschreibung als komplexe Exponentialfunktion (6.29b, c):

$$\mathbf{u} = \hat{u} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{mit } u = \text{Im } \mathbf{u} = \hat{u} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}). \quad \text{Komplexe Welle}$$

Es stellen  $u$  die Feldstärke mit der Amplitude  $\hat{u}$ ,  $\omega$  die Kreisfrequenz,  $\vec{r}$  den Ortsvektor und  $k = |\vec{k}| = 2\pi/\lambda$  die Wellenzahl mit der Wellenlänge  $\lambda$  dar. Im Folgenden wird das Imaginärzeichen (Im) weggelassen und die Welle durch die komplexe Größe  $\mathbf{u}$  beschrieben. Für die Holographie ist es nur wichtig: *eine Welle wird durch eine komplexe Größe  $\mathbf{u}$  beschrieben.*

### Aufnahme

Bei der holographischen Aufnahme wird die *Objektwelle*  $\mathbf{o}$  mit einer *Referenzwelle*  $\mathbf{r}$  überlagert (Bild 9-35a). Beide Wellen sind kohärent, d. h. sie besitzen gleiche Frequenz. In der Praxis bedeutet dies, dass  $\mathbf{o}$  und  $\mathbf{r}$  aus dem gleichen Laser stammen. Daher entstehen Interferenzstrukturen, die zu gitterähnlichen hellen und dunklen Bereichen führen (Abschnitt 9.2.3). In dieses Streifensystem mit typischen Gitterabständen im  $\mu\text{m}$ -Bereich wird eine lichtempfindliche Schicht, z. B. eine feinkörnige Photoplatte, gestellt und belichtet. Die Überlagerung der Wellen und die Interferenzstreifen werden mathematisch durch  $\mathbf{o} + \mathbf{r}$  beschrieben. In der Wellenlehre errechnet sich die Bestrahlungsstärke oder Intensität  $I$  aus dem Quadrat der Feldstärke  $|r + o|^2$ .

$$I = |r + o|^2 = (\mathbf{r} + \mathbf{o})(\mathbf{r} + \mathbf{o})^* . \quad \text{Hologramm-Aufnahme} \quad (9.27a)$$

Die fett gedruckten Buchstaben stehen für komplexe Funktionen und \*bezeichnet die konjugiert komplexe Funktion. Ausmultiplizieren der Klammern ergibt:

$$I = |r|^2 + |\mathbf{o}|^2 + \mathbf{r}\mathbf{o}^* + \mathbf{r}^*\mathbf{o} . \quad \text{Hologramm-Aufnahme} \quad (9.27b)$$

Von Bedeutung für die Holographie ist besonders der letzte Term, der die Objektwelle  $\mathbf{o}$  enthält. Die Schwärzung eines holographischen Films hängt von der Intensität  $I$  ab. Damit wird in der Photoschicht die Information über die Objektwelle  $\mathbf{o}$  gespeichert. In den Gleichungen wurde für die Bildung des Betrages einer komplexen Zahl folgende Rechenregel angewendet:

$$|a|^2 = aa^* .$$

### Wiedergabe

Der Speichervorgang der Objektwelle wird anhand der folgenden Berechnungen zur Bildwiedergabe verständlich. Bei der Rekonstruktion wird das Hologramm mit der Referenzwelle  $\mathbf{r}$  beleuchtet (Bild 9-35b). Im Gegensatz zur üblichen Filmentwicklung wird hier zur Vereinfachung angenommen, dass sich die Amplituden-Transmission des Films proportional zu  $I$  verhält. Damit erhält man bei der Rekonstruktion für die Feldstärke  $\mathbf{u}$  direkt hinter dem Hologramm:

$$\begin{aligned} u \sim r \cdot I &= r(|r|^2 + |\mathbf{o}|^2) + \mathbf{r}\mathbf{o}^* + |r|^2 \mathbf{o} \\ &= u_0 + u_{-1} + u_{+1} . \end{aligned} \quad \text{Hologramm-Wiedergabe} \quad (9.27c)$$

Das Wellenfeld hinter dem Hologramm setzt sich aus drei Anteilen zusammen. Der erste Term  $u_0$  bestimmt die Referenzwelle  $\mathbf{r}$ , die durch die Schwärzung des Hologramms um den Faktor  $(|r|^2 + |\mathbf{o}|^2)$  geschwächt ist (0. Beugungsordnung). Der zweite Term  $u_{-1}$  beschreibt im Wesentlichen die konjugiert komplexe Objektwelle  $\mathbf{o}^*$ . Sie entspricht der -1. Beugungsordnung. Im letzten Term  $u$  wird die Objektwelle  $\mathbf{o}$  rekonstruiert, wobei die Amplitude der Referenzwelle  $|r|^2$  über dem Hologramm konstant ist. Damit ist gezeigt, dass die Objektwelle  $\mathbf{o}$  vollständig wiedergegeben werden kann. Es handelt sich um die 1. Beugungsordnung.

## Zusammenfassung

Bei der Herstellung eines Hologramms wird die Objektwelle  $\mathbf{o}$  mit einer Referenzwelle  $\mathbf{r}$  überlagert. Das entstehende System von Interferenzstreifen wird auf einer lichtempfindlichen Schicht gespeichert, man erhält ein Hologramm. Bei der Bildwiedergabe wird das Hologramm mit der Referenzwelle  $\mathbf{r}$  beleuchtet. Das Licht wird an den Gitterstrukturen des Hologramms gebeugt. Als 1. Beugungsordnung entsteht eine Welle, die bis auf einen konstanten Faktor mit der Objektwelle  $\mathbf{o}$  identisch ist. Ein Beobachter im Wellenfeld sieht den Gegenstand wie im Original, also dreidimensional (Bild 9-36b).

## Beugungsgitter

Ersetzt man in Bild 9-35a die Objektwelle durch eine ebene Welle, entsteht als Hologramm eine regelmäßige Struktur, ein Beugungsgitter. Aus Abschnitt 9.2.4 ist bekannt, dass bei Beleuchtung eines Gitters Beugung auftritt. Die 1. Beugungsordnung entspricht dem holographischen Bild. Beliebige Objektwellen werden durch eine Summe ebener Wellen repräsentiert; ein Hologramm stellt somit eine Überlagerung von Gittern mit unterschiedlichen Gitterabständen dar. Liegen die Gitterebenen in einer 5 bis 10  $\mu\text{m}$  dicken Schicht parallel zur Oberfläche, ist die Bildwiedergabe mit weißem Licht möglich. Es entsteht *Bragg-Reflexion* an den Gitterebenen (Bild 10.24).

## Anwendungen

Display-Hologramme finden Anwendungen in der Kunst, Grafik und Anzeigetechnik. In der holographischen Interferometrie werden kleinste Bewegungen zur zerstörungsfreien Werkstoffprüfung oder zur Schwingungsanalyse sichtbar gemacht. Ein konkurrenzendes Verfahren ist die Speckle-Photographie. Die Vorteile holographischer Speicher liegen in der Möglichkeit, große Datenmengen parallel zu speichern und zu lesen, einer hohen Speicherkapazität und darin, dass ein Bit im gesamten Specherraum archiviert ist. Andere Anwendungen der Holographie ermöglichen eine automatische Zeichenerkennung. Holographisch optische Elemente stellen einen Bereich diffraktiver optischer Komponenten dar (Abschnitt 9.2.4).

## 9.3 Quantenoptik

Die *Wellenoptik* allein kann viele Erscheinungen der modernen Optik nicht erklären, z. B. die Entstehung von Licht in Atomen. Erst im Zusammenwirken mit der *Quantenoptik* gelingt eine vollständige Beschreibung der Phänomene des Lichtes. Die atomphysikalischen Grundlagen der Quantenoptik werden in Abschnitt 10.3 beschrieben. Im Folgenden geht es um das wichtigste Bauelement der Quantenoptik, den Laser.

### 9.3.1 Prinzipien des Lasers

Laserstrahlung ist eine sehr gleichmäßige, d. h. *kohärente elektromagnetische Welle*. Die Wellenlänge liegt zwischen etwa 1 nm und 1 mm (Tabelle 9.4 und 9.5). Das Wort *Laser* steht für *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*. Übersetzt bedeutet dies: Lichtverstärkung durch stimulierte Emission von Strahlung.

Laserstrahlung breitet sich wie andere Arten elektromagnetischer Strahlung mit der Lichtgeschwindigkeit  $c_0$  aus, die mit der Frequenz  $f$  und Wellenlänge  $\lambda$  verknüpft ist:

$$c_0 = f\lambda \quad \text{mit} \quad c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Lichtwelle (9.28a)

In der Quantenoptik tritt der Dualismus des Lichtes hervor: Licht hat auch Teilcheneigenschaften (Abschnitt 10.1.2). Die Energie  $E$  eines Lichteilchens oder *Photons* lässt sich aus der Frequenz des Lichtes  $f$  und dem Planck'schen Wirkungsquantum  $h$  errechnen:

$$E = hf \quad \text{mit} \quad h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} . \quad \text{Lichtquant} \quad (9.28b)$$

**Tabelle 9.4** Einteilung der Spektralbereiche von Strahlung. In allen Bereichen existieren Laser, unterhalb von 100 nm werden Röntgenlaser entwickelt.

Bezeichnungen (DIN 5031)		Wellenlänge (nm)	Frequenz ( $10^{14}$ Hz)	Energie (eV)
UV-C	Vakuum- UV	100 - 200	30 - 15	12,4 - 6,2
UV-C	Fernes UV	200 - 280	15 - 10,7	6,2 - 4,4
UV-B	Mittleres UV	280 - 315	10,7 - 9,5	4,4 - 3,9
UV-A	Nahes UV	315 - 380	9,5 - 7,9	3,9 - 3,3
VIS	Licht	380 - 780	7,9 - 3,9	3,3 - 1,6
IR-A	Nahes IR	780 - 1400	3,9 - 2,1	1,6 - 0,9
IR-B	Nahes IR	1400 - 3000	2,1 - 1,0	0,9 - 0,4
IR-C	Mittleres IR	3000 - 50000	1 - 0,06	0,4 - 0,025
IR-C	Fernes IR	50000 - 1 mm	0,06-0,003	0,025-0,001

**Tabelle 9.5** Kommerzielle Laser, nach Wellenlängen geordnet

Wellenlänge ( $\mu\text{m}$ )	Laser	Betriebsart, mittlere Leistung
0,15 bis 0,35	Excimerlaser	Pulse, einige W
0,325, 0,442	He-Cd-Laser	kont., einige mW
0,337	N <sub>2</sub> -Laser	Pulse, einige 0,1 W
0,3 ... 1,0	Farbstofflaser	Pulse u. kont., einige 10 W
0,45 ... 0,52	Ar <sup>+</sup> -Laser	kont., mW bis 30 W
0,632, 0,543, .	He-Ne-Laser	kont., bis zu 100 mW
0,647	Kr <sup>+</sup> -Laser	kont., einige W
0,694	Rubinlaser	Pulse, einige W
0,7 ... 0,8	Alexandrit-Laser	Pulse, einige W
0,75 ... 0,9	GaAlAs-Diodenlaser	kont. u. Pulse, bis 1 W
1,06	Nd-Laser	kont. u. Pulse, über 100 W
1,1 ... 1,6	InGaAsP-Diodenlaser	kont. u. Pulse, mW
5 ... 6	CO-Laser	kont., 10 W
9 ... 11	CO <sub>2</sub> - Laser	kont. u. Pulse, bis kW

### Induzierte Emission

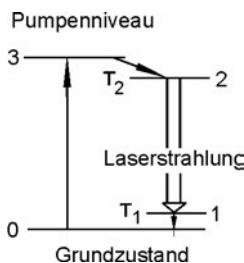
Die *spontane Emission* ist für die Strahlung normaler Lichtquellen verantwortlich; beim Laser stört sie (Abschnitt 10.3.1). Laser senden regelmäßige, kohärente Lichtwellen aus, die durch *induzierte oder stimulierte Emission* erzeugt werden. Dies ist ein Vorgang, bei dem ein ange-

regter atomarer Zustand von einer einfallenden Lichtwelle zur Emission von Strahlung gezwungen wird. Das Atom oder Molekül wird durch die äußere Welle gewissermaßen 'synchro-nisiert', und die Abstrahlung erfolgt mit gleicher Frequenz und Phase.

Ein laserfähiges Medium besteht aus einem System angeregter Atome oder Moleküle, z. B. einem Gas oder Festkörper. Bei Einstrahlung einer Lichtwelle mit einer Frequenz  $f$ , die der Energie der atomaren oder molekularen Übergänge  $hf$  entspricht, findet eine Lichtverstärkung durch induzierte Emission statt. Atome, die von einer Wellenfront getroffen werden, strahlen in gleicher Phase. Nach dem Huygens'schen Prinzip kann die einfallende Welle in kohärente Elementarwellen zerlegt werden. Eine ebene Welle ergibt sich dadurch, dass jeder Punkt der Phasenfläche eine Kugelwelle abstrahlt. Die Überlagerung aller Kugelwellen resultiert in einer ebenen Wellenfront, wodurch diese erklärt wird. Durch die induzierte Emission kommen weitere kohärente Wellen dazu, die sich analog zu den Huygens'schen Elementarwellen verhalten. Daraus ergibt sich eine Lichtverstärkung in Einstrahlrichtung.

### Erzeugung der Inversion

In Bild 9-37 sind die am Laserprozess beteiligten Zustände am Beispiel eines 4-Niveau-Lasers dargestellt. Das obere Laserniveau (2) wird durch Energiezufuhr, die man beim Laser *Pumpen* nennt, besetzt. Dabei kann es günstig sein, einen Umweg über ein höheres breites Niveau zu machen. Lichtverstärkung und Lasertätigkeit treten nur auf, wenn die Besetzungszahl  $N_2$  im oberen Niveau größer ist als die Zahl  $N_1$  im unteren:  $N_2 > N_1$  (Inversion). Dies liegt daran, dass andernfalls die entstehende Strahlung durch das Niveau (1) wieder absorbiert wird. Das Pumpen zur Erreichung der Inversion kann durch Einstrahlung von Licht oder durch Elektronenstoß in einer Gasentladung erreicht werden. Bei manchen Lasern wird das obere Laserniveau direkt gepumpt, bei anderen (z. B. He-Ne-Laser) gehört das Pumpniveau zu einer anderen Atomart. Das Laserniveau soll möglichst nicht durch spontane Emission zerfallen, d. h. die Lebensdauer  $\tau_2$  soll lang sein (Abschnitt 10.3.1). Der obere Laserzustand zerfällt beim Laser durch induzierte Emission in ein unteres Niveau (1). Dieses soll schnell entleert werden,  $\tau_1$  muss klein sein. Andernfalls wird die Laserstrahlung wieder absorbiert, und die Lichtverstärkung sinkt.

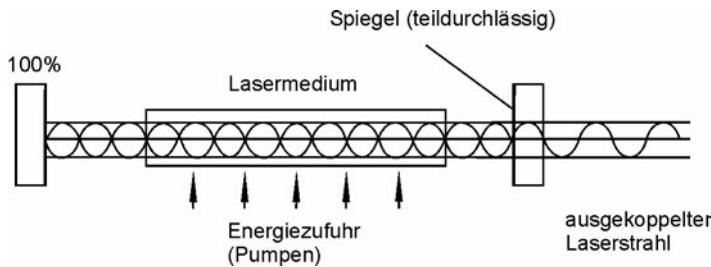


**Bild 9-36**

Termeschema eines Vierniveau-Lasers, z. B. Neodymlaser

### Laser

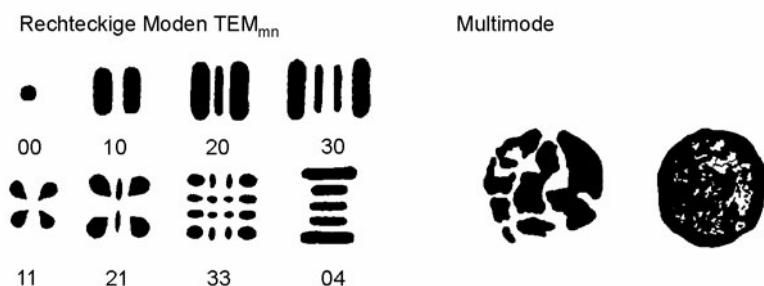
Bisher wurde lediglich die Verstärkung von Licht in einem Lasermedium behandelt. Aus der Elektronik ist bekannt, dass aus einem Verstärker ein Oszillatator wird, wenn ein Teil der Ausgangsleistung wieder in den Eingang rückgekoppelt wird. Das System beginnt dann nach dem Einschalten selbstständig zu schwingen. Dieses Prinzip wird auch beim Laser angewendet. Das angeregte Lasermedium dient als Lichtverstärker. Die Rückkopplung wird durch zwei parallel angeordnete Spiegel erzielt, zwischen denen sich der Lichtverstärker befindet (Bild 9-37). In diesem *optischen Resonator* bildet sich eine stehende Laserwelle aus.



**Bild 9-37**  
Schematischer Aufbau  
eines Lasers

### Anschwingen des Lasers

Die Entstehung der Laserwelle kann wie folgt erklärt werden: durch optisches Pumpen oder andere Anregungsmechanismen wird eine Inversion im Lasermedium erzeugt. Dabei entsteht zunächst nur spontane Emission. Ein Teil der Strahlung läuft auch in axialer Richtung des Resonators. Diese Lichtwelle wird an den Spiegeln reflektiert, wodurch sich eine stehende Welle ausbildet (Bild 9-37). Die Reflexion an den Spiegeln entspricht der Rückkopplung. Beim Durchgang durch das Lasermedium wird die Strahlung verstärkt. Sie erreicht hierbei schnell eine maximale Intensität, die durch die zugeführte Pumpenergie und die atomaren Konstanten des Materials begrenzt wird. Der Laserstrahl wird aus dem Resonator ausgekoppelt, indem auf der einen Seite des Lasers ein teildurchlässiger Spiegel mit dem Reflexionskoeffizienten  $R < 100\%$  angebracht wird. Der Reflexionskoeffizient des anderen Spiegels beträgt möglichst 100 %.



**Bild 9-38** Transversale Moden von Lasern

### Moden

Das zwischen den Spiegeln des Lasers hin- und herlaufende Licht bildet *stehende Wellen*, die bestimmte räumliche Verteilungen der elektrischen Feldstärke zeigen. Man nennt sie Schwingungsformen oder *axiale oder longitudinale Moden*. An den Spiegeln des Resonators wird die elektrische Feldstärke der Welle gleich null. Daraus folgt, dass in die Resonatorlänge  $L$  eine ganze Anzahl  $q$  von halben Lichtwellenlängen  $\lambda/2$  passen muss (Bilder 9-30b und 9-37, Gleichung 9.19b). Die axialen Moden werden demnach durch folgende Gleichung beschrieben:

$$L = q \frac{\lambda}{2} \quad \text{mit } q = \text{ganze Zahl} \quad \text{Longitudinale Moden} \quad (9.29)$$

In der Regel treten beim Laser mehrere axiale Moden mit den Frequenzen  $f_q = qc_0/(2L)$  gleichzeitig auf (9.29). Diese haben voneinander den Frequenzabstand  $\Delta f = f_{q+1} - f_q$ :

$$\Delta f = \frac{c_0}{2L} . \quad \text{Longitudinale Moden} \quad (9.20)$$

Daneben existieren *transversale Moden*. Aufgrund der Randbedingungen im Resonator bilden sich bestimmte Intensitätsverteilungen quer oder transversal zur Ausbreitungsrichtung aus. Diese transversalen Moden werden durch die Symbolik  $\text{TEM}_{mn}$  klassifiziert, wobei  $\text{TEM}$  die Abkürzung für Transverse Electromagnetic Mode steht. Für den rotationssymmetrischen Fall gibt  $m$  die Zahl der Nullstellen in radialer und  $n$  in azimutaler Richtung an. In einem rechteckigen System werden durch  $m$  und  $n$  die Zahlen der Nullstellen in vertikaler und horizontaler Richtung angezeigt. In Bild 9-39 sind einige Strukturen skizziert. Falls keine Maßnahmen zur Anregung bestimmter Moden getroffen werden, ergibt sich im Laser eine Überlagerung verschiedener transversaler und longitudinaler Moden.

### **TEM<sub>00</sub>**

Von besonderer Bedeutung ist die TEM<sub>00</sub>-Mode, da sie minimalen Strahlradius und minimale Strahldivergenz besitzt. Die radiale Verteilung der Leistungsdichte oder Bestrahlungsstärke  $I(r)$  ist durch eine Gauß-Verteilung gegeben:

$$I(r) = I_0 e^{-2r^2/w^2} \quad [I] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} . \quad \text{Strahlprofil} \quad (9.30)$$

Dabei ist  $r$  die radiale Koordinate und  $I_0$  maximale Leistungsdichte im Zentrum des Strahls. Der Strahldurchmesser  $2w$  beschreibt die Stelle ( $r = w$ ), an der die Leistungsdichte auf  $e^{-2} = 13,5\%$  gefallen ist. In der Strahlfläche  $\pi w^2$  sind 86,5 % der gesamten Laserleistung enthalten.

Der Laserstrahl breitet sich nie vollständig parallel aus. Die Grundmode (TEM<sub>00</sub>) hat die Form eines so genannten *Gauß'schen Strahls*, bei dem sich eine Strahltaille mit dem Radius  $w_0$  bildet. Neben dem Strahlradius am Ausgang des Lasers ( $w \approx w_0$ ) wird meist von den Herstellern die Divergenz angegeben. In größerer Entfernung von der Strahltaille ergibt sich für den halben Divergenzwinkel  $\Theta$ :

$$\Theta = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad [\Theta] = \text{radian} = 1 . \quad \text{Divergenzwinkel } \Theta \quad (9.31)$$

Laser mit großer Wellenlänge, z. B. der CO<sub>2</sub>-Laser mit  $\lambda = 10,6 \mu\text{m}$ , haben eine höhere Divergenz als solche mit kurzer Wellenlänge.

### **Eigenschaften von Laserstrahlung**

Laserstrahlung zeichnet sich durch eine hohe Kohärenz und Monochromasie (Einfarbigkeit) aus (Abschnitt 9.2.2). Infolgedessen ist die Divergenz der Strahlung gering (9.31). Bei der Fokussierung durch Linsen entstehen Brennflecke mit minimalen Durchmessern von der Größe der Wellenlänge, so dass hohe Leistungsdichten erzeugt werden. Durch besondere Techniken, wie Güteschaltung oder Modenkopplung, lassen sich kurze Pulse im ns- und ps-Bereich herstellen. Bei Pulsenergien von 0,1 J resultieren dabei Spitzenleistungen im GW-Bereich.

**Beispiel 9.3.1a** Eine 100-W-Glühlampe strahlt eine Lichtleistung von  $P = 1\text{W}$  aus. Wie groß ist die Bestrahlungsstärke  $I$  (in  $\text{W/m}^2$ ) in  $r = 1\text{m}$  Entfernung. Wie groß ist die Bestrahlungsstärke bei einem Laser mit  $P = 1\text{W}$  und einem Strahl durchmesser von  $2R = 1\text{mm}$ ?

$$\text{Glühlampe: } I = P/A = P/(4\pi r^2) = 0,08 \text{ W/m}^2.$$

$$\text{Laser: } I = P/A = P/(\pi R^2) = 1,3 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2.$$

**Beispiel 9.3.1b** Wie groß ist die Energie eines Photons bei einer Wellenlänge von  $\lambda = 700\text{nm}$ ?

Wie viele Photonen pro Sekunde werden von einem 1mW-Laser abgestrahlt?

Die Energie  $E$  eines Lichtquants beträgt ( $h = 6,63 \cdot 10^{-34}\text{ Js}$ ,  $c_0 = 3 \cdot 10^8\text{ m/s}$ ):  $E = hf = hc_0/\lambda = 2,8 \cdot 10^{-19}\text{ J}$ .

Die Leistung ist durch die Zahl der Photonen pro Sekunde  $n/t$  gegeben:  $P = hf \cdot n/t$ .

Es folgt:  $n/t = P/hf = 3,5 \cdot 10^{15} \text{ 1/s}$ .

**Beispiel 9.3.1c** Wie viele longitudinale Moden  $N$  strahlt ein Nd-Laser mit  $L = 1\text{m}$  (Linienbreite  $\Delta f_L = 120\text{GHz}$ )?

Der Abstand der longitudinalen Moden beträgt (9.20):  $\Delta f = c_0/2L = 1,5 \cdot 10^8 \text{ Hz} = 0,15\text{GHz}$ .

Für die Zahl der Moden folgt:  $N = \Delta f_L / \Delta f = 800$ . Andere Lasertypen strahlen auch mit  $N = 1$ .

**Beispiel 9.3.1 d** Wie groß ist die Strahldivergenz eines Lasers mit  $\lambda = 700\text{nm}$  und einem Strahlradius von  $w_0 = 0,4\text{mm}$ ? Wie groß ist der Strahlradius  $R$  in  $x = 100\text{m}$  Entfernung?

Nach (9.31) gilt:  $\Theta = \lambda/(\pi w_0) = 0,56 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ . In  $x = 100\text{m}$  erhält man:  $R \approx x\Theta = 5,6\text{cm}$ .

## 9.3.2 Lasertypen

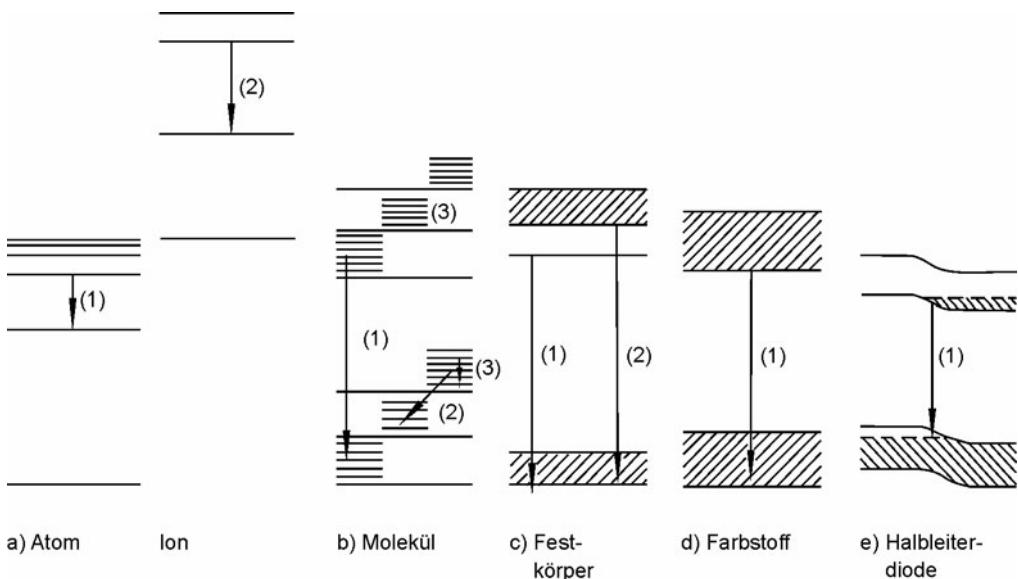
Heutzutage sind ungefähr 10000 verschiedene Laserübergänge bekannt, die Strahlung im Wellenlängenbereich von 1 nm bis über 1 mm hervorbringen und damit die Spektralgebiete der weichen Röntgenstrahlung, des ultravioletten, sichtbaren und infraroten Lichtes sowie der Millimeterwellen abdecken. Die wichtigsten Laser sind in Tabelle 9.5 zusammengestellt.

### Typenübersicht

Die Termschemata verschiedener Laser zeigt Bild 9-40. In *Gaslasern* wird die Strahlung in freien Atomen, Ionen oder Molekülen erzeugt. In Ionen sind die Energien größer als in Atomen, so dass *Ionenlaser* bei kürzeren Wellenlängen strahlen. In *Molekülllasern* existieren außer den elektronischen Niveaus auch Vibrations- und Rotationszustände (Abschnitt 10.3.4). Bei Laserübergängen zwischen elektronischen Niveaus entsteht Strahlung im Sichtbaren oder Ultravioletten (UV). Geringere Energien haben Vibrationszustände, die zu Laserstrahlung im Infraroten (IR) führen. Die Energie sinkt weiter für Übergänge zwischen Rotationsniveaus, wie es bei Ferninfrarotlasern der Fall ist. Bei *Festkörperlasern* treten scharfe und vibronisch verbreiterte Zustände auf, die diskrete oder kontinuierliche Laserstrahlung verursachen können. In *Farbstofflasern* sind die Energieniveaus vibronisch verbreitert, so dass abstimmbare Laserstrahlung erzeugt wird, ähnlich wie bei vibronischen Festkörperlasern. Auch bei *Halbleiterlasern* sind breite Energiebänder vorhanden (Abschnitt 11.3.3).

### Pumpmechanismen

Ein wichtiger Aspekt beim Aufbau eines Lasers ist die Anregung des aktiven Materials, die so genannte Inversionserzeugung, die eine Lichtverstärkung bewirkt. Die notwendige Energie kann auf verschiedene Weise zugeführt werden. Der erste Rubinlaser wurde durch Einstrahlung von Licht betrieben, eine Technik, die als Vorbild für viele weitere Laser diente. Derartige Geräte werden als *optisch gepumpte Laser* bezeichnet. Beispiele sind die Festkörper- und Farbstofflaser. Bei anderen Verfahren können Gase durch direkte elektrische Energiezufuhr angeregt werden, was zur Klasse der *Gasentladungslaser* führt. Eine besonders wirkungsvolle *Anregung durch Strom* ist bei Halbleitern möglich (Abschnitt 11.3.3).



**Bild 9-39** Schematische Darstellung von Übergängen verschiedener Lasertypen: a) Atome und Ionen: (1) Atomare Übergänge (He-Ne-Laser), (2) Ionentübergänge (Argonlaser), b) Moleküle: (1) Elektronische Zustände (Excimerlaser), (2) Vibrationsniveaus ( $\text{CO}_2$ -Laser), (3) Rotationsniveaus (Ferninfrarot-Laser) c) Festkörper: (1) Scharfe elektronische Zustände (Rubin- und Neodymlaser), (2) Energiebänder (Vibronische Laser) d) Farbstoffe: (1) Energiebänder e) Halbleiterdiode: (1) Übergänge in einer Laserdiode

**Beispiel 9.3.2** Welche Gruppen von Moleküllasern gibt es?

Nach Bild 9-39 zeigen Moleküle Übergänge zwischen elektronischen Niveaus (UV-Laser, z. B. Excimerlaser), Vibrationsniveaus (IR-Laser, z. B.  $\text{CO}_2$ -Laser) und Rotationsniveaus (Ferninfrarot-Laser).

### 9.3.3 Nichtlineare Optik

In der linearen Optik hängt die Brechzahl  $n$  und der Absorptionskoeffizient  $\alpha$  nicht von der Intensität der Strahlung ab. Reflexion, Brechung, Frequenz und Schwächung des Lichtes sind daher ebenfalls intensitätsunabhängig. Die Lichtausbreitung in Materie wird dadurch erklärt, dass die elektrische Feldstärke des Lichtes eine Kraft auf die atomaren Elektronen bewirkt. Dadurch schwingen die Elektronen mit der Lichtfrequenz  $f$ . Die oszillierenden Elektronen sind Ausgangspunkt von neuen Lichtwellen, die durch Überlagerung die Lichtausbreitung in der Materie darstellen. Bei kleinen Feldstärken ist die Schwingung linear und das abgestrahlte Licht hat gleiche Frequenz. Gepulste Laser können Leistungen im MW- bis GW-Bereich erzeugen, wobei Feldstärken von der Größenordnung der atomaren Felder auftreten. Die Schwingungen der Elektronen werden verzerrt, was zu nichtlinearen optischen Effekten führt.

#### Frequenzverdopplung

Bei Einstrahlung eines intensiven Laserstrahls mit der Lichtfrequenz  $f$  in einen geeigneten Kristall kann eine Umwandlung in Strahlung mit der Frequenz  $2f$  erfolgen. Dem entspricht eine Halbierung der Wellenlänge  $\lambda$  auf den Wert  $\lambda/2$ . Für diesen Zweck werden spezielle Frequenzverdoppler eingesetzt. Voraussetzung für eine hohe Umwandlungsrate ist eine Orientierung des Strahls in eine Richtung im Kristall, in der die Brechzahlen  $n$  für die Grund- und

Oberwelle mit  $f$  und  $2f$  gleich sind. In diesem Fall besitzen beide Wellen gleiche Geschwindigkeit, so dass eine kohärente Überlagerung bei der Frequenzumwandlung auftritt.

Im Teilchenbild des Lichtes kann die Frequenzverdopplung als Vereinigung zweier Photonen mit der Energie  $hf$  angesehen werden. Es entsteht bei diesem Vorgang ein Photon mit der doppelten Energie  $2hf$ , also mit der Frequenz  $2f$ . In der Lasertechnik hat dieser Vorgang große Bedeutung bei der Umwandlung von infraroter Strahlung von Pulslasern ins Sichtbare oder Ultraviolette.

### Frequenzmischung

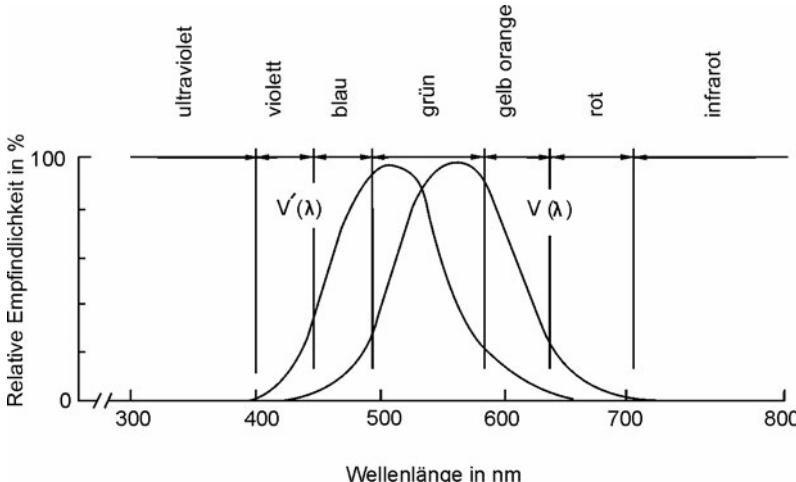
Bei Einstrahlung zweier Lichtwellen mit den Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$  in Kristalle treten neben der Frequenzverdopplung  $2f_1$  und  $2f_2$  auch Summen- und Differenzfrequenzen  $f_1 + f_2$  und  $f_1 - f_2$  auf.

### Sättigbare Absorber

Absorption findet in atomaren Systemen dadurch statt, dass Elektronen durch Einstrahlung von Licht vom Grundzustand in einen angeregten Zustand übergehen (Abschnitt 10.3.1). Bei hohen Intensitäten wird der Grundzustand dadurch entleert. Die Absorption sinkt und das Medium wird schließlich transparent. Sättigbare Absorber, z. B. Farbstofflösungen, finden in der Lasertechnik Anwendung als Güteschalter (Q-switch).

## 9.4 Photometrie

In der Photometrie wird Licht messtechnisch untersucht. Einerseits existieren physikalische, objektive Messgrößen, die beispielsweise in der Lasertechnik verwendet werden. Andererseits sind in der Beleuchtungstechnik subjektive, physiologische Begriffe notwendig, um die Wirkung auf das menschliche Auge zu beschreiben. In diesem Kapitel wird auf die entsprechenden lichttechnischen Größen eingegangen.



**Bild 9-40** Spektrale Empfindlichkeit des Auges.  
Die Kurve  $V(\lambda)$  gilt für Tagsehen,  $V'(\lambda)$  für Nachtsehen

### 9.4.1 Farbmetrik

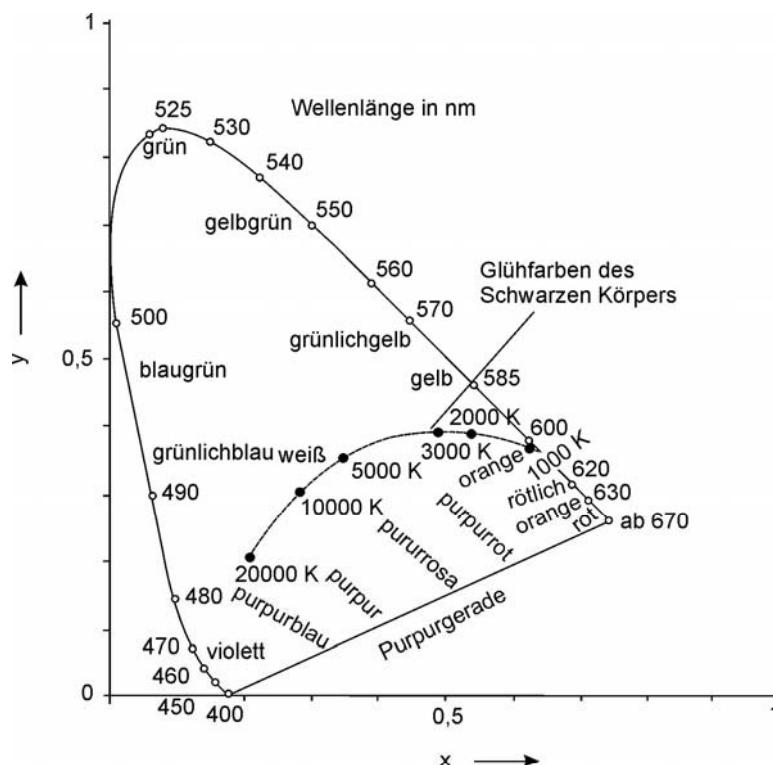
Das Auge zeigt für verschiedene Wellenlängen oder Spektralfarben große Unterschiede in der Sensibilität. Beim Tagsehen liegt die maximale Empfindlichkeit bei  $0,55 \mu\text{m}$  (gelbgrün) (Bild 9-40). Bei Nachtsehen werden nur Schwarzweiß-Unterschiede wahrgenommen (Abschnitt 9.1.4), und die Empfindlichkeitskurve des Auges ist zu kurzen Wellenlängen verschoben.

Farben

Das kontinuierliche Spektrum zeigt eine Reihe von Spektralfarben. Jede Wellenlänge erzeugt eine Farbe. Die Umkehrung, dass jeder Farbe eine Wellenlänge zuzuordnen ist, gilt jedoch nicht. Es gibt eine Reihe von Farben, die im Spektrum nicht vorkommen z. B. rosa, braun, oliv. Sie sind Gemische verschiedener Wellenlngten.

Die Erfahrung zeigt, dass jede Farbe durch drei Maßzahlen gekennzeichnet werden kann. Dazu werden die Farben in ein  $x,y,z$ -Koordinatensystem eingetragen. Bild 9-41 zeigt einen  $x-y$ -Schnitt durch das System in Form des *Farbdreiecks*. Auf den gebogenen Seiten ordnet man die Spektralfarben der Wellenlänge entsprechend an. Auf der Verbindungsgeraden Rot-Blau liegen die Purpurfarben. Die Farben in der Mitte entstehen durch Mischung, die auf unterschiedliche Art und Weise erfolgen kann. Die  $z$ -Koordinate ist in Bild 9-41 nicht eingetragen, sie gibt die Helligkeit an. Jede Farbe kann somit durch Angabe von  $x$ ,  $y$  und  $z$  charakterisiert werden.

Das Farbdreieck zeigt, dass aus Rot, Grün und Blau jede andere Farbe innerhalb der von diesen Punkten aufgespannten Fläche erzeugt werden kann. Dies wird beim Farbdruck, Fernsehen und bei der Photographie ausgenutzt, wobei allerdings auch andere Grundfarben benutzt werden.



**Bild 9-41**  
Darstellung des Farbdreiecks

**Beispiel 9.4.1** Mit welchen drei Farben kann man alle anderen Farben mischen?

An den Ecken des Farbdreiecks befinden sich die Farben rot, grün und violett (Bild 9-41). Damit sind alle Farben innerhalb dieses Dreiecks mischbar. In der Praxis benutzt man rot, grün und blau.

## 9.4.2 Grundbegriffe der Lichttechnik

### Lichtstrom $\Phi$

Die elektrische Leistung einer Lichtquelle wird in Watt ausgedrückt. Zur Kennzeichnung der Lichteistung, so wie sie vom Auge physiologisch empfunden wird, dient der Begriff *Lichtstrom*  $\Phi$  mit der Einheit  $[\Phi] = 1 \text{ Lumen} = 1 \text{ lm}$ . Im Maximum der Augenempfindlichkeit gilt:

$$\Phi = 683 \text{ Lumen (lm)} \text{ entspricht } 1 \text{ Watt (W)}. \quad \text{Lichtstrom } \Phi \quad (9.32)$$

Die Leistung in W in (9.32) bezieht sich auf die Lichtstrahlung, nicht auf die elektrische Leistung. Bei anderen Wellenlängen ist die linke Seite der Beziehung 9.32 mit der relativen Empfindlichkeit beim Tagsehen zu multiplizieren (Bild 9-40). Der Lichtstrom einiger Lichtquellen ist in Tabelle 9.6 dargestellt.

**Tabelle 9.6** Lichtstrom, Lichtausbeute und Leuchtdichte einiger Lichtquellen  
(220 V, außer Leuchtdiode)

Lichtquelle	Leistung in W	Lichtstrom in lm	Ausbeute in lm/W	Leuchtdichte in cd/m <sup>2</sup>
Leuchtdiode		30		
Glühlampe	60	730	12	ca. $10^7$ , matt $10^5$
Glühlampe	100	1380	14	
Leuchtstofflampe	40	2300	58	ca. $10^3$
" "(kompakt)	13	730	56	
Hg-Dampflampe	125	5400	44	ca. $10^9$
Hg-Dampflampe	2000	125000	62	

### Beleuchtungsstärke $E$

Für die Raumbeleuchtung ist die wichtigste Größe die Beleuchtungsstärke  $E$  (Tabelle 9.7); sie gibt den Lichtstrom  $\Phi$  pro bestrahlter Fläche  $\Phi$  an:

$$E = \frac{\Phi}{A} \quad \text{oder genauer} \quad E = \frac{d\Phi}{dA} \quad [\Phi] = \frac{\text{lm}}{\text{m}^2} = \text{lx} . \quad \text{Beleuchtungsstärke } E \quad (9.33)$$

**Tabelle 9.7** Daten zur Beleuchtungsstärke

Natürliche Beleuchtung	$E$ in lx	Erforderliche Beleuchtung	$E$ in lx
Sommersonne	100 000	Erkennung von Farben	3
Wintersonne	5 500	Straßenbeleuchtung	1 bis 16
Himmel bedeckt	1000	Große Arbeit	60
Vollmond	0,2	Lesen und Schreiben	250
Sterne ohne Mond	0,001	Technisches Zeichnen	1000

Die Einheit beträgt  $[E] = \text{Lux} = \text{lumen}/\text{m}^2$ . Die Beleuchtungsstärke nimmt quadratisch mit der Entfernung von der Lichtquelle ab.

### Lichtstärke $I$

Die Lichtstärke dient zur Kennzeichnung der Winkelabhängigkeit der Ausstrahlung von einer Lichtquelle. Die *Lichtstärke  $I$*  charakterisiert den Lichtstrom  $\Phi$  pro Raumwinkel  $\Omega$ :

$$I = \frac{\Phi}{\Omega} \quad \text{oder genauer} \quad I = \frac{d\Phi}{d\Omega} \quad [I] = \frac{\text{lm}}{\text{sr}} = \text{cd}. \quad \text{Lichtstärke } I \quad (9.34)$$

Die Einheit lautet  $[I] = \text{Candela} = \text{cd} = \text{lm}/\text{sr}$ . Die Lichtstärke ist eine Basisgröße des SI-Systems (siehe Tabelle 1.1).

Die Lichtstärke von Lichtquellen ist stark winkelabhängig. Eine ebene diffus strahlende Fläche nennt man Lambert-Strahler, wenn die Lichtstärke proportional zum Kosinus des Abstrahlwinkels ist. Für kugelförmige Abstrahlung gilt:

$$I = \frac{\Phi}{4\pi}, \quad \text{Kugelförmige Ausstrahlung}$$

Für den Zusammenhang zwischen der Lichtstärke  $I$  und der Beleuchtungsstärke  $E$  ergibt sich bei senkrechtem Einfall auf eine Fläche  $A$ :

$$E = \frac{\Phi}{A} = \frac{I\Omega}{A} = \frac{I}{r^2}. \quad \text{Beleuchtungsstärke } E \quad (9.35a)$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass der Raumwinkel durch  $\Omega = A/r^2$  gegeben ist, wobei  $r$  der Abstand von der Lichtquelle ist. Bei schräger Beleuchtung einer Fläche  $A$  unter dem Winkel  $\alpha$  resultiert:

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \alpha \quad \text{Beleuchtungsstärke } E \quad (9.35b)$$

### Leuchtdichte $L$

Die Leuchtdicke einer Lichtquelle gibt die Strahlungsleistung  $dP$  an, die von einem Flächenelement  $dA$  und dem Winkel  $\varepsilon$  in den Raumwinkel  $d\Omega$  gesandt wird:

$$L = \frac{d^2 P}{d\Omega dA \cos \varepsilon} \quad \text{oder} \quad L = \frac{P}{\Omega A}. \quad (9.35c)$$

Die zweite Gleichung beschreibt eine Näherung für senkrechte Abstrahlung ( $\cos \varepsilon = 1$ ).

### Ulbricht'sche Kugel

Dieses Gerät dient zur Messung des Lichtstromes  $\Phi$  einer Lichtquelle. Die Lichtquelle wird in das Innere einer Hohlkugel gebracht. Die Oberfläche der Hohlkugel streut diffus, so dass sich durch mehrfache Reflexionen eine gleichmäßige Ausleuchtung einstellt. An einer Stelle befindet sich abgeschirmt vom direkten Licht ein Photodetektor mit einer Empfindlichkeit, die dem Auge angepasst ist. Nach einem Kalibrierung wird der Lichtstrom  $\Phi$  angezeigt.

**Beispiel 9.4.2a** Wieviel Lumen strahlt eine Lichtquelle mit 1 W bei 570 nm und 500 nm?

Bei 570 nm (etwa Maximum der Augenempfindlichkeit) gilt: 1 W entspricht 683 lm (9.32). Nach Bild 9-40 (Tagsehen) ist die relative Empfindlichkeit bei 500 nm etwa 30 % und damit gilt: 1 W entspricht  $0,3 \cdot 683 \text{ lm} \approx 200 \text{ lm}$ .

**Beispiel 9.4.2b** Eine isotrop strahlende Lichtquelle mit 10000 lm hängt in  $r = 5 \text{ m}$  Höhe. Welche Beleuchtungsstärken herrschen senkrecht unter der Lampe ( $E$ ) und  $s = 2 \text{ m}$  seitlich ( $E'$ )?

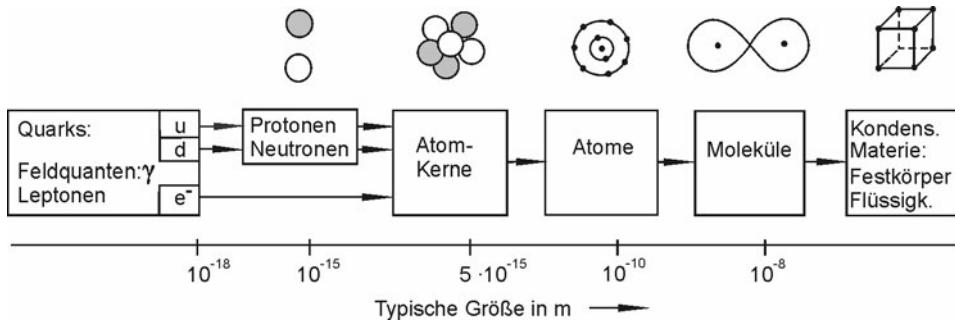
Zusammenhang zwischen Beleuchtungsstärke  $E$  und Lichtstrom  $\Phi$  (9.35a):  $E = \Phi / A$ . Im Abstand  $r$  wird die Kugelfläche  $A = 4\pi r^2$  bestrahlt. Für  $r = 5 \text{ m}$  gilt:  $E = 32 \text{ lm/m}^2 = 32 \text{ lx}$ . Seitlich errechnet sich  $r'$  aus dem Satz von Pythagoras:  $r' = \sqrt{r^2 + s^2} = \sqrt{29} \text{ m}$ . Damit wird  $E' = 25 \text{ lx}$ .

**Beispiel 9.4.2c** Eine Fläche, die  $r = 2,5 \text{ m}$  unter einer (kugelsymmetrisch strahlenden) Lampe liegt, soll mit  $E = 80 \text{ lx}$  beleuchtet werden. Wie groß sind Lichtstärke  $I$ , Lichtstrom  $\Phi$  und elektrische Leistung  $P$  (10 lm/W)?

Nach (9.35a) und (9.34) gilt:  $I = Er^2 = 500 \text{ lx} \cdot \text{m}^2 = 500 \text{ cd}$ ,  $\Phi = I\Omega = 500 \cdot 4\pi = 6280 \text{ cd} \cdot \text{sr} = 6280 \text{ lm}$  (mit  $\Omega = 4\pi$ ),  $P = 6280 \text{ lm}/10 \text{ lm/W} = 628 \text{ W}$ .

# 10 Atomphysik

Der Aufbau der Materie aus Quarks, Nukleonen, Kernen, Atomen, Molekülen und Festkörpern oder Flüssigkeiten ist schematisch im Bild 10-1 zusammengefasst. Im folgenden Kapitel wird die Struktur von Atomen und Molekülen dargestellt. Festkörper werden in Kapitel 11 und Atomkerne sowie Elementarteilchen in Kapitel 12 beschrieben.



**Bild 10-1** Aufbau der Materie aus Quarks, Nukleonen und Elektronen, Kernen, Atomen, Molekülen und Festkörpern

## 10.1 Bestandteile der Atome

### 10.1.1 Schematischer Aufbau der Atome

#### Kern und Hülle

Atome bestehen aus dem positiv geladenem *Kern* und der negativen Elektronenhülle. Der Kern setzt sich aus Nukleonen zusammen: den *positiven Protonen* und *ungeladenen Neutronen*. Die Masse der Nukleonen oder Kernteilchen ist nahezu gleich, sie beträgt für das Proton und Neutron:

$$m_P = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad \text{und} \quad m_N = 1,67496 \cdot 10^{-27} \text{ kg.} \quad \text{Nukleonenmasse} \quad (10.1)$$

Der Kernradius  $r_K$  ist außerordentlich klein, er hängt von der Zahl der Nukleonen ab, die man Massenzahl  $A$  nennt:

$$r_K \approx 1,4 \cdot 10^{-15} \sqrt[3]{A} \cdot \text{m} . \quad \text{Kernradius } r_K \quad (10.2)$$

Die Atomhülle ist wesentlich ausgedehnter, die Radien  $r_A$  reichen von

$$r_A = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad \text{bis} \quad 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ m.} \quad \text{Atomradius } r_A \quad (10.3)$$

Die Hülle wird durch Elektronen mit der Masse

$$m_E = 9,1095 \cdot 10^{-31} \text{ kg.} \quad \text{Elektronenmasse } m_E \quad (10.4)$$

gebildet. Die Elektronen besitzen den gleichen Betrag der Ladung wie die Protonen, allerdings mit unterschiedlichem Vorzeichen:

$$e_E = -e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad \text{und} \quad e_P = +e = +1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}. \quad \text{Elementarladung} \quad (10.5)$$

Atome sind normalerweise elektrisch neutral: die Zahl  $Z$  der Protonen ist gleich der Elektronenzahl. Im Periodensystem stellt  $Z$  die *Ordnungszahl* dar.

Aus den Daten erhält man folgendes Bild: Die Masse der Atome ist zu über 99,9 % im sehr kleinen Kern konzentriert. Die leichten Elektronen umkreisen den winzigen schweren Kern in relativ großen Abständen. Nach diesen Vorstellungen besteht das Atom aus den Elektronenbahnen, leerem Raum und dem Kern. Die *Ordnungszahl*  $Z$  wird durch die Zahl der Elektronen in der Hülle, die *Massenzahl*  $A$  durch Anzahl der Nukleonen im Kern gegeben. Alle chemischen und elektrischen Prozesse der Materie laufen in der Atomhülle ab. Das Gleiche gilt für mechanische Vorgänge, die im Grunde auf den Kräften zwischen den Elektronenhüllen beruhen. Der Kern ist durch die Hülle abgeschirmt. Seine positive Ladung hält das Atom zusammen.

## Periodensystem

Schon vor über 100 Jahren wurden die Elemente aufgrund ihrer chemischen Eigenschaften in das Periodensystem eingeordnet (Tabelle 10.1). Jedes Element wird durch die *Ordnungszahl*  $Z$  und die *Massenzahl*  $A$  charakterisiert:

$$A = N + Z. \quad \text{Massenzahl } A \quad (10.6)$$

Die Gleichung formuliert, dass die Zahl Neutronen  $N$  und Protonen  $Z$  gleich der Summe der Kernteilchen  $A$  ist. Das Periodensystem wird in Abschnitt 10.2.3 genauer beschrieben.

## Quantenmechanik

Der Aufbau der Atome ist mit den klassischen Gesetzen der Physik nicht zu erklären. Erst durch ungewöhnliche Vorstellungen über die Struktur von Licht und Materie gelingt eine vollständige Beschreibung der Atome. Die Grundvorstellung der Quantenmechanik und deren Anwendungen werden in den beiden folgenden Abschnitten gelegt.

**Beispiel 10.1.1a** Wie viele Protonen  $Z$ , Neutronen  $N$  und Elektronen enthält Silizium?

Aus Tabelle 10.1 folgt:  $Z = 14$  und  $A = N + Z \approx 28$ . Es folgt:  $N = 14$ . Die Zahl der Elektronen in der Hülle ist gleich der Zahl der Protonen im Kern.

**Beispiel 10.1.1b** Welche Masse besitzt ein Aluminiumkern und die Aluminiumhülle?

Aus Tabelle 10.1 folgt:  $Z=13$  und  $N=14$  (da  $Z+N \approx 27$ ).

Kernmasse:  $m_{\text{Kern}} = 13m_p + 14m_N \approx 27m_p \approx 27m_N \approx 4,52 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ .

Masse der Atomhülle:  $m_{\text{Hülle}} = 27m_e = 2,5 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$ . Die Masse der Hülle ist 2000mal kleiner als die Kernmasse.

**Beispiel 10.1.1c** Eine Batterie hat eine „Kapazität“ von 24 Ah. Wie viele Elektronen  $n$  können der Batterie entnommen werden?

Ladung  $Q = 24 \text{ Ah} = 86400 \text{ As} = 86400 \text{ C}$ . Zahl  $n = Q/e = 86400 / 1,6 \cdot 10^{-19} = 5,4 \cdot 10^{23}$

## 10.1.2 Lichtwellen und Photonen

Nach den Erkenntnissen der Quantenmechanik haben die Bausteine der Materie, wie Elektronen, Protonen und Neutronen, neben dem Teilchencharakter auch Welleneigenschaften. Als Einleitung zu den dualen Eigenschaften der Materie wird das gleiche Phänomen am Beispiel des Lichtes dargelegt.

**Tabelle 10.1** Aufbau des Periodensystems. Über dem Symbol für das Element ist die Ordnungszahl  $Z$ , darunter das relative Atomgewicht angegeben. Die Klammern bedeuten, dass die Elemente instabil sind.

## **Welle-Teilchen-Dualismus**

Aus der Optik her ist bekannt, dass Licht eine elektromagnetische Welle darstellt; Beugung und Interferenz von Licht sind ein Beweis dafür. Andere Erscheinungen, beispielsweise der Photo- oder Comptoneffekt, lassen sich durch die Wellenvorstellung nicht verstehen, sondern nur durch das Teilchenbild. Licht hat dualen, d. h. doppelartigen, Charakter: bei manchen Phänomenen treten die Eigenschaften als Welle hervor, bei anderen als Teilchen oder Quanten. Diese Aussage gilt nicht nur für Licht, sondern für das gesamte elektromagnetische Spektrum, wie Röntgen- und  $\gamma$ -Strahlung oder Wärmestrahlung. Der scheinbare Widerspruch zwischen Welle und Teilchen wird durch die Quantenmechanik gelöst.

## Photoeffekt

Der Photoeffekt bildet die Grundlage optoelektronischer Bauelemente, wie von Photodioden. Beim *äußeren Photoeffekt* werden Elektronen durch Licht aus einer Oberfläche, z. B. einer Zinkplatte, herausgelöst (Bild 10-2a). Im Wellenbild ist dieser Effekt nicht zu verstehen. Die Lichtwelle trifft alle Elektronen des Festkörpers gleichmäßig, so dass auf ein einzelnes Elektron kaum Energie übertragen wird. Der Photoeffekt lässt sich durch das Teilchenbild als Stoß zwischen Lichtteilchen, den *Photonen oder Lichtquanten*, erklären.

Die Energie  $E$  eines Lichtquants oder Photons hängt von der Frequenz  $f$  des Lichtes ab:

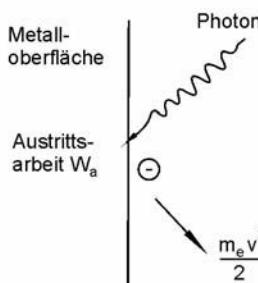
$$E = hf \quad \text{mit} \quad h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Js} . \quad \text{Photonenergie } E \quad (10.7)$$

Die Konstante  $h$  wird *Planck'sches Wirkungsquantum* genannt; unter Wirkung versteht man das Produkt aus Energie mal Zeit (Js). Damit kann der Photoeffekt nach dem Energiesatz berechnet werden. Ein Lichtquant der Energie  $hf$  wird von einem Elektron absorbiert, das die kinetische Energie  $m_E v^2 / 2$  erhält. Beim Austritt des Elektrons aus einer Oberfläche ist die Austrittsarbeit  $W_A$  zu leisten:

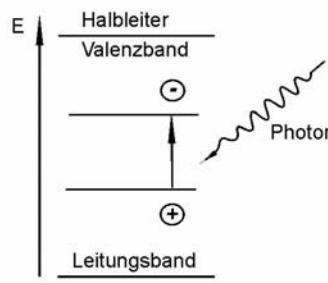
$$hf = \frac{m_E v^2}{2} + W_A. \quad \text{Photoeffekt} \quad (10.8)$$

Aus Experimenten zum Photoeffekt kann das Planck'sche Wirkungsquantum  $h$  ermittelt werden. Beim *inneren Photoeffekt* werden durch Einstrahlung von Licht in Halbleitern Elektronen in das Leitungsband gehoben werden und können elektronisch nachgewiesen werden (Bild 10-2b). Diese Erscheinung bildet die Grundlage der Optoelektronik (Abschnitt 11.3.3).

a) äußerer



### b) innerer Photoeffekt



**Bild 10-2** Beim Photoeffekt wird ein Elektron durch Absorption eines Photons aus dem Atomverband herausgelöst:  
a) äußerer Photoeffekt b) innerer Photoeffekt in Halbleitern

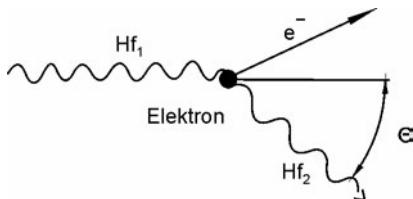
### Compton-Effekt

Die Teilchenvorstellung des Lichts oder von  $\gamma$ -Strahlung wird durch den Compton-Effekt unterstützt. Bei diesem Phänomen findet ein inelastischer Stoß zwischen einem Photon und einem Elektron statt, wobei dem Elektron nur ein Teil der Photonenenergie übertragen wird (Bild 10-3). Die gestreute Strahlung besitzt eine niedrigere Energie und Frequenz, bzw. eine höhere Wellenlänge als die einfallende. Diese Tatsache ist durch das Wellenbild nicht erklärbar sondern nur durch das Teilchenbild.

Der Compton-Effekt kann durch Aufstellung des Energie- und Impulssatzes berechnet werden. Dabei müssen die Erkenntnisse des nächsten Absatzes über den Impuls der Photonen berücksichtigt werden. Die Verschiebung der Wellenlänge der gestreuten Strahlung beim Compton-Effekt  $\Delta\lambda$  ist unabhängig von der primären Wellenlänge  $\lambda$ :

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_E c_0} (1 - \cos\theta). \quad \text{Compton-Effekt} \quad (10.9)$$

Dabei bedeuten  $\theta$  den Streuwinkel nach Bild 10-3 und  $m_E$  die Elektronenmasse. Der Compton-Effekt spielt eine Rolle bei der Wechselwirkung von Röntgen- oder  $\gamma$ -Strahlung mit Materie (Kapitel 12).



**Bild 10-3**

Beim Compton-Effekt stößt ein Photon mit einem Elektron zusammen und verliert dabei Energie ( $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ )

### Impuls von Photonen

Wichtige Effekte der Physik verlangen nach der Partikelvorstellung des Lichtes, d. h. der Existenz von Photonen. Die Energie  $E$  ist durch (10.7) gegeben:  $E = hf$ . Daneben gilt nach den Gesetzen der Relativitätstheorie (Abschnitt 4.2) die Äquivalenz von Masse  $m$  und Energie  $E$ :

$E = mc_0^2.$	Masse $m$ und Energie $E$	(10.10)
---------------	---------------------------	---------

Photonen bewegen sich mit der Lichtgeschwindigkeit  $c_0$ . Man kann ihnen entsprechend ihrer Energie  $E$  eine Masse  $m$  zuordnen. Der Impuls  $p$  eines Photons, das Produkt aus Masse  $m$  mal Geschwindigkeit  $c_0$ , beträgt somit  $p = mc_0 = E/c_0$  oder

$p = \frac{hf}{c_0} = \frac{h}{\lambda}.$	Photonen-Impuls $p$	(10.11a)
-------------------------------------------	---------------------	----------

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass die Gleichung  $p = h/\lambda$  auch für Materie gültig ist.

**Beispiel 10.1.2a** Wie groß ist die Energie eines Lichtquants mit  $\lambda = 514 \text{ nm}$  (in J und eV)?

Nach (10.7) gilt:  $E = hf = hc_0 / \lambda = 3,9 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,4 \text{ eV}$  ( $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ).

**Beispiel 10.1.2b** (Die medizinische Bildgebung beim Röntgen beruht auf der Absorption durch den Photoeffekt. Die Compton Streuung führt zu einer Bildunschärfe.) Wie groß ist der Energieverlust  $\Delta E$  der unter  $\theta = 60^\circ$  gestreuten 80 keV-Strahlung ( $E = 80 \text{ keV}$ )?

Aus (10.9)  $\Delta\lambda = (1 - \cos\theta)h/(m_E c_0)$  folgt mit  $E = hf = hc_0/\lambda$  und  $dE = -(hc_0/\lambda^2)d\lambda$  (differenzieren!):  
 $\Delta E = -E^2(1 - \cos\theta)/(m_E c_0^2) = -6,3 \text{ keV}$ .

**Beispiel 10.1.2c** Welche Kraft wirkt auf eine Zelle, die unter einem Mikroskop die Leistung eines Lasers mit  $P = 1 \text{ mW}$  vollständig absorbiert.

Die Leistung  $P$  ist durch die Zahl der Photonen pro Sekunde  $dn/dt$  gegeben:  $P = hfdn/dt$ . Der Impuls eines Photons beträgt (10.11a):  $p_p = hf/c_0$ . Damit wird  $P = c_0 p_p dn/dt$ , wobei  $p_p dn/dt$  die Impulsänderung pro Zeit (an die Zelle übertragener Impuls) ist. Nach (2.25c) ist diese Impulsänderung gleich der Kraft:  $F = p_p dn/dt$ . Daraus folgt:  $F = P/c_0 = 3,3 \cdot 10^{-12} \text{ N}$ .

### 10.1.3 Materiewellen und -strahlen

#### Materiewellen

Das Elektron kennen wir als Teilchen mit der Ruhemasse  $m_E = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ . Es zeigt sich jedoch, dass Elektronen oder andere Teilchen an Gitterstrukturen in Kristallen gebeugt werden. Daraus ist zu schließen, dass sich auch Materie wie eine Welle verhalten kann. Man stellt fest, dass der *Dualismus Teilchen-Welle* auch für Materie gilt. Es ist möglich, die für das Licht gültige Gleichung 10.11a auch für Elektronen- oder andere Teilchenstrahlen mit dem Impuls  $p$  anzuwenden. Die Wellenlänge  $\lambda$  von Materiewellen (de-Broglie-Wellenlänge) beträgt:

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad \text{Materiewellenlänge } \lambda \quad (10.11b)$$

#### Anwendungen: Elektronenmikroskop

Für Elektronenstrahlen, z. B. im Elektronenmikroskop, erhält man den Impuls  $p$  aus der Geschwindigkeit  $v$ :  $p = m_E v$ . Durchlaufen die Elektronen die Spannung  $U$ , gewinnen sie die Energie  $E = eU$  (8.67a). Dies führt zu kinetischen Energie:  $E = m_E v^2/2$ :

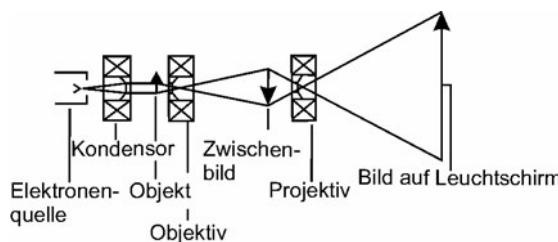
$$E = \frac{m_E v^2}{2} = eU \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m_E}}. \quad \text{Elektronenenergie } E$$

Für Elektronen ergibt sich damit eine De-Broglie-Wellenlänge  $\lambda = h/(m_E v)$  (10.11b):

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2eUm_E}}. \quad \text{Elektronenwellenlänge } \lambda \quad (10.12a)$$

In Elektronenmikroskopen werden Spannungen von  $U \approx 10 \text{ kV}$  und mehr eingesetzt. Daraus resultiert  $\lambda = 12 \text{ pm}$ .

Bild 10-4 zeigt den Aufbau eines Elektronenmikroskops. Der Strahl aus einer möglichst punktförmigen Elektronenquelle, die wie beim Fernseher aus einer Glühkathode besteht, wird mittels einer magnetischen Linse parallel auf das Objekt geschickt. Dieses ist so dünn, dass es weitgehend durchstrahlt wird, ähnlich wie es beim Lichtmikroskop der Fall ist. Das Objektiv erzeugt ein vergrößertes Zwischenbild, das durch das Projektiv auf einem Leuchtschirm abgebildet wird. Der Strahlengang der Elektronen lässt sich ohne das Wellenbild aus der Lorentz-Kraft berechnen, auf der auch die Wirkung der magnetischen Linsen beruht. Die Auflösung allerdings wird theoretisch durch die De-Broglie-Wellenlänge  $\lambda$  begrenzt (9.26). In der Praxis treten jedoch Linsenfehler auf, welche die Auflösung auf etwa 0,1 nm vergrößern. Damit können atomare Strukturen sichtbar gemacht werden, während das Lichtmikroskop im Auflösungsvermögen durch die Wellenlänge des Lichtes von 500 nm beschränkt ist.



**Bild 10-4**  
Prinzipieller Aufbau eines  
Elektronenmikroskops  
(in Transmission)

### Quantengrabenlaser

In der Lasertechnik werden Halbleiterschichten mit einer Dicke  $d \leq 30 \text{ nm}$  hergestellt, die in andere Schichten eingebettet sind. Die Elektronen im Leitungsband werden an den Grenzen der Schichten reflektiert, so dass sich stehende Elektronenwellen bilden. Für die Schichtdicke  $d$  gilt:  $d = n\lambda/2$ , wobei  $\lambda$  die Materiewellenlänge ist (10.11b). Die Zahl  $n = 1, 2, 3 \dots$ , stellt jeweils einen Energiezustand in der Halbleiterschicht dar.

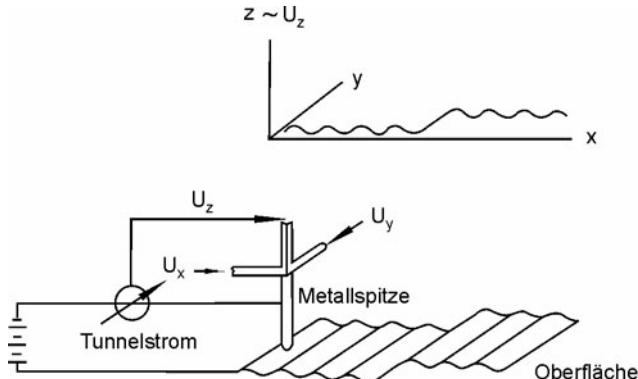
### Rasterelektronenmikroskop

Das *Rasterelektronenmikroskop* ist ohne die Wellenvorstellung erklärbar. Eine Oberfläche wird mit einem fokussierten Elektronenstrahl bei einem Durchmesser zwischen 1 bis 10 nm zeilenförmig abgetastet. Bei diesem Vorgang werden Elektronen gestreut, aus dem Objekt gelöst und auf einem Detektor gesammelt. Das daraus gewonnene elektrische Signal wird zur Helligkeitssteuerung eines Bildschirms verwendet. Die Auflösung ist schlechter als beim normalen Elektronenmikroskop; jedoch können auch dicke Objekte untersucht werden und es entstehen plastisch wirkende Bilder mit sehr hoher Tiefenschärfe. Nach einem ähnlichen Prinzip arbeiten *Laser-Scanning-Mikroskope*, welche die Oberfläche mit einem fokussiertem Laserstrahl abtasten und das Streulicht als Bildsignal ausnutzen. Das Rasterelektronenmikroskop kann auch als Röntgenmikrosonde erweitert werden. Durch den gebündelten Elektronenstrahl werden innere Schalen der Atome ionisiert. Beim Auffüllen dieser Leerstellen entsteht Röntgenstrahlung, die für das jeweilige Element charakteristisch ist (Abschnitt 10.3.2). Die Analyse dieser Strahlung gibt Auskunft über die Verteilung der Elemente in der untersuchten Oberfläche.

### Tunnelmikroskop

Es zeigt sich in zahlreichen Versuchen, dass Materie im atomaren Bereich durch Welleneigenschaften charakterisiert ist. Ein Beispiel ist der *Tunneleffekt* von Elektronen in Festkörpern. Im Wellenbild stellen frei bewegliche Elektronen in Metallen Materiewellen dar. An der Oberfläche werden die Wellen in den Festkörper reflektiert. Dabei dringt die Welle, ähnlich wie bei der Totalreflexion von Licht, geringfügig aus dem Material heraus, ohne jedoch in der Regel zu entweichen. Bringt man ein zweites Metallstück dicht aber berührungslos an die Oberfläche, sinkt der Reflexionsgrad für die Materiewellen. Ein Teil der Elektronenwelle kann von einem Material zum anderen übertreten (tunneln). Legt man eine Spannung an, so fließt ein Tunnelstrom.

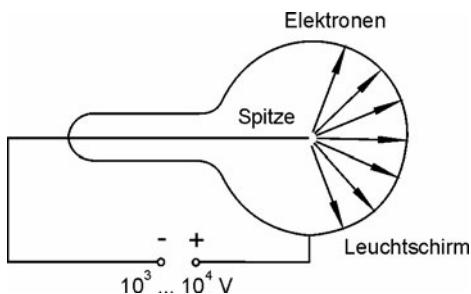
Dieser Effekt wird im *Tunnelmikroskop* ausgenutzt. Eine Metallspitze, die in einem Atom endet, wird dicht über die zu untersuchende Oberfläche gebracht, bis ein Tunnelstrom von etwa 1 nA fließt. Die Spitze ist mit hoher Präzision durch piezoelektrische Stellelemente im x-, y- und z-Richtung verstellbar (Bild 10-5). Sie wird zeilenförmig über die Oberfläche der Probe geführt, wobei der Tunnelstrom und damit der Abstand von einigen nm konstant gehalten wird. Die Regelspannung ist ein Maß für das Oberflächenprofil, und sie enthält die Bildinformation über das Objekt. Eine Darstellung auf einem Bildschirm ermöglicht die Erkennung einzelner Atome.

**Bild 10-5**

Beim Tunnelmikroskop wird eine Spalte (1 nm Radius) im konstanten Abstand über eine Oberfläche geführt. Als Regelsignal dient der Tunnelstrom. Die Stellglieder beruhen auf dem Piezoeffekt.

### Feldelektronenmikroskop und Feldionenmikroskop

*Feldemissionsmikroskope* können durch das Teilchenbild erklärt werden. Bei diesem Mikroskop wird an eine feine Spalte nach Bild 10-6 eine elektrische Spannung angelegt. Durch die hohe Feldstärke, die sich an der stark gekrümmten Oberfläche bildet, werden Elektronen emittiert. Sie werden in Zentralprojektion auf den Leuchtschirm beschleunigt und erzeugen dort ein Bild mit einer Vergrößerung von  $10^5$  bis  $10^6$ . Die Bildinformation stellt die örtliche Verteilung der Austrittsarbeit dar. Es können einzelne Atome als Schatten sichtbar gemacht werden. Ähnlich arbeiten *Feldionenmikroskope*. Da die Präparation der Spitzen langwierig ist, werden derartige Mikroskope hauptsächlich in der Wissenschaft eingesetzt.

**Bild 10-6**

Beim Feldelektronenmikroskop werden Elektronen aus einer Spalte gezogen. Es wird der atomare Aufbau der Spalte oder von aufgebrachten Materialien in Schattenprojektion abgebildet

### Neutronen- und Elektronenbeugung

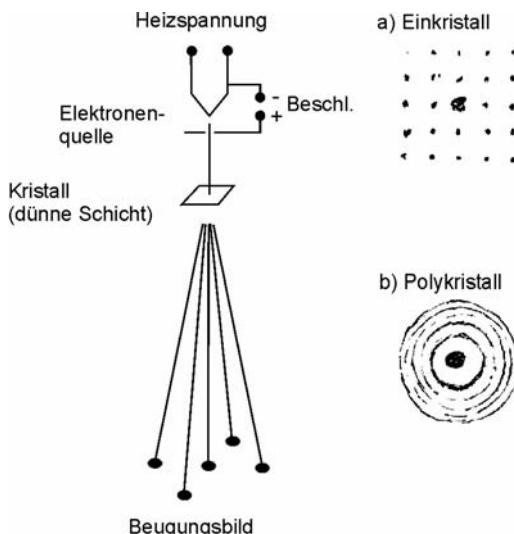
Neben der Röntgenbeugung liefern Versuche mit Materiewellen, insbesondere von Neutronen und Elektronen, Informationen über den atomaren Aufbau von Festkörpern. Neutronenbeugung wird an speziellen Forschungsreaktoren mit so genannten thermischen Neutronen durchgeführt. Die thermische Energie eines Teilchens, z. B. eines Neutrons der Masse  $m$ , wird nach der kinetischen Gastheorie durch die Temperatur  $T$  und die Boltzmann-Konstante  $k = 1,381 \cdot 10^{23} \text{ J/K}$  bestimmt (Kapitel: Thermodynamik):

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} . \quad \text{Neutronenergie } E$$

Aus der Teilchengeschwindigkeit  $v$  ist die De-Broglie-Wellenlänge  $\lambda = h/(mv)$  berechenbar. Entsprechend (10.12a) resultiert:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3kTm}} . \quad \text{Neutronenwellenlänge } \lambda \quad (10.12b)$$

Für thermische Neutronen mit  $T = 300$  K berechnet man  $\lambda = 0,14$  nm. Atome im Festkörper besitzen einen Abstand von einigen 0,1 nm. Kristalle bilden somit Gitterstrukturen, an denen Neutronen gebeugt werden. Aus den Beugungsmustern gelingt eine genaue Analyse der Gitterabstände und der Lage der Atome im Kristall. Insbesondere können mit Neutronen auch magnetische Eigenschaften von Festkörpern untersucht werden, da Neutronen keine Ladung aber ein magnetisches Moment aufweisen. Ähnliche Beugungsexperimente werden mit Elektronen im eV- und keV-Bereich durchgeführt. Bild 10-7 zeigt den experimentellen Aufbau zur Elektronenbeugung mit Beugungsbildern für mono- und polykristalline Schichten. Derartige Strukturen entstehen auch bei Röntgen- und Neutronenbeugung.



**Bild 10-7**  
Prinzip der Elektronenbeugung an dünnen kristallinen Schichten in Transmission:  
a) Einkristall  
b) Polykristall

## Elektronenwellen in Atomen

Die vorangehenden Abschnitte zeigen, dass Materie Wellen- und Teilcheneigenschaften aufweist. Im Atom umkreisen Elektronen den Kern. Im Teilchenbild handelt es sich um Bahnen von kleinen Materieteilchen, ähnlich wie Satellitenorbitale um die Erde. Nach den Vorstellungen des Wellenbildes entstehen im Atom in sich geschlossene Elektronenwellen um den Kern. Dadurch kann die Schalenstruktur und das Auftreten diskreter atomarer Bahnen verständlich begründet werden.

## Heisenberg'sche Unschärferelation

Wegen der Welleneigenschaften ist es nicht möglich, alle Daten eines Teilchens, z. B. eines Elektrons, präzise festzustellen. Die Messgenauigkeit des Ortes  $\Delta x$  und der Impulses  $\Delta p$  wird durch das Planck'sche Wirkungsquantum  $\hbar$  gegeben:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar . \quad \text{Unschärferelation}$$

Grund für diese Ungenauigkeit sind Beugungseffekte beim Messvorgang. Die Größen Energie und Zeit sind mit einer ähnlichen Ungenauigkeit verknüpft:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar . \quad \text{Unschärferelation}$$

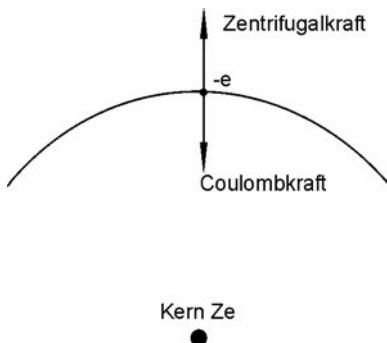
Besitzt ein atomares Niveau die Lebensdauer  $\Delta t$ , so ist die Breite des Energiezustandes  $\Delta E$  durch obige Gleichung festgelegt.

**Beispiel 10.1.3** Wie groß ist die Wellenlänge von Elektronen, die mit  $U = 10 \text{ kV}$  beschleunigt wurden?

Aus (10.12a) folgt:  $\lambda = h / (\sqrt{2eUm_E}) = 2,1 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ .

## 10.2 Aufbau der Atome

Nach den Gesetzen der klassischen Physik können stabile Atome nicht existieren; die kreisenden Elektronen müssten wie schwingende Dipole elektromagnetische Energie abstrahlen und schließlich auf den Kern fallen. Weiterhin kann der Schalenaufbau der Atome mit ganz bestimmten Elektronenbahnen nicht verstanden werden. Im Zusammenhang damit stehen die von den Atomen emittierten Spektrallinien. Im Wellenbild treten diese Schwierigkeiten nicht auf. Um den Kern bilden sich geschlossene Elektronenwellen, die den Schalen entsprechen. Nach dieser Vorstellung ist ein Elektron in einer Schale mit einer gewissen Aufenthaltswahrscheinlichkeit räumlich verteilt. Es handelt sich also nicht um eine schwingende Ladung sondern um eine Elektronenwelle.



**Bild 10-8**

Zur Berechnung der Elektronenbahnen.  
Die Zentrifugalkraft ist gleich der  
Coulomb'schen Anziehungskraft

### 10.2.1 Wasserstoffatom

#### Stationäre Elektronenbahnen

Im Folgenden werden die Elektronenbahnen um den Kern am Beispiel eines wasserstoffähnlichen Atoms mit einem Elektron berechnet. Im *Teilchenbild* wirkt zwischen dem Kern mit  $Z$  Protonen und einem kreisenden Elektron mit dem Bahnradius  $r$  die anziehende *Coulomb-Kraft*  $F_C$ . Diese ist proportional zu den Ladungen von Kern ( $Ze$ ) und Elektron ( $-e$ ) und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes  $r$  (8.2b). Für den Betrag der Kraft resultiert (Bild 10-8):

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze e}{r^2} . \quad \text{Coulomb-Kraft } F_C$$

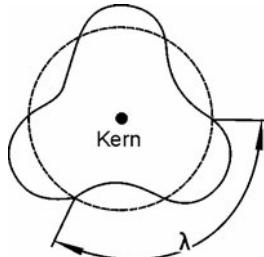
Die elektrische Feldkonstante beträgt  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$  und die Elementarladung  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  (Abschnitt 8.1). Für Wasserstoffatome gilt  $Z = 1$ , für wasserstoffähnliche Ionen  $Z = 2, 3, 4, \dots$  Im Kräftegleichgewicht ist  $F_C$  gleich der Zentrifugalkraft  $m_E v^2 / r$ , die am Elektron der Masse  $m_E$  wirkt:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = \frac{m_E v^2}{r} . \quad \text{Coulomkraft} = \text{Zentrifugalkraft} \quad (10.13a)$$

Nach dieser klassischen Gleichung kann das Elektron jeden beliebigen Bahnradius  $r$  einnehmen, ähnlich wie es bei einem Erdsatelliten der Fall ist.

Im *Wellenbild* entstehen um die Kerne in sich geschlossene Elektronenwellen, d. h. in den Bahnumfang muss ein  $n$ -faches der de-Broglie-Wellenlänge passen (Bild 10-9):

$$2\pi r = n\lambda = n \frac{h}{m_E v} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{Elektronenwellen} \quad (10.13b)$$



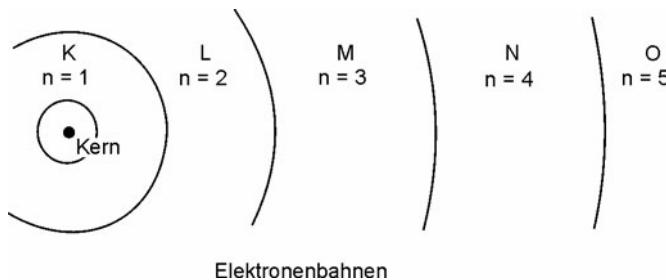
**Bild 10-9**

Um den Atomkern bilden sich stehende Elektronenwellen.  
Dadurch kann die Schalenstruktur der Elemente verstanden werden.

Dabei repräsentiert die Hauptquantenzahl  $n = 1, 2, 3, \dots$  jeweils eine stationäre Elektronenbahn, die auch als Schale bezeichnet wird. Schließen sich die Elektronenwellen nicht in ihrer Bahn, so löschen sie sich durch Interferenz nach mehreren Umläufen aus. Die stationären Bahnen können mit (10.13a) und 10.13b) berechnet werden:

$$r_n = \frac{\hbar^2 \varepsilon_0}{\pi m_E Z e^2} n^2 \quad \text{und} \quad v_n = \frac{Z e^2}{2 \varepsilon_0 \hbar} \frac{1}{n} . \quad \text{Bahnradius } r_n \quad (10.14)$$

In den Gleichungen für den Bahnradius  $r_n$  und die Geschwindigkeit  $v_n$  tritt neben einer Reihe von Naturkonstanten die Hauptquantenzahl  $n$  auf. Die Radien der verschiedenen Schalen steigen mit  $n^2$ . Man bezeichnet die Bahnen mit  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  als K-, L-, M-, N-, ... Schale (Bild 10-10).



**Bild 10-10**  
Bohrsches Atommodell  
(nicht maßstabsgerecht)

### Energieniveaus

Jede Elektronenbahn ist durch eine bestimmte Energie charakterisiert. Man nennt die Elektronenzustände daher auch *Energieniveaus*. Die Energie  $E_n$  setzt sich aus der kinetischen Energie  $E_{kin} = m_E v^2 / 2$  und der potentiellen Energie  $E_{pot}$  zusammen:

$$E = E_{pot} + E_{kin} .$$

Die potentielle Energie  $E_{pot}$  ist die Arbeit, die aufgewendet wird, um das Elektron aus der Bahn mit dem Radius  $r_n$  vom Atom zu entfernen. Das Elektron wird in diesem Fall nach „unendlich“ verschoben oder ionisiert. Da die Energie in das Atom hineingebracht werden muss, wird sie als negativ definiert:

$$E_{pot} = - \int_{r_n}^{\infty} F_C dr = - \int_{r_n}^{\infty} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = - \frac{Z^2 e^4 m_E}{4\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

Die kinetische Energie  $E_{kin}$  kann aus der Geschwindigkeit  $v_n$  nach (10.14) berechnet werden:

$$E_{kin} = \frac{Z^2 e^4 m_E}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}.$$

Die gesamte Energie  $E = E_{pot} + E_{kin}$  eines Zustandes mit der Hauptquantenzahl  $n$  ergibt sich somit zu:

$$E_n = - \frac{Z^2 e^4 m_E}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}. \quad \text{Atomare Energiezustände } E_n \quad (10.15)$$

Das negative Vorzeichen symbolisiert, dass die Energie von außen in das Atom gebracht werden muss, um das Elektron aus seiner Bahn herauszulösen. Man nennt diesen Vorgang *Ionisation*. Für Wasserstoff mit  $Z = 1$  sind die Energieniveaus in Bild 10-11a skizziert. Normalerweise ist nur die tiefste Bahn mit  $n = 1$ , d. h. die K-Schale mit einem Elektron besetzt. Die Energie beträgt  $E_1 = -13,53 \text{ eV} (= 2,2 \cdot 10^{-18} \text{ J})$ , der entsprechende Bahnradius  $r_1 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ . Für große Hauptquantenzahlen ( $n \rightarrow \infty$ ) wird die Bindungsenergie  $E_\infty = 0$ . Das Elektron ist dann frei und das Atom ionisiert. Die Energie der Bahnen variiert mit  $1/n^2$ . Die Bahnen mit  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  weisen die Energien  $-13,4 \text{ eV}, -13,53/4 \text{ eV}, -13,53/9 \text{ eV}, -13,53/16 \text{ eV}, \dots$  auf.

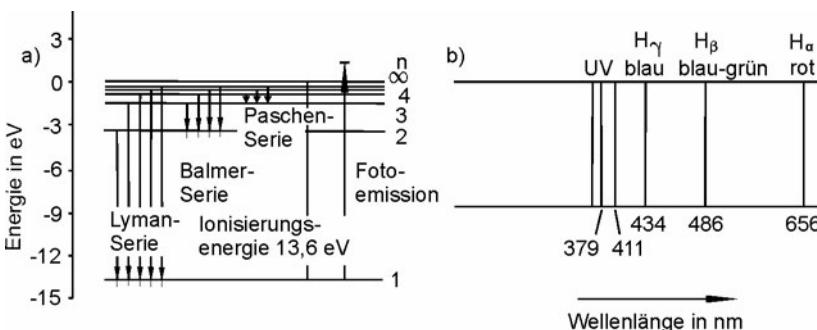


Bild 10-11 Wasserstoffatom: a) Termschema mit den Übergängen b) Linienspektrum der Balmer-Serie

### Spektrallinien

In Gasentladungen oder durch andere Anregung können Elektronen aus ihrer niedrigsten Bahn in angeregte Zustände gehoben werden. Die Aufenthaltsdauer in diesen höheren Bahnen ist nur kurz (ms bis ns). Beim Rückweg des Elektrons in die tieferen Zustände wird Energie in Form von Licht frei. Es entstehen ganz bestimmte, für das Atom charakteristische Spektrallinien, die in Bild 10-11 mit ihren historischen Namen für das H-Atom eingetragen sind. Nur die so genannte *Balmer Serie* liegt teilweise im sichtbaren Spektralbereich. Man kann die Fre-

quenzen der Strahlung bei einem Übergang zwischen zwei Niveaus mit den Hauptquantenzahlen  $n_2$  und  $n_1$  aus (10.15) ableiten:

$$hf = E_2 - E_1$$

$$f = \frac{Z^2 e^4 m_E}{8\epsilon_0^2 h^3} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \quad \text{Spektrallinien} \quad (10.16a)$$

Zur Abkürzung wird die Rydberg Frequenz  $R$  eingeführt:

$$f = Z^2 R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad \text{mit} \quad R = \frac{e^4 m_E}{8\epsilon_0^2 h^3} = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ Hz}. \quad \text{Spektrallinien (10.16b)}$$

Beispielsweise erhält man für die erste Linie der Balmer-Serie ( $n_2 = 3$ ,  $n_1 = 2$  und  $Z = 1$ );  $f = 4,57 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  und  $\lambda = c_0 / f = 656 \text{ nm}$  in Übereinstimmung mit dem Wert aus Bild 10-11b.

### Bohr'sche Postulate

Im vorliegenden Abschnitt wurde das H-Atom mit Hilfe des Teilchen- und Wellenbildes von Elektronen berechnet. Historisch standen am Anfang der Atomphysik die Bohr'schen Postulate im Vordergrund, die erst durch das Wellen- und Teilchenbild verständlich werden. Sie lauten:

- (1) Es existieren stationäre Elektronenbahnen, bei denen der Drehimpuls  $pr = m_E vr$  gleich einem ganzzahligen Vielfachen von  $h/(2\pi)$  ist, d. h.,  $2\pi m_E vr = nh$ . Dieser Ausdruck ist identisch mit (10.13b).
- (2) Beim Übergang von einer Bahn höherer Energie  $E_2$  zu einer mit niedriger  $E_1$  entsteht Licht mit der Frequenz  $hf = E_2 - E_1$  (10.16a).

Im diesem Abschnitt wurden grundlegende Aussagen und Berechnungen über das einfachste Atom, Wasserstoff, gemacht. Eine genaue Beschreibung kann durch die Quantenmechanik erfolgen, die auch den Aufbau komplizierter Atome vollständig beschreibt.

**Beispiel 10.2.1a** Wie groß ist die Gravitationskraft im Verhältnis zur Coulomb-Kraft beim H-Atom?

Gravitationskraft (4.1):  $F = \gamma m_l m_2 / r^2$  ( $\gamma = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kgs}^2$ ,  $m_l = m_E$  = Elektronenmasse,  $m_2 = m_P$  = Protonenmasse), Coulomb-Kraft:  $F_C = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot Ze^2 / r^2$  ( $Z = 1$ ).

Verhältnis:  $F/F_C = \gamma m_E m_P 4\pi\epsilon_0 / e^2 = 4 \cdot 10^{-40}$ . Die Gravitationskraft ist vernachlässigbar.

**Beispiel 10.2.1b** Wie groß ist die Energie zur Ionisation des H-Atoms?

Es gilt (10.15) mit  $Z = 1$ :  $E_n = -(e^4 m_E / 8\epsilon_0^2 h^2) / n^2 = -2,1 \cdot 10^{-18} / n^2 \text{ J} = -13,4 / n^2 \text{ eV}$ .

Damit hat der Grundzustand ( $n = 1$ ) die Energie  $E_1 = -13,4 \text{ eV}$ . Das Minuszeichen zeigt, dass diese Energie frei wird, wenn ein Elektron in diesen Grundzustand hineinfällt. Um das Elektron zu befreien (Ionisation), muss die Energie von  $13,4 \text{ eV}$  aufgebracht werden.

**Beispiel 10.2.1c** Man berechne die Spektrallinien des H-Atoms, die im ersten angeregten Zustand ( $n = 2$ ) enden (Balmer-Serie).

Nach (10.16b) gilt:  $f = 3,29 \cdot 10^{15} (1/2^2 - 1/n_2^2) \text{ Hz}$  mit  $n_2 = 3, 4, 5, \dots$ . Damit erhält man:

$f = 4,57 \cdot 10^{14} \text{ Hz}, 6,17 \cdot 10^{14} \text{ Hz}, 6,91 \cdot 10^{14} \text{ Hz}, \dots$  Mit  $\lambda = c_0 / f$  folgt:  $\lambda = 656 \text{ nm}, 486 \text{ nm}, 434 \text{ nm}, \dots$

**Beispiel 10.2.1d** In einer Schicht (eines Quantengrabenlasers) der Dicke  $d$  soll eine stehende Elektronenwelle mit  $d = \lambda/2$  mit der Energie von  $2 \text{ eV}$  erzeugt werden. Wie groß muss  $d$  sein?

Es gilt:  $d = \lambda/2$ . Die Wellenlänge errechnet sich aus (10.12a) mit  $U = 2 \text{ V}$ :  $\lambda = h / \sqrt{2eUm_E} = 1,7 \text{ nm}$ .

Damit folgt  $d = 0,85 \text{ nm}$ .

**Beispiel 10.2.1e** Wie groß ist der Radius des H-Atoms?

Nach (10.14) errechnet man mit  $Z = 1$ :  $r_1 = 53 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ .

## 10.2.2 Quantenzahlen

Die Energiezustände des H-Atoms wurden bisher durch die Hauptquantenzahl  $n$  beschrieben. Untersuchungen zeigen, dass weitere Quantenzahlen existieren (Tabelle 10.2), welche die Details der Wasserstoffspektren und den Aufbau komplizierter Atome des Periodensystems verständlich machen.

**Tabelle 10.2** Bedeutung der Quantenzahlen in Atomen

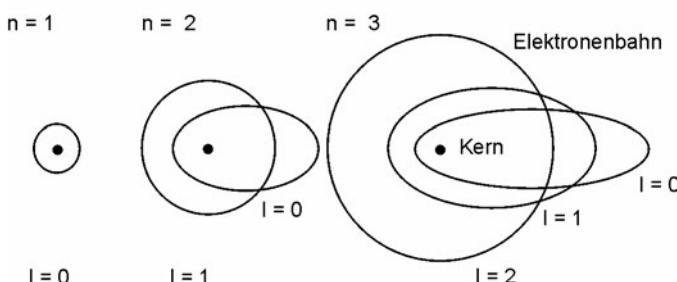
Quantenzahl	Symbol	Bedeutung
Haupt-Quantenzahl $n$	$n = 1, 2, 3, 4, \dots$ $= K, L, M, N, \dots$	$n$ charakterisiert den Radius der Kreisbahn oder die große Halbachse der Ellipsenbahn. Durch $n$ wird die Schale ( $K, L, M, N, \dots$ ) und die Energie angegeben. In jeder Schale können sich $2n^2$ Elektronen aufhalten.
Bahndrehimpuls-Quantenzahl $l$	$l = 1, 2, 3, \dots (n-1)$	$l$ gibt für eine Schale $n$ die Zahl der Ellipsenbahnen mit verschiedenerer Exzentrizität an. Der Drehimpuls beträgt $lh/2\pi$ .
Magnet-Quantenzahl $m$	$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm l$	$m$ gibt die Lage der Bahnebenen im Raum an. Das magnetische Moment ist proportional zu $m$ .
Spin-Quantenzahl $s$	$s = \pm 1/2$	$s$ bestimmt die Lage des Eigendrehimpulses (Spin) des Elektrons zum Bahndrehimpuls (parallel = +, antiparallel = -).

### Hauptquantenzahl $n$

Hauptquantenzahl  $n$  gibt die Schale und deren Energie an. Sie bestimmt den Radius der Kreisbahn; im Wellenbild ist  $n$  die Zahl der Wellenlängen im Bahnumfang. In jede Schale  $n$  können sich  $2n^2$  Elektronen in verschiedenen Zuständen aufhalten:

$$\text{Elektronenzahl in der } n\text{-ten Schale} = 2n^2 \quad (10.17)$$

a)



**Bild 10-12a**  
Bohr-Sommerfeld'sche  
Elektronenbahnen für die  
Hauptquantenzahlen  
 $n = 1, 2, 3$   
(K-, L-, M-Schalen)

### Bahndrehimpulsquantenzahl $l$

Die auch als *Nebenquantenzahl*  $l$  bezeichnete Größe berücksichtigt, dass neben einer Kreisbahn auch Ellipsenbahnen um den Kern möglich sind. Nach der klassischen Physik ist die Energie einer kreisförmigen Bewegung mit dem Durchmesser  $2r$  ebenso groß wie die einer Ellipse gleich großer Hauptachse. Auf einer Ellipsenbahn findet nach Bild 10-12 eine starke

Annäherung an den Kern statt. Die Geschwindigkeit wächst in Kernnähe, und nach der Relativitätstheorie (Abschnitt 4.3) tritt eine Zunahme der Elektronenmasse  $m_E$  auf. Durch die relativistischen Effekte ändert sich die Energie der Ellipsenbahn und es findet eine Aufspaltung in  $n$  Energiewerte statt. Dies wird in den Spektrallinien sichtbar.

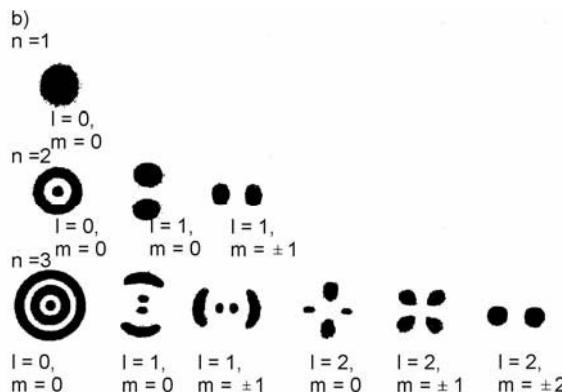
Da sich nach dem Wellenbild auch auf den Ellipsen geschlossene Wellen bilden müssen, ist die Zahl  $l$  der Ellipsen auf insgesamt  $n$  Werte begrenzt:

$$l = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, (n-1) \quad \text{Nebenquantenzahl } l \quad (10.18)$$

oder in historischer Symbolik:  $l = s, p, d, f, \dots$

Man spricht von s-, p-, d- oder f-Elektronen, entsprechend der Bahndrehimpulsquantenzahl  $l$ . In Bild 10-12a sind die Bahnen für die K-, L- und M-Schale dargestellt. In Bild 10-12b die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten oder die Ladungsdichten für die Elektronen skizziert, die sich nach der Quantenmechanik ergeben.

Kreis- und Ellipsenbahnen mit gleichem  $n$  besitzen unterschiedliche Drehimpulse, die durch  $l$  angegeben werden. (Elektronen mit  $l = 0$  besitzen nach der Quantenmechanik keinen Drehimpuls; aus den Bahnkurven ist dies nicht ersichtlich.) Mit einem Bahndrehimpuls ist ein atomares magnetisches Moment verknüpft, d. h. s-Bahnen sind nicht magnetisch, dagegen verhalten sich p- und d-Orbitale wie magnetische Dipole.



**Bild 10-12b**  
Aufenthaltswahrscheinlichkeiten  
der Elektronenbahnen für die  
Hauptquantenzahlen  $n = 1, 2, 3$   
des Wasserstoffatoms

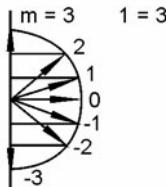
### Magnetquantenzahl $m$

Bei Atomen in äußeren Magnetfeldern beobachtet man eine Aufspaltung der Spektrallinien (*Zeeman-Effekt*). Dies liegt daran, dass die atomaren magnetischen Dipole Positionen im Raum mit unterschiedlichen Richtungen und Energien einnehmen. Das magnetische Moment oder der Bahndrehimpuls, gegeben durch  $l$ , kann sich (als Folge der Quantenmechanik) nur in bestimmte Raumrichtungen einstellen. Dies ist vereinfacht in Bild 10-13 an einem Beispiel für  $l = 3$  dargestellt; die Projektion des Drehimpulses mit  $l$  in Richtung des Magnetfeldes muss ganzzahlig sein, d. h. gleich  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  Für diese Werte wird eine dritte Quantenzahl  $m$  eingeführt. Es gilt:

$$m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l \quad \text{Magnetquantenzahl } m \quad (10.19)$$

Für eine Bahndrehimpulsquantenzahl  $l$  ergeben sich damit  $2l + 1$  verschiedene Möglichkeiten der Orientierung im Raum. Im Magnetfeld ist damit die Aufspaltung einer Spektrallinie gegeben.

Richtung des  
Magnetfeldes



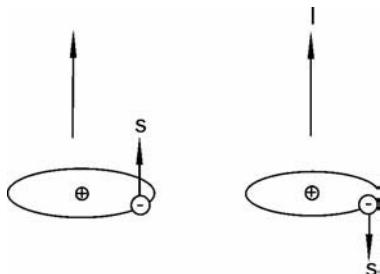
**Bild 10-13**  
Magnetquantenzahlen für  $l = 3$

### Spinquantenzahl s

Elektronen besitzen einen Drehimpuls oder einen *Spin*, den man durch die Eigenrotation des Teilchens verstehen kann. Die Größe des Spin-Drehimpulses eines Elektrons ist halb so groß wie der Bahndrehimpuls mit  $l = 1$ . Daher ordnet man einem Elektron die Spinquantenzahl  $s$  zu:

$$s = \pm 1/2 . \quad \text{Spinquantenzahl } s \quad (10.20)$$

Die Vorzeichen beschreiben nach Bild 10-14, ob Spin- und Bahndrehimpuls parallel oder antiparallel zueinander stehen. Der Spin führt zu einem magnetischen Moment, das Elektron besitzt die Eigenschaften eines winzigen Permanentmagneten (Abschnitt 10.3.3).



**Bild 10.14**  
Zum Elektronenspin und zur Spinquantenzahl  $s$

### Pauli-Prinzip

Ein atomarer Zustand oder eine Bahn ist durch vier Quantenzahlen ( $n, l, m, s$ ) gekennzeichnet. Nach dem *Pauli-Prinzip* kann ein Zustand nur durch ein Elektron besetzt werden; alle Elektronen im Atom besitzen unterschiedliche Quantenzahlen.

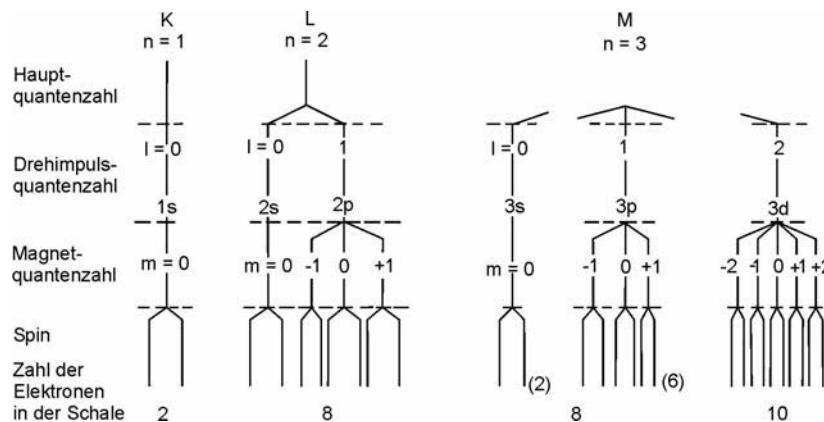
Man kann die Zahl  $N$  der Zustände für die Hauptquantenzahl  $n$  durch Summation berechnen:  $n - 1$  Unterniveaus können jeweils  $2l + 1$  Werte annehmen; wegen der Spinquantenzahl ist mit 2 zu multiplizieren:

$$N = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2 . \quad \text{Elektronenzahl } N \text{ in einer Schale} \quad (10.17)$$

Dies bedeutet, dass in die K-Schale ( $n = 1$ ) 2 Elektronen passen, in die L-Schale ( $n = 2$ ) 8 Elektronen.

### Aufspaltung der Schalen

In Bild 10-15 ist die Aufspaltung der Energieniveaus der K-, L- und M-Schale durch die zusätzlichen Quantenzahlen  $l, m, s$  dargestellt.



**Bild 10-15** Zur Schalenstruktur der Elemente:  
Niveauschemata für die Hauptquantenzahlen  $n = 1, 2, 3$  (K-, L-, M-Schalen)

**Beispiel 10.2.2a** Wie viele Elektronen  $N$  können in der K-, L-, M- und N-Schale aufgenommen werden?  
Nach (10.17) gilt:  $N = 2n^2$  ( $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ). Man erhält  $N = 2, 8, 18$  und  $32$  Elektronen.

**Beispiel 10.2.2b** Wie lauten die Kombinationen der 4 Quantenzahlen in der L-Schale?  
Nach Bild 10-15 erhält man:  $(n, l, m, s)$ :  $(2, 0, 0, \pm 1/2)$ ,  $(2, 1, -1, \pm 1/2)$ ,  $(2, 1, 0, \pm 1/2)$ ,  $(2, 1, +1, \pm 1/2)$ .

### 10.2.3 Deutung des Periodensystems

Bild 10-15 zeigt die Aufspaltung der Schalen in Unterniveaus. Mittels dieser Darstellung und Bild 10-16 kann der Aufbau des Periodensystems (Tabelle 10.1) und die Schalenstruktur der Atome verstanden werden:

- H ( $Z = 1$ )** Der Wasserstoffkern besteht aus einem Proton, das von einem Elektron umkreist wird. Nach den Bildern 10-15 und 10-16 befindet sich das Elektron in einem 1s-Zustand.
- He ( $Z = 2$ )** Der Kern besteht aus zwei Protonen und zwei Neutronen. Die beiden Elektronen der Hülle befinden sich in 1s-Zuständen mit antiparallelen Spins. Diese Konfiguration ist besonders stabil, die K-Schale ist abgeschlossen. Daher ist He ein Edelgas.
- Li ( $Z = 3$ )** Das dritte Hüll-Elektron befindet sich in einem 2s-Niveau. Als das erste Elektron in der L-Schale ist es nur schwach gebunden. Deshalb ist Lithium, wie die anderen Alkalien Na, K, Rb, Cs, chemisch aggressiv.
- Be ( $Z = 4$ )** In Beryllium nimmt die 2s-Unterschale ein zweites Elektron auf.
- B ( $Z = 5$ )** Das fünfte Elektron in Bor hat den Zustand 2p. Die Elektronenverteilung mit 2p hat die Form einer Hantel (Bild 10.12b).
- C ( $Z = 6$ )** Bei Kohlenstoff wird ein weiterer p-Zustand gebildet. Die Achse der hantelförmigen Elektronenverteilung zeigt in y-Richtung ( $2 p_y$ ), die von Bor in x-Richtung ( $2 p_x$ ).
- N ( $Z = 7$ )** Das hinzukommende Elektron in Stickstoff belegt einen  $2 p_z$ -Zustand.
- O ( $Z = 8$ )** Beim Sauerstoff wird ein zweites Elektron im Zustand  $2 p_x$  eingebaut.
- F ( $Z = 9$ )** Nach Auffüllen der  $2 p_y$ -Zustände fehlt im Fluor noch ein Elektron zum Auffüllen der L-Schale. Das fehlende Elektron hat eine hohe Bindungsenergie. Daraus erklärt sich das chemisch aktive Verhalten der Halogene, wie F, Cl, Br, I.
- Ne ( $Z = 10$ )** Die L-Schale wird durch ein zusätzliches  $2 p_z$ -Elektron abgeschlossen. Es handelt sich um eine sehr stabile Konfiguration; Ne ist ein Edelgas.
- Na ( $Z = 11$ )** Das erste 3s-Elektron von Natrium in der M-Schale ist wie bei Li nur schwach gebunden.

<b>Mg (Z = 1Z)</b>	Es wird ein zweites 3s-Elektron gebunden.
<b>Al bis Ar (Z = 13 bis 18)</b>	Die 3p-Konfiguration wird systematisch aufgebaut, ähnlich wie es bei den 2p-Elektronen beschrieben wurde. Argon ist ein Edelgas, da die 3p-Unterschale vollständig gefüllt ist.
<b>Für Z &gt; 18</b>	treten Unregelmäßigkeiten beim Aufbau des Periodensystems auf; es werden teilweise erst höhere Schalen und dann niedrigere aufgefüllt.
<b>K, Ca (Z = 19, 20)</b>	Vor der 3d-Unterschale werden die 4s-Zustände mit zwei Elektronen besetzt.
<b>Sc bis Zn (Z = 21 bis 30)</b>	Nach 4s werden die 10 möglichen 3d-Zustände aufgefüllt. Es treten zusätzliche Unregelmäßigkeiten auf, da bei Cr und Cu ein Loch in der 4s-Unterschale entsteht (Bild 10-16).
<b>Ga bis Kr (Z = 31 bis 36)</b>	Die sechs 4p-Elektronen werden regelmäßig nacheinander eingebaut.

Den weiteren Verlauf des Periodensystems entnimmt man Bild 10-16 und Tabelle 10.1. Abschließend soll auf die 4f-Schale hingewiesen werden, die bei den Lanthanoiden (seltene Erden) aufgefüllt wird. Bei diesen Elementen ist die äußere 6s-Unterschale voll; sie unterscheiden sich nur in der inneren 4f- und teilweise der 5d-Konfiguration. Daher sind die Lanthanoide chemisch ähnlich. Analoges Verhalten zeigen die Actinoide: bei voller 7s-Schale werden die inneren 5f-Zustände besetzt.

<i>Schale</i>	<i>Element</i>																	
K 1s																		
L 2s																		
L 2p																		
M 3s																		
M 3p																		
N 4s																		
M 3d																		
N 4p																		
O 5s																		
N 4d																		
O 5p																		
N 4f																		
O 5d																		
N 4f																		
O 5d																		
P 6p																		
Q 7s																		
P 6d																		
O 5f																		
P 6d																		

**Bild 10-16** Zum Aufbau des Periodensystems: Auffüllung der Elektronenschalen mit steigender Ordnungszahl

## 10.3 Licht, Röntgenstrahlung und Spinresonanz

Im Grundzustand der Atome befinden sich die Elektronen auf den niedrigsten Bahnen, deren Aufbau im letzten Abschnitt dargelegt wurde. Durch Energiezufuhr, z. B. Strahlung oder Stöße mit Elektronen oder Atomen, werden atomare Elektronen in höhere Zustände gehoben. Die Lebensdauer dieser Niveaus ist kurz (ms bis ns) und beim Zerfall emittiert das Atom Strahlung. Je nach Wellenlänge unterscheidet man infrarote Strahlung, Licht, ultraviolette Strahlung und Röntgenstrahlung.

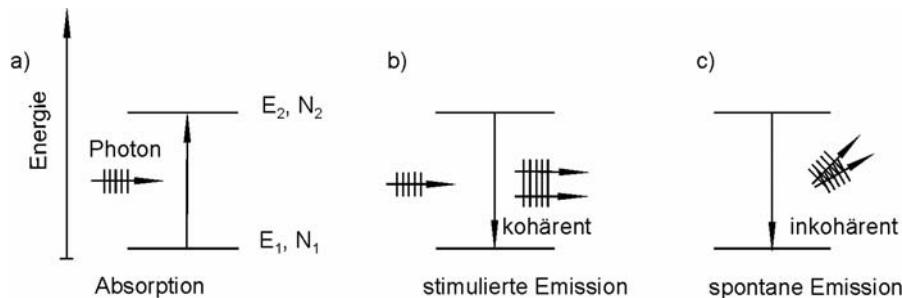


Bild 10-17 Absorption, stimulierte und spontane Emission von Licht

### 10.3.1 Emission und Absorption von Licht

Strahlung im sichtbaren und den benachbarten infraroten und ultravioletten Gebieten wird überwiegend von den äußeren atomaren Elektronen ausgesendet. Wenn im Folgenden von Licht gesprochen wird, so sind damit die erwähnten Bereiche mit eingeschlossen. Röntgenstrahlung entsteht bei Übergängen in inneren Elektronenschalen.

#### Absorption von Licht

Bei Bestrahlung von Atomen mit Licht kann Absorption stattfinden. Voraussetzung dafür ist, dass die Energie der Lichtquanten  $hf$  gleich der Energiedifferenz zwischen einem unteren besetzten (1) und oberen unbesetzten (2) Niveau ist (Bild 10-17a):

$$hf = E_2 - E_1 . \quad (10.18)$$

In freien Atomen sind die Energieniveaus schmal und es wird nur ein kleiner Wellenlängenbereich absorbiert. Anders ist es in Festkörpern, bei denen breite Energiebänder auftreten (Kapitel 11). Die Intensität oder Leistungsdichte  $I$  (in  $\text{W/m}^2$ ) verringert sich durch Absorption längs des Weges  $dx$  um  $dL$ :

$$\left( \frac{dI}{dx} \right)_A = -\sigma_{12} N_1 I . \quad \text{Absorption} \quad (10.19a)$$

Dabei bedeutet  $N_1$  die Dichte der absorbierenden Atome (in  $\text{Atome/m}^3$ ) und  $\sigma_{12}$  nennt man *Wirkungsquerschnitt für Absorption*. Er gibt die effektive Querschnittsfläche in  $\text{m}^2$  an, mit der ein Atom absorbiert. Man kann (10.19a) integrieren und erhält eine  $e$ -Funktion, welche die Intensität in die Tiefe eines absorbierenden Mediums beschreibt:

$$I_A = I_0 e^{-\sigma_{12} N_1 x} = I_0 e^{-\alpha x} .$$

Absorptionsgesetz **(10.19b)**

Der Index  $A$  in (10.19a) und 10.19b) gibt an, dass es sich um den Vorgang der Absorption handelt. Die Größe  $\alpha = \sigma_{12}N_1$  ist der *Absorptionskoeffizient* und  $I_0$  ist die eingestrahlte Intensität vor der Absorption.

### Stimulierte Emission

Der Umkehrprozess zur Absorption ist die *stimulierte oder induzierte Emission* von Strahlung. Bei der Absorption wird durch einfallende Strahlung mit der Resonanzfrequenz  $f_{12}$  ein Elektron von einem niedrigen (1) auf ein höheres Energieniveau (2) gehoben. Bei der stimulierten Emission wird ein Elektron durch resonante Strahlung von einem höheren Niveau (2) auf das tiefere (1) gezwungen (Bild 10-17b). Die frei werdende Energie wird in Form eines Lichtquants abgestrahlt. Das entstehende Licht hat die gleiche Frequenz und Phase wie das einfallende und auch die gleiche Richtung. Es handelt sich also um eine Verstärkung von Licht durch einen *kohärenten* Prozess, der die Grundlage des Lasers bildet.

Die Berechnung der Lichtverstärkung verläuft wie bei der Absorption. Jedoch müssen folgende Unterschiede beachtet werden: die Indizes 1 und 2 sind zu vertauschen, und  $dI/dx$  ist wegen der Verstärkung positiv. Damit wird die Verstärkung durch stimuliertes Emission gegeben durch:

$$I_S = I_0 e^{\sigma_{21} N_2 x}. \quad \text{Stimulierte Emission} \quad (10.19c)$$

Der Index  $S$  in (10.19c) gibt an, dass es sich um den Vorgang der stimulierten Emission handelt. Zu berücksichtigen ist, dass die Wirkungsquerschnitte für Absorption und stimuliertes Emission in einfachen Fällen gleich sind:  $\sigma = \sigma_{12} = \sigma_{21}$ .

### Lichtverstärkung

In einem optischen Medium finden einerseits eine *Schwächung durch Absorption* und andererseits eine *Verstärkung durch stimuliertes Emission* statt. Fragt man, ob eine Lichtwelle verstärkt oder geschwächt wird, ist die Summe beider Prozesse zu betrachten:

$$dI = dI_A + dI_S \quad \text{Man erhält zusammen für beide Prozesse:}$$

$$I = I_0 e^{(N_2 - N_1)\sigma x} \quad \text{Laserverstärker} \quad (10.20)$$

Das Vorzeichen im Exponenten bestimmt, ob eine Schwächung oder Verstärkung vorliegt. In normalen Medien und Lichtquellen ist das untere Niveau wesentlich stärker besetzt:  $N_1 > N_2$ . Das Vorzeichen ist negativ und die Absorption überwiegt. In einem Lasermedium muss jedoch das obere Niveau stärker besetzt werden, d. h.  $N_2 > N_1$ . Dies wird durch einen Prozess erreicht, den man *Pumpen* nennt. Das Vorzeichen des Exponenten in (10.20) wird in diesem Fall positiv und es tritt eine Lichtverstärkung auf.

*Voraussetzung für eine Verstärkung und eine Lasertätigkeit ist somit eine Inversion (Umkehrung) in der Besetzung der Zustände.*

### Spontane Emission

Die *stimulierte Emission*, die theoretisch analog zur Absorption ist, hat nur in der Laserphysik Bedeutung. Bei den anderen üblichen Prozessen im Zusammenhang mit Licht überwiegt die *spontane Emission* (Bild 10-17c). Während bei der stimulierten Emission durch eine einfallende Welle Elektronen zu einem Übergang in einen tieferen Zustand gezwungen werden, zerfällt bei der spontanen Emission der angeregte Zustand ohne äußeren Einfluss innerhalb der *Le-*

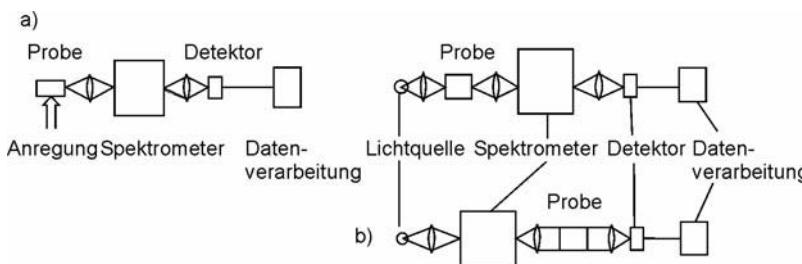
bensdauer  $\tau$ . Es handelt sich um einen statistischen Zerfall mit jeweils (leicht) unterschiedlicher Frequenz in verschiedene Raumrichtungen. Bei üblichen Lichtquellen entsteht Licht durch spontane Emission. Beim Laser tritt stimulierte Emission auf, die spontane hingegen ist ein Störeffekt.

## Lichtquellen

Glühfadenlampen beruhen auf der thermischen Emission von Strahlung, die unter dem Stichwort Wärmestrahlung in Abschnitt 5.5.3 behandelt werden. In einer Gasentladung dagegen werden hauptsächlich durch Elektronenstoß Atome in angeregte Zustände gehoben. Beim Zerfall dieser Zustände durch spontane Emission entsteht Licht. Durch Leuchtstoffe kann bei manchen Lampen zusätzlich eine Umwandlung von ultravioletter Strahlung in sichtbares Licht erfolgen. Die Typen und Anwendungen von Lichtquellen sind vielfältig (Abschnitt 8.4.5).

## Laser

Beim Laser ist die spontane Strahlung ein Störeffekt; es überwiegt die gesteuerte Emission. Dies wird durch eine selektive Energiezufuhr erreicht, bei der eine *Inversion* erzeugt wird. Dabei muss die Besetzungszahl  $N_2$  in einem oberen Niveau größer sein als  $N_1$  in einem niedrigen. Nach (10.20) kann damit eine kohärente Lichtverstärkung erfolgen. Der technische Aufbau von Lasern wird in der Quantenoptik (Abschnitt 9.3) beschrieben.



**Bild 10-18** Untersuchungen von Spektren:  
a) Emissions-Spektroskopie b) Absorptions-Spektroskopie

## Spektroskopie

Die große historische Leistung der Spektroskopie, der Technik zur Wellenlängenanalyse von Licht, war die Aufklärung des atomaren Aufbaus. Heutzutage erfüllt die Spektroskopie überwiegend folgende Aufgaben: Untersuchung von Festkörpern und Molekülen, Messungen in der analytischen Chemie, Biologie und im Umweltschutz u. a. Im Folgenden sind die wichtigsten spektroskopischen Verfahren zusammengefasst (Bild 10-18):

**Emissionsspektroskopie:** Atome oder Moleküle werden durch Energiezufuhr angeregt. Dieses kann durch Einstrahlung von Licht, durch eine Gasentladung oder eine Flamme erreicht werden. Die angeregten Atome emittieren charakteristische Spektrallinien, welche Informationen über die Atome und Moleküle enthalten. Die Messung der Strahlung erfolgt mittels Spektralapparaten (siehe Bild 9-34). Die Auswertung der Messkurven erlaubt eine quantitative Analyse der atomaren oder chemischen Zusammensetzung des gasförmigen Materials. Auch Festkörper werden nach dieser Methode untersucht.

**Absorptionsspektroskopie:** Bei diesem Verfahren wird die untersuchte Probe mit Licht durchstrahlt. Es kann sich um weißes Licht oder um einen Liniенstrahler handeln, z. B. einen abstimmbaren Laser. Stimmt die Energie der eingestrahlten Lichtquanten mit dem Abstand zweier Niveaus überein (10.18), findet eine Schwächung des Lichtstrahls statt, die optoelektronisch nachgewiesen wird.

**Beispiel 10.3.1a** Wie groß ist die Wellenlänge bei einem atomaren Übergang mit der Energiedifferenz von 0,6 eV (1 eV =  $1,6 \cdot 10^{-19}$  J)?

Aus  $E = hf = hc_0 / \lambda$  folgt:  $\lambda = hc_0 / E = 2,06 \mu\text{m}$  (infrarote Strahlung).

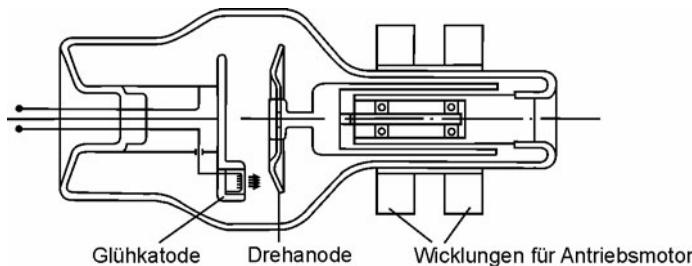
**Beispiel 10.3.1b** Licht wird in einer Materialdicke von  $x = 3$  cm um 50 % geschwächt. Wie groß ist der Absorptionskoeffizient? Kann man daraus den Wirkungsquerschnitt berechnen?

Es gilt (10.19b):  $I / I_0 = \exp(-\alpha x)$ . Daraus folgt:  $\alpha x = -\ln I / I_0$  und  $\alpha = -\ln 0,5 / 3 \text{ cm}^{-1} = 0,23 \text{ cm}^{-1}$ . Der Wirkungsquerschnitt berechnet sich aus:  $\sigma = \alpha / N$ . Durch Berechnung der Zahl der Atome pro  $\text{m}^3$  kann der Wirkungsquerschnitt berechnet werden.

**Beispiel 10.3.1c** Was ist eine Voraussetzung für Lichtverstärkung in einem Medium und damit für Lasertätigkeit?  
Nach (10.20) muss die Atomdichte im oberen Zustand größer sein als im unteren (Inversion).

### 10.3.2 Röntgenstrahlung

In einer Röntgenröhre wird ein Elektronenstrahl auf Materie geschickt. Die beschleunigten Elektronen werden im Festkörper abgebremst oder schlagen Hüll-Elektronen aus den Atomen heraus, insbesondere aus den inneren Schalen. Man unterscheidet daher zwei Typen von Röntgenstrahlung: Die *Röntgenbremsstrahlung* übernimmt die kinetische Energie der Elektronen beim Abbremsen. Die *charakteristische Strahlung* entsteht beim Auffüllen der Lücken der inneren Schalen. Röntgenstrahlung kann auch mit anderen Geräten erzeugt werden: dem Elektronensynchrotron und in Zukunft mit dem Röntgenlaser. Daneben ist eine Erzeugung durch den Photoeffekt möglich (Röntgenfluoreszenz).



**Bild 10-19** Röntgenröhre für medizinische Anwendungen

### Bremsstrahlung

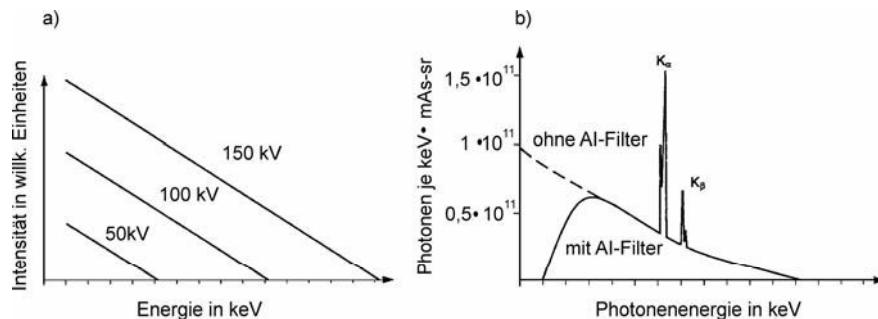
Bild 10-19 zeigt den Aufbau einer Röntgenröhre. Aus einer Glüh-Kathode werden Elektronen frei, die im Vakuum auf eine Anode geschossen werden. Die Spannung  $U$  zur Beschleunigung liegt zwischen 10 kV und 250 kV. Die Elektronen werden im Festkörper abgebremst und die dabei frei werdende Energie wird teilweise als elektromagnetische Strahlung (Röntgenstrahlung) ausgesendet.

Das Energiespektrum in Bild 10-20a zeigt eine Maximalenergie  $E_G (= hf)$ , die von der Spannung  $U$  abhängt. Dem entspricht eine minimale Grenzwellenlänge  $\lambda_G (= c_0 / f)$  der Röntgenstrahlung:

$$E_G = eU \quad \text{oder} \quad \lambda_G = \frac{c_0}{f} = \frac{hc_0}{eU}. \quad \text{Bremsstrahlung} \quad (10.21)$$

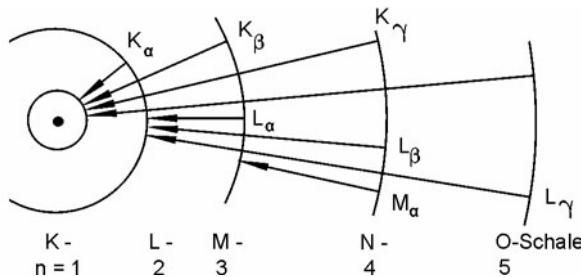
In der Gleichung wurde angenommen, dass die gesamte kinetische Energie  $eU$  eines Elektrons in einem Quant abgestrahlt wird. Für  $U = 60 \text{ kV}$  erhält man als maximale Energie  $E_G = 60 \text{ keV}$  ( $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ) und eine minimale Wellenlänge  $\lambda_G = 2,1 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ . Bild 10-20 zeigt das Energiespektrum einer medizinischen Röntgenröhre. Die kontinuierliche Bremsstrahlung wird von charakteristischen Röntgenlinien überlagert.

Der Wirkungsgrad einer Röntgenröhre liegt bei 1 %; dieser Anteil der zugeführten elektrischen Energie wird als Röntgenstrahlung abgegeben. Der Rest wird in der Anode in Wärme umgewandelt. Zur Verringerung der thermischen Belastung wird diese durch Wasser gekühlt oder es wird eine Drehanode eingesetzt (Bild 10-19).



**Bild 10-20** Spektren der Röntgenstrahlung:

- a) Bremsstrahlung bei verschiedenen Beschleunigungsspannungen.
- b) Dem Bremspektrum sind die charakteristischen Linien überlagert.  
Beispiel: medizinische Röntgenröhre mit Wolfram-Anode bei 120 kV.  
Der niederenergetische Anteil des Spektrums wurde durch 2 mm Al weggefiltert.



**Bild 10-21**  
Entstehung der charakteristischen Röntgenstrahlung

### Charakteristische Röntgenstrahlung

Die in die Anode eindringenden Elektronen stoßen mit den atomaren Elektronen und befreien diese aus den inneren Schalen. Dadurch können Elektronen der äußeren Schalen nachrücken. Bei diesen Übergängen entsteht „Licht hoher Energie“, d. h. Röntgenstrahlung mit bestimmten diskreten Wellenlängen. Die Aussendung der charakteristischen Strahlung bei einem Loch in der K-Schale zeigt Bild 10-21. Es kann  $K_{\alpha}$ -,  $K_{\beta}$ - oder  $K_{\gamma}$ -Strahlung entstehen, je nachdem ob

der Übergang aus der L-, M,- oder N-Schale erfolgt. Bei einem Loch in der L-Schale wird dementsprechend L <sub>$\alpha$</sub> - , L <sub>$\beta$</sub> - oder L <sub>$\gamma$</sub> -Strahlung erzeugt. Nach Bild 10-20b ist das kontinuierliche Bremspektrum von einem Linienspektrum überlagert. In einer Röntgenröhre zur Durchstrahlung, insbesondere in der Medizin, wird überwiegend die Bremsstrahlung ausgenutzt. Für Weichgewebe benötigt man Spannungen von mehreren 10 kV, während für Knochen 100 kV und mehr erforderlich sind. Zur Strukturanalyse durch Röntgenbeugung werden dagegen oft die charakteristischen Linien verwendet.

Die K-Linien, die bei einem Loch in der innersten Schale entstehen, können relativ einfach aus (10.16b) berechnet werden. Da die Kernladung durch das eine noch vorhandene K-Elektron verringert wird, erhält man die Frequenzen der K-Linien ( $n_1 = 1$ ) (Mosley'sches Gesetz):

$$f = (Z - 1)^2 R \left(1 - \frac{1}{n_2^2}\right) \text{ mit } R = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ Hz} . \quad \text{Charakteristische Strahlung} \quad (10.16c)$$

Für Wolfram ( $Z = 74$ ) resultiert als Wellenlänge für die K <sub>$\alpha$</sub> -Strahlung ( $n_2 = 2$ )  $\lambda = c_0 / f = 2,3 \cdot 10^{-11}$  m, für Kupfer ( $Z = 29$ )  $\lambda = 1,5 \cdot 10^{-10}$  m; die entsprechenden Energien betragen 52 keV und 7 keV.

### Absorption von Röntgenstrahlen

Die Röntgentechnik beruht auf der materialabhängigen Absorption und Streuung der Strahlung. Die Schwächung der Strahlintensität  $I$  in Materie hängt von der Schichtdichte  $x$  ab:

$$I = I_0 e^{-\mu x} . \quad \text{Absorptionsgesetz} \quad (10.22)$$

Der *Schwächungskoeffizient  $\mu$*  charakterisiert die Streuung und Absorption; er steigt stark mit zunehmender Ladungszahl  $Z$  der absorbierenden Elemente an. In der Medizin wird ein Körperteil mit einer möglichst punktförmigen Röntgenquelle bestrahlt. Hinter dem Körperteil wird ein Röntgenfilm oder ein Röntgenbildverstärker aufgestellt. Die Transmission der Strahlung hängt von der Zusammensetzung des Gewebes ab. Das Bild entsteht wie ein „Schattenwurf“ bei einer Punktquelle.

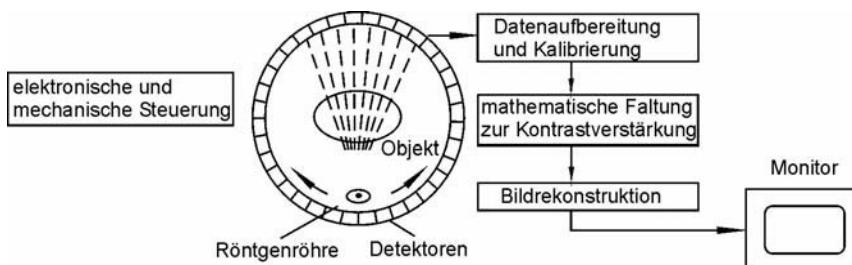
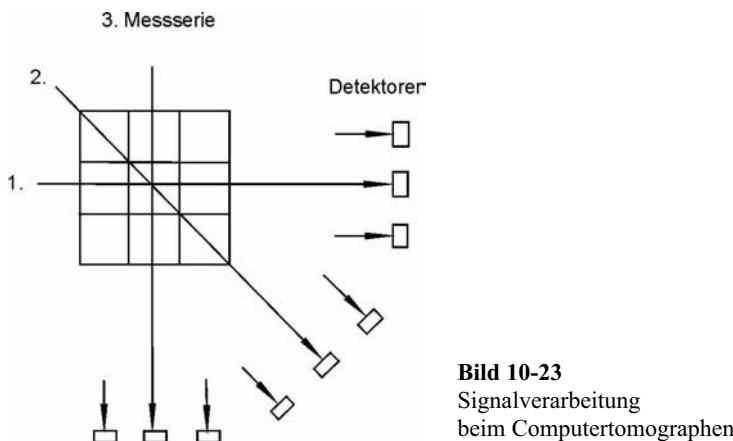


Bild 10-22 Prinzipieller Aufbau eines Computertomographen in der Röntgentechnik

### Computertomographie

Verfahren der Bildverarbeitung mit Computern haben die Röntgentechnik präziser gemacht. In Computertomographen (Bild 10-22) wird die Röntgenröhre um das Objekt gedreht. Die Strahlung wird in einer Matrix mit einigen 1000 Detektoren nachgewiesen. Dabei werden Bilder vom Objekt bei verschiedenen Strahlrichtungen gespeichert. Ein Computer errechnet durch

spezielle mathematische Verfahren die dreidimensionale Bildstruktur. Das Prinzip verdeutlicht Bild 10-23 für ein Objekt mit neun Teilbereichen (Pixeln). Durchstrahlt man es aus den drei gekennzeichneten Richtungen, so entstehen neun Bildsignale. Die Information reicht aus, um ein Bild des Objekts unter verschiedenen Blickrichtungen zu konstruieren.



### Röntgenbeugung

Die Beugung von Röntgenstrahlung hat erheblich zur Aufklärung des Aufbaus von Festkörpern und Molekülen beigetragen. Beispielsweise wurde die Helixstruktur von DNS, der Erbsubstanz, dadurch entschlüsselt. Bei der Röntgenbeugung an Kristallen tritt die *Bragg-Reflexion* an den Kristallebenen auf. Durch die regelmäßig angeordneten Atome können nach Bild 10-24a mehrere jeweils parallele Ebenen gelegt werden. Es tritt Reflexion unter dem Winkel  $\theta$  auf, bei dem der Weglängenunterschied an zwei Ebenen eine oder mehrere Wellenlängen  $\lambda$  beträgt. Nach Bild 10-24b erhält man die *Bragg-Bedingung* für einen Gitterabstand  $d$ :

$$2d \sin \theta = m\lambda \quad \text{mit } m = 1, 2, 3, ,4, \dots \quad \text{Bragg-Bedingung} \quad (10.23)$$

Die Röntgenbeugung kann analog zur Elektronen- oder Neutronenbeugung durchgeführt werden (Bild 10-7). Beim *Laue-Verfahren* fällt breitbandige Röntgenstrahlung, auf einen unbeweglichen Einkristall. Es entstehen für jeden Gitterabstand  $d$  mehrere Reflexe bei unterschiedlichen Wellenlängen. Aus dem Beugungsbild gelingt eine Bestimmung der Lage der Atome im Kristallgitter.

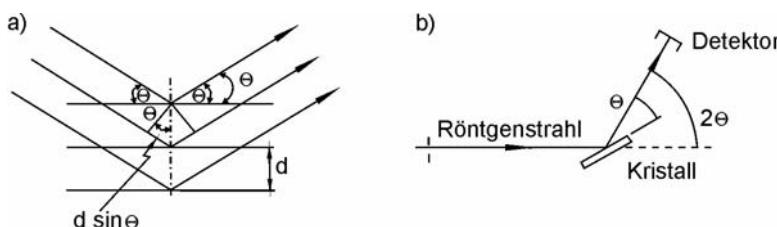


Bild 10.24 Prinzipien der Röntgenbeugung:

- a) Bedingung bei Bragg-Reflexion
- b) Schema eines Röntgen-Spekrometers zur Untersuchung von Kristallstrukturen

Bei der *Drehkristall-Methode* wird ein monochromatischer Strahl, meist aus der K-Linie bestehend, auf einen Einkristall geschickt (Bild 10-24b). Dieser wird so lange gedreht, bis die Bragg-Bedingung für die feste Wellenlänge  $\lambda$  erfüllt ist.

Einfacher ist die *Pulvermethode* nach Debye-Scherrer mit polykristallinen Pulverproben und monochromatischen Röntgenstrahlen. Polykristallin bedeutet, dass kleine Kristallbereiche statistisch in alle Richtungen orientiert sind. Damit finden sich für jeden Gitterabstand  $d$  Kristalle unter dem Winkel  $\theta$ , die der Bragg-Bedingung (10.23) genügen. Da die Probe rotations-symmetrisch ist, liegen die Bragg-Reflexe auf Kreisen. Mit abnehmendem Gitterabstand vergrößert sich der Beugungswinkel  $\theta$ .

### Röntgenfluoreszenz

Röntgenstrahlung wird in Materie hauptsächlich durch den Photoeffekt absorbiert. Wegen der hohen Quantenenergie werden Elektronen aus den inneren K- oder L-Schalen gelöst. In die Leerstellen rücken Elektronen der äußeren Schalen nach, ähnlich wie es im Bild 10.21 beschrieben ist. Die sekundäre Röntgenstrahlung gibt Informationen über die Elemente der bestrahlten Probe. Dabei ergeben sich Anwendungen der *Röntgenfluoreszenz* in der Analysentechnik.

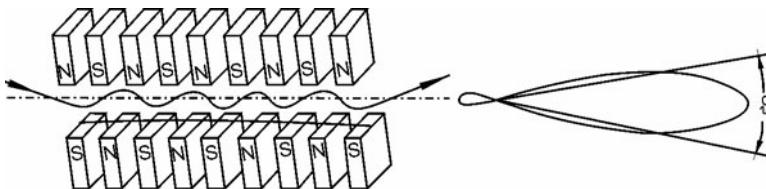


Bild 10-25 Erzeugung von Synchrotron-Strahlung mit einem Wigglerturm

### Synchrotronstrahlung

Beschleunigte Elektronen senden Strahlung aus; ein Beispiel dafür ist die *Röntgenbremsstrahlung*, ein anderes die *Synchrotronstrahlung* von Elektronen auf einer Kreisbahn (Bild 8-23). Bei Kreisbeschleunigungen zur Erzeugung von Synchrotronstrahlung werden Elektronen durch Wigglertürme geschickt, die den Elektronenstrahl radial oszillieren lassen (Bild 10-25). Durch diese Schwingungen strahlt das Elektron wie ein Dipol. Da die Geschwindigkeit der Elektronen nahe an der Lichtgeschwindigkeit  $c_0$  liegt, entsteht eine Abstrahlung vorwärts in Form eines schmalen Kegels. Der Öffnungswinkel  $\delta$  ist durch die Ruheenergie  $m_E c_0^2$  ( $= 0,511 \text{ MeV}$ ) und die Energie  $E$  der Elektronen der Masse  $m_E$  gegeben:

$$\delta = \frac{m_E c_0^2}{E} \quad \text{Synchrotronstrahlung, Divergenz } \delta \quad (10.24a)$$

Die Wellenlänge  $\lambda$  der Synchrotronstrahlung hängt von Wigglertypus  $L$  ab, welche die Schwingungen verursacht:

$$\lambda \approx \frac{L \delta^2}{2} \quad \text{Synchrotronstrahlung, Wellenlänge } \lambda \quad (10.24b)$$

Mit Energien von  $E = 500 \text{ MeV}$  und  $L = 1 \text{ cm}$  erhält man  $\lambda = 5 \text{ nm}$ . Der Vorteil der Synchrotronstrahlung liegt darin, dass sie monochromatisch und relativ gut gebündelt ist. Die

Strahlung überstreicht den Bereich vom kurzwelligen UV bis in den niederenergetischen Röntgenbereich. Die Anwendungen liegen beispielsweise in der Röntgenlithographie zur Erzeugung integrierter Schaltkreise.

**Beispiel 10.3.2a** Eine Röntgenröhre wird mit einer Spannung von  $U = 100 \text{ kV}$  betrieben. Wie groß sind die maximale Energie  $E_G$  der Röntgenquanten und deren Wellenlänge  $\lambda_G$ ?

Es gilt (10.21):  $E_G = 100 \text{ keV} = 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ J}$  und  $\lambda_G = hc_0 / \lambda = 1,2 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ .

**Beispiel 10.3.2b** In der Mammographie wird überwiegend die  $K_{\alpha}$ -Strahlung von Molybdän eingesetzt.

Wie groß ist die Energie der Quanten und die Mindestspannung der Röntgenröhre?

Nach (10.16c) gilt für Mo ( $Z = 42$  und  $n_2 = 2$ ):  $f = 41^2 \cdot 3,29 \cdot 10^{15} (1 - 1/2^2) \text{ Hz} = 4,15 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$  und  $E = hf = 2,74 \cdot 10^{-15} \text{ J} = 17,1 \text{ keV}$ . Für die Anregung muss ein Elektron aus der K-Schale befreit werden.

In (10.16c) ist  $n_2 = \infty$  zu setzen:  $f = 41^2 \cdot 3,29 \cdot 10^{15} (1 - 1/\infty) \text{ Hz} = 5,5 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$  und  $E = 23 \text{ keV}$ .

Die Mindestspannung beträgt also 23 kV.

**Beispiel 10.3.2c** Die Strahlung einer medizinischen Röntgenröhre wird durch ein Bleiblech von  $d = 0,14 \text{ mm}$  auf die Hälfte geschwächt (Halbwertsdicke). a) Wie groß ist der Schwächungskoeffizient. b) Wie viele Halbwertsdicken sind notwendig, um die Strahlung auf 1 % zu schwächen?

a) Aus (10.22) folgt:  $0,5 = \exp(-\mu x)$ . Damit erhält man:  $\mu x = -\ln 0,5$  und  $\mu = 4,95 \text{ mm}^{-1}$ .

b)  $0,01 = \exp(-\mu x)$ . Damit erhält man:  $\mu x = -\ln 0,01$  und  $x = 0,93 \text{ mm}$ .

Es werden  $0,93/0,14 = 6,6$  Halbwertsdicken benötigt.

**Beispiel 10.3.2d** Bei einem Kristall tritt für 50 keV-Röntgenstrahlung Bragg-Reflexion bei  $\theta = 25^\circ$  auf.

Wie groß ist der Gitterabstand?

Es gilt (10.23) für die erste Beugungsordnung:  $2d \sin \theta = \lambda$ . Die Wellenlänge berechnet man

aus  $\lambda = hc_0 / E = 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$  ( $E = 50 \text{ keV} = 8 \cdot 10^{15} \text{ J}$ ) und man erhält:  $d = \lambda / 2 \sin \theta = 3,0 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ .

### 10.3.3 Spinresonanz

Die Elektronen und der Atomkern besitzen ein magnetisches Moment. Sie weisen die Eigenschaften eines winzigen Permanentmagneten auf. Man erklärt die Entstehung des Feldes durch die Eigenrotation oder den Spin der geladenen Teilchen, die zu einem Kreisstrom führt. Bei Elektronen werden die magnetischen Eigenschaften durch die Spinquantenzahl  $s = \pm 1/2$  beschrieben (Abschnitt 10.2.2).

Nach der Quantenmechanik kann sich der Spin gegenüber einem äußeren Magnetfeld parallel oder antiparallel einstellen. Beide Stellungen unterscheiden sich in der Energie und es ist möglich, durch Absorption von Strahlung den Spin umzuklappen. Bei den Elektronen nennt man diesen Vorgang *Elektronenspinresonanz*.

#### Kernspinresonanz

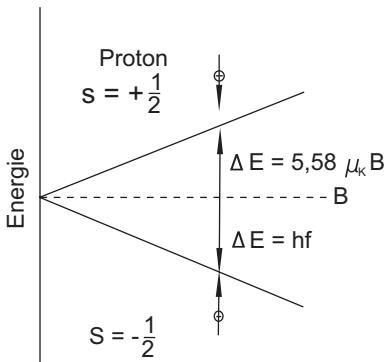
Größere Bedeutung in der medizinischen Diagnosetechnik hat die Kernspinresonanz. Besonders wichtig sind die Wasserstoffkerne im biologischen Material, die aus einem Proton bestehen. Das Proton besitzt ebenfalls eine Spinquantenzahl von  $s = \pm 1/2$  und es kann genau wie das Elektron parallel oder antiparallel zu einem Magnetfeld stehen. Die antiparallele Stellung hat eine etwas höhere Energie. Normalerweise befinden sich die Protonen hauptsächlich im niedrigen Zustand. In Bild 10-26 ist die Energie in Abhängigkeit von der magnetischen Induktion  $B$  aufgetragen. Der Energieabstand  $\Delta E$  (in Joule = J) beträgt für Protonen etwa:

$$\Delta E = 5,58 \mu_K B \quad \text{mit} \quad \mu_K = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ J/T} \quad \text{Kernspinresonanz} \quad (10.25)$$

Durch Strahlung im Hochfrequenzbereich kann ein Übergang vom unteren zum oberen Niveau erfolgen. Die Frequenz berechnet sich nach der Gleichung  $\Delta E = hf$  zu etwa 60 MHz bis 300 MHz, je nach Größe des Magnetfeldes  $B$  (in Tesla = T).

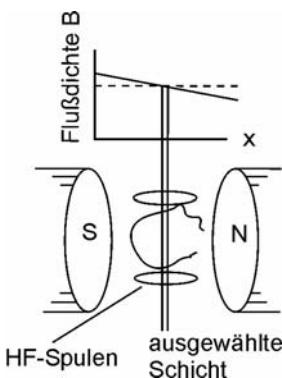
Nach klassischen Vorstellungen findet das Umklappen des Spins in einer schraubenförmigen Drehbewegung statt, wobei sich die Spitze des magnetischen Moments (Spin) auf einer Kugeloberfläche bewegt. In der medizinischen Diagnostik wird wie folgt vorgegangen: Man strahlt bei Anlegen eines Magnetfelds kurzzeitig hochfrequente Strahlung in das untersuchte Gewebe ein, bis sich die Spins um  $90^\circ$  gedreht haben. Danach wird die Strahlung abgeschaltet. Die Spins drehen sich in ihre Ausgangslage zurück und emittieren dabei die absorbierte Energie. Dabei können zwei Effekte gemessen werden:

- (1) Beim Zurückdrehen steigt die Magnetisierung der Probe innerhalb der Zeit  $T_1$ .
- (2) Dadurch dass sich die einzelnen Spins nicht völlig gleichmäßig zurückdrehen, wird das abgestrahlte Signal nur innerhalb einer Zeit  $T_2$  ausgesendet. Diese beiden Zeiten hängen von der Umgebung ab, in der sich das Proton befindet. Das bedeutet, dass Fett oder Krebsgewebe sich durch spezielle Werte für  $T_1$  und  $T_2$  auszeichnen. Die Messung beider so genannter Relaxationszeiten wird zur Bildgebung ausgenutzt.



**Bild 10-26**

Prinzip der Spinresonanz.  
Durch Absorption von Hochfrequenzstrahlung kann der Spin umgeklappt werden.



**Bild 10-27**

Aufbau eines Kernspintomographen.  
Der Feldgradient (durch eine nicht gezeichnete Spule) in x-Richtung bewirkt eine Anregung nur in einer Ebene.  
Weitere Feldgradienten zur Identifizierung eines Bildpunktes in dieser Ebene sind nicht angegeben. Die HF-Spulen dienen zur Abstrahlung und zum Empfang der Signale

### Bildgebung

Es bleibt die Frage zu klären, wie bei der Kernspintomographie die Signale von einzelnen Punkten des Gewebes getrennt werden. Dazu wird im ersten Schritt das Magnetfeld örtlich verändert, indem man einen Feldgradienten in S-N-Richtung anlegt (Bild 10-27). Damit findet die Spinresonanz nur in einer dünnen Schicht statt, in der Frequenz  $f$  und Magnetfeld  $B$  die richtigen Werte aufweisen. Die Identifizierung eines Punktes in der Schicht ist etwas kompli-

zirter. Dies geschieht durch weitere Feldgradienten senkrecht zur S-N-Richtung des Magnetfeldes, die während der Aussendung der Messsignale angelegt werden. Mit Hilfe der Kernspinomographie können präzise Bilder des Körperinneren gewonnen werden, deren Informationsgehalt sich von den Röntgenbildern unterscheidet. Ein wichtiger Vorteil liegt darin, dass die Belastung durch ionisierende Strahlung bei der Untersuchung entfällt.

**Beispiel 10.3.3** Wie groß ist die Frequenz  $f$  bei der Kernspinresonanz in Wasserstoff (Protonen) bei  $B = 1$  Tesla? Vergleichen Sie den Energieabstand mit der thermischen Energie.

Aus (10.25) folgt:  $\Delta E = 2,8 \cdot 10^{-27}$  J und  $f = \Delta E / h = 42$  MHz.

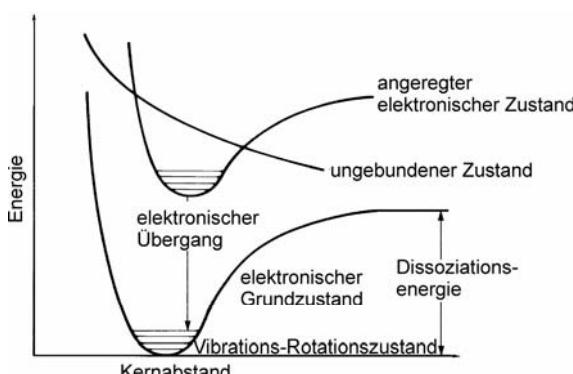
Die thermische Energie  $\Delta E_t = 1,5 \cdot kT = 6,2 \cdot 10^{-21}$  ( $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K,  $T = 300$  K) ist etwa 20.000 mal größer als  $\Delta E$ . (Daher sind hohe Magnetfelder günstig, da die Zustände mit unterschiedlichen Spinstellungen etwas unterschiedlicher besetzt werden.)

### 10.3.4 Moleküle

Man unterscheidet bei Molekülen hauptsächlich zwei Bindungstypen: (1) Bei der *konvalenten Bindung* besitzen die Atome ein oder mehrere Elektronenpaare gemeinsam. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen ist zwischen den Atomen besonders groß. Dadurch wird eine anziehende Kraft auf die Kerne verursacht. Ein Beispiel ist das H-Molekül, dessen Elektronenpaar beide Protonen gemeinsam umschlingt. (2) Bei der *Ionenbindung* gehen ein oder mehrere Elektronen von einem Atom auf das andere. Die entstehenden positiven und negativen Ionen ziehen sich an. Dies ist beispielsweise bei NaCl der Fall, das aus  $\text{Na}^+$  und  $\text{Cl}^-$  besteht.

#### Potentialkurve

Moleküle werden durch eine Potentialkurve beschrieben, die am Beispiel zweiatomiger Systeme erklärt wird. Verringert man den Abstand  $r$  zwischen zwei Atomen (oder Ionen), so tritt eine Kraftwirkung auf. Sie kann abstoßend oder anziehend sein und damit zu einer Erhöhung oder Absenkung der Energie führen, die durch den Begriff *Potential* gekennzeichnet ist. Ursache sind die Coulomb-Kräfte zwischen Kern und Hülle. Zeigt die Potentialkurve ein Minimum, so findet eine chemische Bindung statt (Bild 10-28). Der steile Anstieg bei weiterer Annäherung wird durch die Abstoßungskräfte der Kernladungen erklärt. Derartige Potentialkurven existieren für Moleküle im Grundzustand und in elektronisch angeregten Zuständen. Das Minimum liegt dabei meist bei verschiedenen Kernabständen  $r$ . Potentiale angeregter Zustände müssen nicht immer ein Minimum aufweisen; eine Anregung in einen nicht bindenden Zustand führt zur Dissoziation des Moleküls (Bild 10-28).



**Bild 10-28**

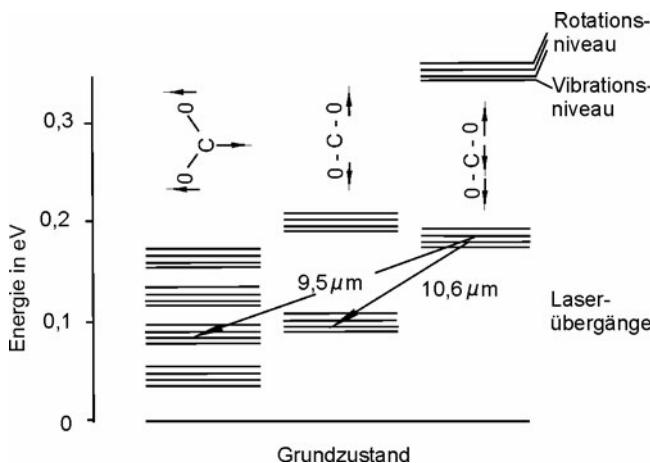
Potentialkurven von Molekülen:  
bindener Grund- und angeregter  
Zustand, nicht bindener angeregter  
Zustand

## Molekülschwingungen

Moleküle können im Minimum der Potentialkurve schwingen, d. h. die Atomkerne bewegen sich periodisch. Durch die Schwingungsenergie werden die Moleküle etwas aus der Potentialmulde herausgehoben, wie es durch die waagerechten Striche in Bild 10-28 angedeutet ist. Die Quantenmechanik zeigt, dass die Schwingungsenergie gequantelt ist und die Schwingungsniveaus gleiche Abstände haben. In Bild 10-29 ist das Vibrationsspektrum des CO<sub>2</sub>-Moleküls mit drei unterschiedlichen Schwingungstypen dargestellt; es hat Bedeutung beim CO<sub>2</sub>-Laser (Abschnitt 9.3) und beim Treibhauseffekt der Erde.

## Molekülrotationen

Moleküle können auch rotieren und die damit verbundene Rotationsenergie ist ebenfalls gequantelt. Bild 10-29 zeigt am Beispiel des CO<sub>2</sub>-Moleküls, dass die Energie bei Rotation kleiner als bei Vibration ist. Das Termschema bezieht sich auf den gleichen elektronischen Grundzustand; man nennt es Rotations-Vibrationsspektrum. Zwischen den verschiedenen Übergängen können nach so genannten Auswahlregeln zahlreiche Übergänge stattfinden, bei denen Strahlung emittiert oder absorbiert wird. Während die Übergänge zwischen verschiedenen elektronischen Zuständen im sichtbaren Spektralbereich liegen, treten Übergänge zwischen Rotations-Vibrations-Niveaus nach Bild 10-29 im Infraroten auf. Beim CO<sub>2</sub>-Laser entsteht Strahlung bei Wellenlängen um 9,5 μm und 10,6 μm.



**Bild 10-29**  
Energievieuas beim CO<sub>2</sub>-Molekül mit Laserübergängen

## Raman-Effekt

Rotations-Vibrationszustände können durch den *Raman-Effekt* untersucht werden. In ein molekulares Gas wird intensives Licht gestrahlt, vorzugsweise aus einem Laser. Durch die Raman-Streuung werden Moleküle zu Rotationen und Vibrationen angeregt. Die Energie wird dem eingestrahlten Licht entnommen, so dass das gestreute Licht zu längeren Wellenlängen verschoben ist. Auch der umgekehrte Fall ist möglich, bei dem Schwingungs-Rotations-Energie der Moleküle auf das Licht übertragen wird.

**Beispiel 10.3.4** Welche Energiezustände gibt es bei Atomen und welche bei Molekülen?

Bei Atomen gibt es nur elektronische Zustände. Bei Molekülen gibt es neben den elektronischen Zuständen (Strahlung in Ultravioletten) auch noch Vibrationsniveaus (Strahlung im Infraroten) und Rotationsniveaus (Strahlung im Ferninfraroten).

# 11 Festkörper

Atome und Moleküle ordnen sich zu Festkörpern. Die meisten Werkstoffe weisen eine kristalline Struktur auf. Daher beschäftigt sich Hauptteil des Kapitels Festkörperphysik mit Kristallen und ihren Eigenschaften. Dabei sind Halbleiter von besonderer Bedeutung. Jedoch sind auch amorphe Festkörper oder Gläser und Flüssigkristalle von großem Interesse.

## 11.1 Struktur der Festkörper

### 11.1.1 Bindung in Kristallen

Zwischen Atomen und Molekülen wirken überwiegend elektrische Kräfte; die magnetischen Wirkungen bei der Bindung können vernachlässigt werden. In Kristallen unterscheidet man folgende Bindungsarten (Tabelle 11.1)

- (1) Kovalente oder *homöopolare Bindung*,
- (2) Ionenbindung oder *heteropolare Bindung* und
- (3) metallische Bindung.

Nur in Sonderfällen, beispielsweise bei der Verfestigung von Edelgasen, spielt die Van-der-Waals-Bindung eine Rolle.

**Tabelle 11.1** Bindungsarten in Festkörpern

Typ	Struktur	Energie in eV	Festkörper	Eigenschaften
Kovalente Bindung	$\begin{array}{c} \text{Si}=\text{Si}=\text{Si}=\text{Si}= \\   \quad   \quad   \quad   \\ \text{Si}=\text{Si}-\text{Si}-\text{Si}= \\   \quad   \quad   \quad   \\ \text{Si}=\text{Si}-\text{Si}-\text{Si}= \\   \quad   \quad   \quad   \end{array}$	1 bis 7	4-wertige Elemente, C, Si, InSb, organische Stoffe	Isolator, Halbleiter, schwer verformbar, hoher Schmelzpunkt
Ionen-Bindung	$\text{Na}^+ \text{Cl}^-$	6 bis 20	Salze, wie $\text{NaCl}$ , $\text{KCl}$ $\text{BaF}_2$	Isolator, Ionenleitung, bei hohen Temperaturen plastisch verformbar
Metallische Bindung	$\begin{array}{ccccccc} - & + & - & + & + & - & - \\ - & + & - & + & + & - & - \\ - & + & - & + & + & - & - \\ + & - & + & - & + & + & - \end{array}$	1 bis 5	Metalle, Legierungen	Leiter, Wärmeleiter, plastisch verformbar, Lichtreflexion

### Kovalente Bindung

Bei der kovalenten Bindung werden Elektronenpaare von benachbarten Atomen gemeinsam benutzt. Beispiele sind Kristalle aus den vierwertigen Elementen wie Silizium und Kohlen-

stoff. Diese Atome sind von vier Nachbaratomen umgeben, von denen sie jeweils ein Elektron erhalten. Damit wird die Schale mit acht Elektronen aufgefüllt und es entsteht eine stabile edelgasähnliche Konfiguration. Da zwei Elektronen (mit antiparallelem Spin) die Verbindung zu einem Nachbaratom herstellen, spricht man auch von *Elektronenpaarbindung*. Die kovalente Bindung herrscht in Isolatoren und Halbleitern. Die Materialien sind hart und schwer verformbar und weisen einen hohen Schmelzpunkt auf.

### Ionenbindung

Diese Bindung wird durch die Coulomb'sche Kraft zwischen zwei Ionen verursacht. Sie ist typisch für Salze. Im Kristall NaCl liegen die Ionen  $\text{Na}^+$  und  $\text{Cl}^-$  mit jeweils abgeschlossenen Schalen vor. Die elektrostatischen Kräfte erstrecken sich über mehrere Nachbaratome. Kristalle mit Ionenbindung sind bei niedrigen Temperaturen Isolatoren; bei hohen kann durch Dissoziation eine elektrolytische Ioneneleitung erfolgen.

### Metallische Bindung

In Metallen werden die äußeren Elektronen von den Atomen abgegeben. Die Bindung kommt dadurch zustande, dass diese *Valenzelektronen* mit allen positiven Atomrumpfen in anziehende Wechselwirkung treten. Die freien Elektronen sind nicht lokalisiert und sie können als *Elektronengas* aufgefasst werden, das sich relativ frei durch den Festkörper bewegen kann. Metalle sind daher gute Strom- und Wärmeleiter. Da die Bindungskräfte isotrop wirken, wird die Lage der Atome bevorzugt durch die *dichteste Kugelpackung* beschrieben. Dies erklärt die leichte Verformbarkeit und das Auftreten stabiler Legierungen.

**Beispiel 11.1.1** Erläutern Sie mit wenigen Stichpunkten die Begriffe kovalente, Ionen- und metallische Bindung.

*Kovalente Bindung (homoöpolar)*: 1 bis 7 eV, gemeinsame Elektronenpaare um Atome (Elektronenpaarbindung) vierwertige Elemente Si, Ge oder C → abgeschlossene Schale für jedes Atom, Isolatoren oder Halbleiter, hart, schwer verformbar, hoher Schmelzpunkt.

*Ionenbindung (heteropolar)*: 6 bis 20 eV, Coulomb-Kraft zwischen pos. und neg. Ionen, Salze wie  $\text{NaCl}$  ( $\text{Na}^+ \text{Cl}^-$ ) Isolatoren, bei hohen Temperaturen Ioneneleitung, weich, niedriger Schmelzpunkt.

*Metallische Bindung*: 1 bis 5 eV, Atome geben Elektronen ab, Anziehung zwischen pos. Kristallgitter und neg. Leitungselektronen, Strom- und Wärmeleiter, plastisch, Lichtreflexion.

### 11.1.2 Kristallstrukturen

Die meisten Festkörper verfestigen sich aus ihren Schmelzen polykristallin, mit monokristallinen Bereichsgrößen von einigen Mikrometern. Die makroskopischen Eigenschaften dieser Materialien sind isotrop, d. h. in allen Richtungen gleich. Durch spezielle Ziehverfahren aus der Schmelze gelingt es, große Einkristalle mit einheitlicher Struktur herzustellen. Wichtige Anwendungen für Einkristalle finden sich in der Halbleitertechnik und Optik.

### Kristallsysteme

Kristallgitter werden durch periodische Anordnungen einer Elementarzelle gebildet. Man kann diese Zelle durch drei Seitenlängen oder Gitterkonstanten ( $a, b, c$ ) und drei Winkel ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) zwischen den Kristallachsen beschreiben (Bild 11-1a). Je nachdem, ob die Gitterkonstanten gleich oder ungleich sind und ob die Winkel  $90^\circ$  betragen, unterscheidet man sieben Kristallsysteme. Beim *primitiven Gitter* sind nur die Endpunkte mit Atomen belegt. Daneben gibt es *flächen-, basis- oder raumzentrierte Gitter*. Entsprechend Bild 11.1a ergeben sich insgesamt 14 *Bravais Gitter*. Mittels der Röntgen- und Neutronenbeugung lässt sich die Kristallstruktur von Festkörpern experimentell bestimmen (Abschnitt 10.3.2).

a)

	primitiv	flächenzentriert	basiszentriert	raumzentriert
kubisch $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$				
Tetragonal $a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$				
orthorombisch $a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$				
hexagonal $a = b \neq c$ $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma = 120^\circ$				
rhomboedrisch $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$				
monoklin $a \neq b \neq c$ $\alpha = \gamma = 90^\circ$ $\beta \neq 90^\circ$				
triklin $a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ $\neq 90^\circ \neq 120^\circ$				

b)

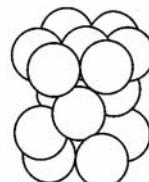
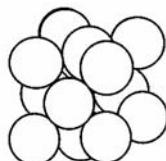
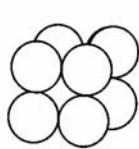
kubisch  
raumzentriertkubisch  
flächenzentrierthexagonal dichteste  
Kugelpackung

Bild 11-1 Darstellung von Kristallstrukturen:

- a) Es gibt 7 Kristallsysteme mit 14 Bravais-Gittern.  
 b) Gittertypen dichtester Kugelpackung beispielsweise bei Metallen

## Dichteste Kugelpackung

Wegen der isotropen Bindungs Kräfte spielen in Metallen nur drei Gitterstrukturen eine Hauptrolle: die kubisch-flächenzentrierte, die kubisch-raumzentrierte und die hexagonale Kugelpackung. Die Lage der Atome ist in Bild 11-1b als Kugelmodell skizziert. Einige Metalle in kubisch-flächenzentrierter Anordnung sind Pb, Ag, Au, Al, Pt, Cu, Ni mit einer Gitterkonstanten von  $a$  zwischen  $3,5 \cdot 10^{-10}$  und  $4,9 \cdot 10^{-10}$  m. Kubisch-raumzentriert sind beispielsweise Cs, K, Ba, Na, Zr, Li, W und Fe mit  $a = 2,9 \cdot 10^{-10}$  bis  $6,1 \cdot 10^{-10}$  m.

## Gitterfehler

Der periodische Aufbau von Kristallen weist Gitterfehler auf, die zu veränderten Materialeigenschaften führen. Man unterscheidet *Punkt-, Linien- und Flächenfehler*. Punktfehler können sein: Leerstellen (es fehlen Atome auf einigen Gitterplätzen) Zwischengitteratome oder Fremdstörstellen (es befinden sich fremde Atome an Gitter- oder Zwischengitterplätzen). Von besonderer Bedeutung in der Halbleitertechnik sind Fremdstörstellen, die durch Dotierung erzielt werden.

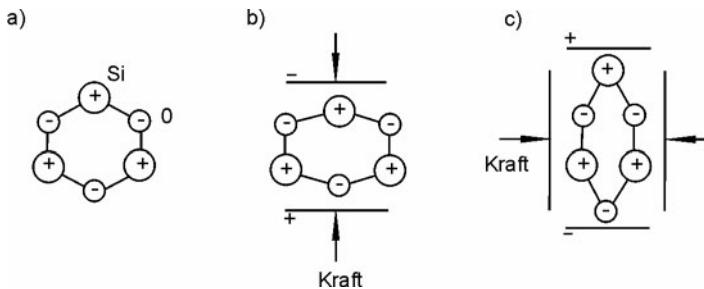
## Phasenumwandlungen

Bei Variation der Temperatur kann sich die Kristallstruktur verändern. Ein Beispiel ist Eisen, das bei 769 °C umkristallisiert (Bild 5-2). Ein anderes Beispiel sind die so genannten *Memory-Legierungen*, die in der Hochtemperaturphase (Austenit) eine völlig andere Form aufweisen können als bei niedrigeren Temperaturen (Martensit).

## Piezoeffekt

Unter der Wirkung äußerer Kräfte deformieren sich die Kristallgitter. Die Atome werden verschoben, was am Beispiel von Quarz ( $\text{SiO}_2$ ) in Bild 11-2 dargestellt ist. Durch eine Kraft  $F$  entsteht eine Ladungen  $Q$  an den Oberflächen des Kristalls und es tritt eine elektrische Spannung parallel (Bild 11-2b) oder senkrecht (Bild 11-2c) zur Kraftrichtung auf. Die Ladung  $Q$  ist proportional zur Kraft  $F$  und zum Piezomodul  $k$ :

$$Q = kF \quad \text{mit} \quad k = 2,3 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{N}} \quad \text{für Quarz} \quad \text{und} \quad k = 250 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{N}} \quad \text{für Bariumtitanat.}$$



**Bild 11-2** Darstellung des Piezoeffekts:

- a) Kristallgitter von Quarz ( $\text{SiO}_2$ )
- b) Druck in Richtung der sogenannten E-Achse.
- c) Druck senkrecht zu b)

Man nennt diese Erscheinung Piezoelektrizität nach dem griechischen Ausdruck piezo = ich drücke! Der *Piezoeffekt* ist umkehrbar: Beim Anlegen einer elektrischen Feldstärke  $E$  deformiert sich der Kristall in Längs- oder Querrichtung, je nach Lage des Feldes zur Kristallachse (*Elektrostriktion*). Die relative Längenänderung  $\varepsilon = \Delta l/l$  ist proportional zur Feldstärke  $E$  und einer Materialgröße  $c$ :

$$\varepsilon = cE. \text{ Bei Spannungen im kV-Bereich erhält man Längenänderungen um } 0,1 \mu\text{m}$$

Die technischen Anwendungen des Piezoeffektes und dessen Umkehrung, der *Elektrostriktion*, sind zahlreich. Einige Beispiele sind: Erzeugung von Ultraschall, elektromechanische Sensoren und Stellglieder, elektronische Baugruppen oder Erzeugung von Hochspannungspulsen.

**Beispiel 11.1.2a** Wie groß ist die Packungsdichte  $PD$  bei einem kubisch-raumzentrierten Gitter nach Bild 11-1b?

$$PD = V_{\text{Kugel}} / V_{\text{Würfel}} = (\frac{4}{3}) \pi r^3 / 8 r^3 = \frac{\pi}{6} \approx 0,52.$$

**Beispiel 11.1.2b** An einem Piezokristall aus Quarz wird eine Kraft von 100 N innerhalb 0,5 s angelegt.

Wie hoch ist der Strom?

Es gilt  $Q = kF$  und  $I = dQ/dt = kdF/dt$ . Mit  $k = 2,3 \cdot 10^{-12} \text{ As/N}$ ,  $dF = 100 \text{ N}$  und  $d t = 0,5 \text{ s}$  erhält man:  $I = 0,46 \text{ nA}$ .

### 11.1.3 Nichtkristalline Festkörper

Festkörper ohne periodische Anordnung der Atome werden *amorph* genannt. Zu dieser Materialgruppe zählen beispielsweise Gläser, keramische Werkstoffe und organische Kunststoffe.

#### Amorphe Werkstoffe

Kühlt man geschmolzene Legierungen sehr schnell ( $0,6 \text{ K/s}$ ) ab, friert die weitgehend ungeordnete Struktur der Flüssigkeit ein, und eine Kristallisation unterbleibt. Man erreicht dies, indem man die Schmelze auf eine schnell rotierende Trommel spritzt, wo sie zu einem dünnen Band erstarrt. Amorphe Metall-Legierungen werden auch metallische Gläser genannt. Sie sind mechanisch hart, sehr korrosionsbeständig und weisen bemerkenswerte elektrische und magnetische Eigenschaften auf.

#### Gläser

Gläser zeigen in ihrer atomaren Struktur kaum Unterschiede zu Flüssigkeiten. Lediglich die makroskopischen Eigenschaften sind anders: Viskosität  $\eta$  und  $E$ -Modul liegen wesentlich höher. Die Grenze zwischen Flüssigkeit und Festkörper hat man bei  $\eta = 4 \cdot 10^{13} \text{ kg/(ms)}$  definiert. Da die Viskosität mit steigender Temperatur stark abfällt, bestimmt sie, ob ein Material flüssig oder fest ist. Gläser und auch Polymere erstarrn nicht abrupt wie Kristalle, sondern werden bei Abkühlung allmählich zäher, härter und fester.

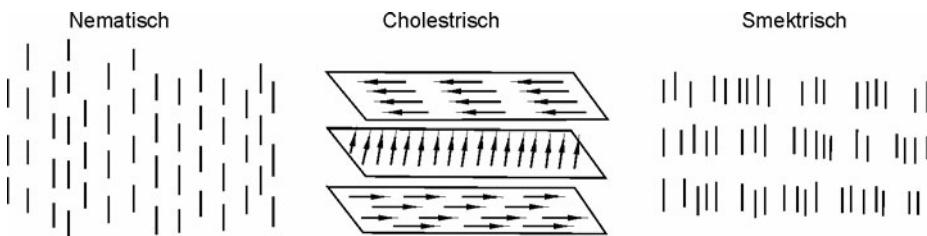
#### Makromolekulare Festkörper

Makromolekulare Werkstoffe sind aus sehr langen Molekülen aufgebaut. Sie können amorph, teilkristallin oder kristallin sein. Die wichtigste Gruppe sind die amorphen und teilkristallinen Polymerwerkstoffe oder Kunststoffe.

### 11.1.4 Flüssigkristalle

Flüssigkristalle befinden sich zwischen dem kristallinen, anisotropen Zustand von Festkörpern und der beweglichen isotropen Phase von Flüssigkeiten. Sie bestehen aus langgestreckten

Molekülen, meist aromatischer Verbindungen mit 10 bis 100 Atomen und weisen folgende Eigenschaften auf: die Molekülachsen können ausgerichtet und gedreht werden. Bei manchen Flüssigkristallen zeigen die Molekülschwerpunkte zusätzlich eine regelmäßige Anordnung, ähnlich wie bei Festkörpern.



**Bild 11-3** Struktur von Flüssigkristallen

### Nematische, cholesterische, smektische Struktur

Das Wort *nematisch* bedeutet fadenförmig. In dieser Phase sind die Achsen der Moleküle parallel orientiert, die Schwerpunkte sind unregelmäßig verteilt (Bild 11-3). Cholesterische Flüssigkristalle zeigen in einer dünnen Schichtebene nematische Struktur. Die Richtung der Molekülachsen dreht sich von Ebene zu Ebene. Es entsteht eine Spiralstruktur mit konstanter Ganghöhe. Der Begriff *cholesterisch* ist von der chemischen Verbindung Cholesterin abgeleitet. In *smektischen* (seifenartigen) Phasen sind die Moleküle in Ebenen angeordnet und die Achsen sind parallel ausgerichtet.

### Optische Eigenschaften

Flüssigkristalle zeigen Doppelbrechung, die in der cholesterischen Phase bis zu 100 mal stärker ist als beim Quarz. Die Ganghöhe  $d$  der Spiralstruktur cholesterinischer Substanzen kann in der Größenordnung der Wellenlänge  $\lambda$  des Lichtes liegen. Man erhält eine selektive Transparenz bei  $\lambda = nd$ , wobei  $n$  die mittlere Brechzahl angibt. Die Ganghöhe  $d$  und die Farbe des durchgehenden Lichtes können durch Druck, Temperatur, elektrische und magnetische Felder verändert werden.

Flüssigkristalle sind transparent. Beim Anlegen eines elektrischen Feldes drehen sich die Moleküle in Feldrichtung. Durch diese Störung der regelmäßigen Struktur treten Streuung und eine milchige Struktur auf. Die Substanz verhält sich ähnlich wie eine Mattglasscheibe.

### Anzeigeeinheit (LCD)

Die Moleküle von Flüssigkristallen ordnen sich an präparierten Grenzflächen. Dieser Effekt wird zur Herstellung speziell orientierter Schichten ausgenutzt. Bei Anzeigeeinheiten (LCD = liquid crystal display) wird eine etwa  $10 \mu\text{m}$  dicke verdrillte nematische Schicht zwischen zwei Glasplatten verwendet. Die Grenzflächen werden durch schräges Bedampfen oder Reiben so präpariert, dass sich die Moleküle parallel zur Vorzugsrichtung anlagern. Die Richtungen beider Glasflächen sind um  $90^\circ$  verdreht. Dadurch ändert sich die Orientierung der Moleküle in der Schicht kontinuierlich um den gleichen Winkel. Linear Polarisiertes wird durch diese Anordnung ebenfalls um  $90^\circ$  gedreht. Durch Anlegen eines elektrischen Feldes quer zur Schicht orientieren sich die Moleküle in gleicher Richtung, so dass das Licht die Schicht ohne

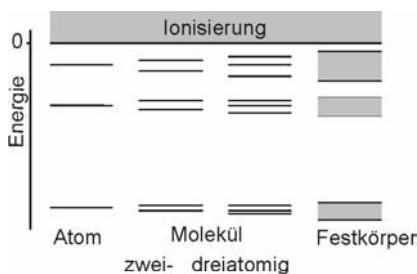
Änderung der Polarisation passiert. Bringt man diese Anordnung zwischen zwei gekreuzte Polarisationsfolien, ist damit ein elektronisches Schalten der Lichtintensität möglich. Bei LCD-Anzeigen oder -Displays werden die Elektroden matrixförmig als lichtdurchlässige Schichten auf die Glasplatten gedampft. Zur Beobachtung in Reflexion wird das System auf eine spiegelnde Fläche gebracht. Weitere Anwendungen von flüssigen Kristallen liegen in der Sichtbarmachung von Temperaturfeldern durch cholesterische Verbindungen und als optische Schalter für die Lasertechnik.

## 11.2 Elektronen in Festkörpern

Die Elektronen in Festkörpern bestimmen deren elektrischen und optischen Eigenschaften. Sie haben Einfluss auf das thermische Verhalten, das in Kapitel 5 (Thermodynamik) beschrieben ist.

### 11.2.1 Energiebänder

Freie Atome besitzen scharfe elektronische Energiezustände, die durch die Elektronenbahnen um das Atom gegeben sind (Bild 11-4). Bei Molekülen spalten die Energieniveaus auf. Es treten zahlreiche Vibrations-Rotationsniveaus auf (Abschnitt 10.3.4). Bei höherem Druck überlappen sich die Niveaus und es entstehen *Energiebänder*. Ähnlich ist es in Festkörpern. Während jeder atomare Zustand mit einem Elektronen besetzt werden kann, haben in einem Energieband  $N$  Elektronen Platz, wobei  $N$  die Zahl der Atome im Festkörper ist. Überlappen sich mehrere Energiebänder, kann die Zahl auch ein mehrfaches von  $N$  betragen. So wie ein freies Atom verschiedene angeregte Niveaus besitzt, treten beim Festkörper mehrere Energiebänder auf.

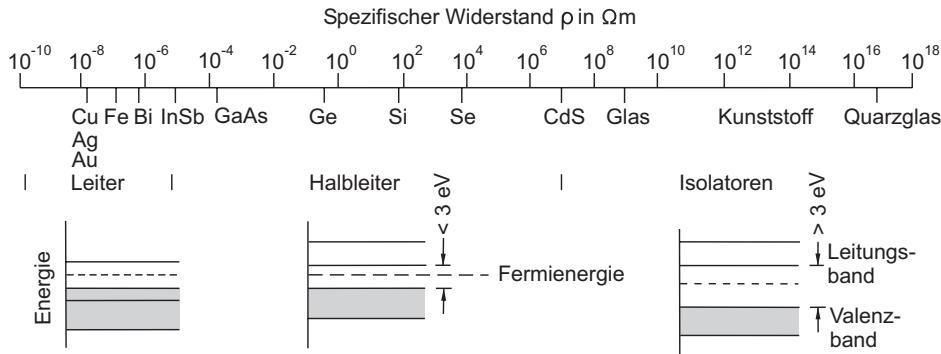


**Bild 11-4**  
Energiezustände in Atomen,  
Molekülen und Festkörpern

### Leiter, Halbleiter, Isolatoren

Die Bandstruktur bestimmt das elektrische und optische Verhalten von Festkörpern (Bild 11-5). Bei Leitern (spezifischer Widerstand  $\rho < 10^{-5} \Omega\text{m}$ ) ist das obere Band teilweise gefüllt. Die Elektronen können sich in diesem *Leitungsband* frei bewegen.

Bei Halbleitern ( $10^{-5} < \rho < 10^7 \Omega\text{m}$ ) ist das Leitungsband unbesetzt. Das untere *Valenzband* ist voll belegt. Ein Elektronentransport kann nicht stattfinden, es sei denn, Elektronen werden aus dem Valenzband in das Leitungsband befördert. Da der Energieabstand zwischen beiden Bändern relativ gering ist ( $\approx 3 \text{ eV}$ ) kann der Übergang durch die thermische Energie im Festkörper erreicht werden. Bei Isolatoren ( $\rho > 10^7 \Omega\text{m}$ ) ist dies nicht möglich, da der Abstand der Bänder größer ist.



**Bild 11-5** Spezifischer elektrischer Widerstand  $\rho$  und Bändermodell von Leitern, Halbleitern und Isolatoren

### Fermi-Energie

Bei Steigerung der Temperatur kann ein Elektron in einen höheren Energiezustand gebracht werden, z. B. in ein höheres Band. Die Frage, ob ein Zustand in einem Festkörper besetzt oder unbesetzt ist, hängt also von der Temperatur ab. Am absoluten Nullpunkt  $T = 0$  werden alle Zustände bis zur so genannten *Fermi-Energie* belegt, darüber bleiben sie frei. Für einen reinen Halbleiter liegt die Fermi-Energie in der Mitte zwischen dem Valenz- und Leitungsband. Bei höheren Temperaturen findet ein Übergang von Zuständen unterhalb der Fermi-Energie  $E_F$  zu Niveaus oberhalb  $E_F$  statt. Die Fermi-Energie verändert sich mit der Elektronendichte  $n$ , z. B. bei Dotierung.

**Beispiel 11.2.1** Ein Zylinder mit  $A = 10 \text{ mm}^2$  Querschnitt und  $l = 1 \text{ m}$  Länge hat einen Widerstand von  $R = 8 \text{ M } \Omega$ . Handelt es sich um einen Leiter? Kann es sich um Si handeln?

Nach § 4.8 gilt:  $\rho = RA/l = 80 \Omega\text{m}$ . Es kann sich um den Halbleiter Si handeln (Bild 11-5)

### 11.2.2 Metallische Leitung

#### Beweglichkeit

In Metallen bewegen sich die Elektronen des Leitungsbandes ungebunden durch das Kristallgitter. Die Bewegung wird jedoch durch Stöße mit dem Gitter gestört und es findet ein Energieaustausch statt. Legt man an einen Leiter eine Spannung, driften die Elektronen entgegen gesetzt zur Richtung der elektrischen Feldstärke  $E$ , die von plus nach minus zeigt. Während im Vakuum Elektronen im Feld beschleunigt werden, gewinnen sie wegen der Energieverluste durch Stöße im Festkörper eine konstante mittlere Driftgeschwindigkeit  $v$ :

$$v = \mu E \quad [\mu] = \frac{\text{m}^2}{\text{sV}} \quad [E] = \frac{\text{V}}{\text{m}}, \quad \text{Driftgeschwindigkeit } v \quad (11.1)$$

wobei  $\mu$  die *Beweglichkeit* ist.

#### Leitfähigkeit

Elektronen mit der Driftgeschwindigkeit  $v$  transportieren einen Strom  $I$

$$I = n e_0 A v, \quad \text{Strom } I \quad (11.2)$$

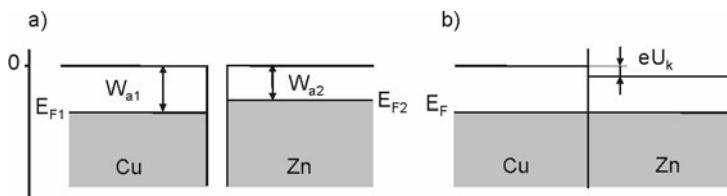
wobei  $n$  die Elektronendichte,  $e_0$  die Elementarladung,  $A$  die Querschnittsfläche und  $l$  die Länge des Leiters bedeuten. Mit Hilfe des Ohm'schen Gesetzes  $U = IR$ , dem Widerstand  $R = \rho l/A = l/(\kappa A)$  und  $E = U/l$  erhält man für die spezifische Leitfähigkeit  $\kappa$  oder den spezifischen Widerstand  $\rho$ :

$$\kappa = e_0 n \mu \quad \text{und} \quad \rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{e_0 n \mu}. \quad \text{spezifischer Widerstand } \rho \quad (11.3)$$

Die spezifische Leitfähigkeit  $\kappa$  (und der spezifische Widerstand  $\rho$ ) ist also durch die Dichte  $n$  und Beweglichkeit  $\mu$  der Elektronen gegeben. In Abschnitt 8.2.2 wird beschrieben, dass die Ladungsträgerdichte  $e_0 n$  mittels des Hall-Effektes gemessen werden kann.

### Elektronengas

Die freie Beweglichkeit der Leitungselektronen führt zu der Bezeichnung *Elektronengas*. Um Elektronen aus dem Metall herauszulösen, ist Energie erforderlich, die Austrittsarbeit  $W_A$ . Der Vorgang der Elektronenemission entspricht der Verdampfung von Atomen aus Festkörpern. Bild 11-6a zeigt das nicht aufgefüllte Leitungsband und darüber die Angabe der Austrittsarbeit. Bei  $T=0$  K ist das Valenzband bis zur Fermi-Energie  $E_F$  gefüllt, darüber ist es leer. Bei Erhöhung der Temperatur besetzen Elektronen auch energiereichere Zustände. Die Wahrscheinlichkeit  $f$ , mit der ein Zustand der Energie  $E$  eingenommen wird, bestimmt die *Fermi-Statistik*:



**Bild 11-6** Darstellung der Austrittsarbeit  $W_A$  und Entstehung einer Kontaktspannung  $U_K$  zwischen zwei Metallen:  
a) Metalle vor der Berührung    b) nach Berührung

$$f = \frac{1}{1 + \exp \frac{E - E_F}{kT}}. \quad \text{Fermi-Verteilung} \quad (11.4a)$$

$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Nm/K ist die Boltzmann-Konstante und  $T$  die absolute Temperatur. Die Fermi-Statistik ist speziell für Elektronen (und andere Teilchen mit dem Spin  $s = 1/2$ ) gültig. Näherungsweise kann stattdessen die einfachere Boltzmann-Verteilung benutzt werden, die auch für Gase gilt:

$$f = \frac{1}{\exp \frac{E - E_F}{kT}} = \exp - \frac{E - E_F}{kT}. \quad \text{Boltzmann-Verteilung} \quad (11.4b)$$

Diese Näherung ist für  $E - E_F \gg kT$  zulässig, da in diesem Fall die 1 im Nenner von (1.4a) vernachlässigbar ist.

Mit Hilfe der Fermi-Statistik kann der Prozess der Glühemission, d. h. die Verdampfung von Elektronen berechnet werden. Man bestimmt die Zahl der Elektronen, für welche die Energie  $E - E_F$  größer als die Austrittsarbeit  $W_A$  ist. Die Glühemission steigt mit zunehmender Temperatur  $T$  stark an.

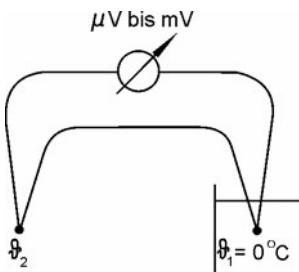
### Kontaktpotential

Berühren sich zwei Metalle mit verschiedenen Fermi-Niveaus, entsteht ein Diffusionstrom und die Niveaus werden ausgeglichen (Bild 11-6b). Das Metall mit höherem Fermi-Niveau gibt so lange Elektronen ab, bis eine Kontaktspannung  $U_K$  entsteht und beide Fermi-Niveaus auf gleicher Höhe liegen.

Die Kontaktspannung hängt von der Temperatur ab (Seeberg-Effekt). Die Ursache dafür ist, dass durch die Umverteilung der Elektronen eine Verschiebung der Fermi-Energie erfolgt. Dieser Effekt wird in Thermoelementen ausgenutzt, die nach Bild 11-7 aus zwei Verbindungsstellen verschiedener Metalle bestehen. Herrscht an den Kontaktbereichen eine Temperaturdifferenz  $\Delta T$ , wird eine Thermospannung  $U_T$  gemessen:

$$U_T = \varepsilon \Delta T \quad [\varepsilon] = \frac{V}{K} \quad \text{Thermospannung } U_T \quad (1.5)$$

Die Thermokraft  $\varepsilon$  ist in Tabelle 11.2 für einige Thermoelemente dargestellt.



**Bild 11-7**

Schematischer Aufbau eines Thermoelements. Es wird die Temperaturdifferenz zwischen beiden Verbindungspunkten gemessen. Befindet sich eine Seite in schmelzendem Wasser, kann die Temperatur in °C angegeben werden

**Tabelle 11.2** Thermokraft  $\varepsilon$  einiger Thermoelemente

Thermoelement	$\varepsilon$ in $\mu\text{V/K}$	Temperaturbereich in °C
Eisen-Konstantan	53,7	0 bis 200
Kupfer-Konstantan	42,5	0 bis 100
Nickel-Chromnickel	41,3	0 bis 1000
Indium-Iridium/Rhenium	17	0 bis 2000
Platin-Platin/Rhodium	9,6	0 bis 1000

### Peltier-Effekt

Dieser Effekt stellt die Umkehrung der beschriebenen thermoelektrischen Erscheinung dar. Fließt durch die Berührungsstelle zweier Leiter ein Strom, tritt je nach Stromrichtung eine Erwärmung oder Abkühlung auf. Peltier-Elemente dienen zur Kühlung kleiner Objekte, z. B. von Halbleiterlasern.

**Beispiel 11.2.2a** An einem 0,1 mm dickem Kupferdraht von  $l = 1$  m Länge wird bei einer Spannung von  $U = 1$  V ein Strom von  $I = 0,46$  A gemessen. Wie groß sind die Beweglichkeit und die Driftgeschwindigkeit der Elektronen Elektronendichte von Cu  $n = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ )?

Spezifischer Widerstand §4.8)  $\rho = RA \cdot l$  Mit  $R = U/I$  folgt  $\rho = 1,7 \cdot 10^8 \Omega \cdot \text{m}$ .

Beweglichkeit §1.3)  $\mu = 1/(e_0 n \rho) \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{Vs}^{-1}$ .

Driftgeschwindigkeit §1.1)  $v = \mu E = \mu U/l = 4,3 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$ .

**Beispiel 11.2.2b** Berechnen Sie die Elektronendichte von Eisen Dichte  $\rho = 7,87 \text{ g/cm}^3$ )

Mit der Massenzahl von 55,85 (Tab.10.1) erhält man: 1 kmol entspricht 55,85 kg mit einer Teilchenzahl von  $N_A = 6,02 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$  (Avogadro-Konstante 6.5)

Daraus erhält man die Elektronendichte pro kg:  $N = 6,02 \cdot 10^{26} / 55,85 \text{ kg}^{-1} = 1,08 \cdot 10^{25} \text{ kg}^{-1}$ .

Aus der Dichte  $\rho = 7870 \text{ kg/cm}^3$  folgt die Elektronendichte pro  $\text{m}^3$ :  $n = N \rho = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ .

**Beispiel 11.2.2c** Eine Lötlstelle eines Thermoelementes wird in Eiswasser (0 °C) getaucht, die andere in ein Wasserbad von 59,5 °C. Es wird eine Spannung von 3,1 mV gemessen.

Wie groß ist die Thermokraft und um welche Werkstoffen kann es sich handeln (Tab. 11.2)?

Nach §1.5 gilt:  $\varepsilon = U_T / \Delta T = 3,1 / 59,5 \text{ mV/K} = 52,1 \mu\text{V/K}$ . Es könnte sich um Eisen-Konstantan handeln.

### 11.2.3 Supraleitung

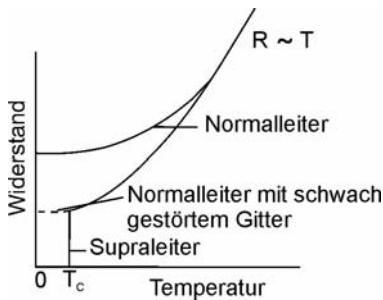
Der elektrische Widerstand von Metallen nimmt mit fallender Temperatur stark ab (Bild 11-8).

Bei  $T \neq 0$  bleibt in der Regel ein Restwiderstand übrig, der durch Gitterfehler verursacht wird.

Bei supraleitenden Metallen, wie Pb und Hg, sinkt jedoch der Widerstand unterhalb der *kritischen Temperatur*  $T_c$  schlagartig auf null. In Supraleitern können somit Kreisströme entstehen, die ohne Spannungsquelle ständig fließen. Neben einigen Metallen zeigen auch Metallverbindungen und keramische Werkstoffe Supraleitung (Tabelle 11.3),

**Tabelle 11.3** Kritische Temperatur  $T_c$  und kritisches Magnetfeld  $H_c$ , bzw.  $H_{c2}$  (jeweils bei  $T \rightarrow 0$ ) verschiedener Supraleiter

Material	$T_c$ (K)	$H_c$ (A/m)	Material	$T_c$ (K)	$H_{c2}$ (A/m)
<i>Supraleiter 1. Art:</i>					
Cd	0,52	4200	NbTi 60%	10,5	$41 \cdot 10^{-6}$
Al	1,18	7900	Nb <sub>3</sub> Sn	18	$20 \cdot 10^{-6}$
In	3,41	23300	Nb <sub>3</sub> Al	17,5	
Hg(α)	4,15	32800	Nb <sub>3</sub> Ge	23	
Sn	3,72	24600	V <sub>3</sub> Ga	16,8	$47 \cdot 10^{-6}$
Pb	7,20	63900	V <sub>3</sub> Si	17	$49 \cdot 10^{-6}$
<i>Supraleiter 2. Art: <math>T_c</math> (K) <math>H_{c2}</math> (A/m)</i>			<i>Hochtemperatur Supraleiter:</i>		
Zn	0,9	$4,2 \cdot 10^3$	La <sub>1,85</sub> Sr <sub>0,15</sub> CuO <sub>4</sub>	37	$280 \cdot 10^{-6}$
Ta	4,48	$86 \cdot 10^3$	Ba <sub>2</sub> Cu <sub>3</sub> O <sub>7</sub>	92	
V	5,3	$105 \cdot 10^3$	Bi-Sr-Ca-Cu-O	122	
Nb	9,46	$158 \cdot 10^3$	Ti-Ba-Ca-Cu-O	127	

**Bild 11-8**

Verlauf des elektrischen Widerandes bei Normal- und Supraleitern bei tiefen Temperaturen

### Kritisches Magnetfeld

Die kritischen Temperaturen in Tabelle 11.3 verringern sich, wenn ein äußeres Magnetfeld  $H$  wirkt. Oberhalb einer kritischen Flussdichte  $B_c = \mu_0 H_c$  wird der supraleitende Zustand zerstört. Stromführende supraleitende Drähte erzeugen ein Magnetfeld (Bild 8-8) das bei Überschreitung des kritischen Wertes die Supraleitung aufhebt. Der verlustfreien Übertragung von Strömen sind damit Grenzen gesetzt.

### Meißner-Ochsenfeld-Effekt

In Supraleitern werden Magnetfelder mit  $H < H_c$  aus dem Material verdrängt. Dieser Effekt tritt unabhängig davon auf, ob das Feld vor oder nach der Abkühlung unterhalb von  $T_c$  vorhanden war. Schaltet man das äußere Magnetfeld im supraleitenden Zustand ein, wird das Herausdrängen der Feldlinien durch das Induktionsgesetz und der Lenz'schen Regel verständlich. War das Magnetfeld vor dem Eintreten der Supraleitung vorhanden, ist die Feldfreiheit im Material durch die üblichen Gesetze der Elektrodynamik nicht erklärbar.

### Supraleiter 1., 2. und 3. Art

Materialien, die einen vollständigen Meißner-Ochsenfeld-Effekt zeigen, nennt man *Supraleiter 1. Art*. Bei *Supraleitern 2. Art* existiert bei kleinen Feldstärken ebenfalls eine Meißner-Phase, d. h. das Feld wird aus dem Material verdrängt. Bei Erhöhung des Feldes dringt jedoch ab der ersten kritischen Flussdichte  $B_{c1}$  das äußere Feld in Form von normalleitenden Flussschlüpfen in den Supraleiter ein. Der elektrische Widerstand des Materials bleibt makroskopisch gemessen gleich null. Beim Erreichen der zweiten kritischen Flussdichte  $B_{c2}$  verschwindet die Supraleitung (Tabelle 11.3) Im gemischten Zustand ( $B_{c1} < B < B_{c2}$ ) besteht ein magnetischer Flussschlauch aus Flussquanten der Größe  $\Phi_0 = h/e = 2 \cdot 10^{-15} \text{ Wb}$ .

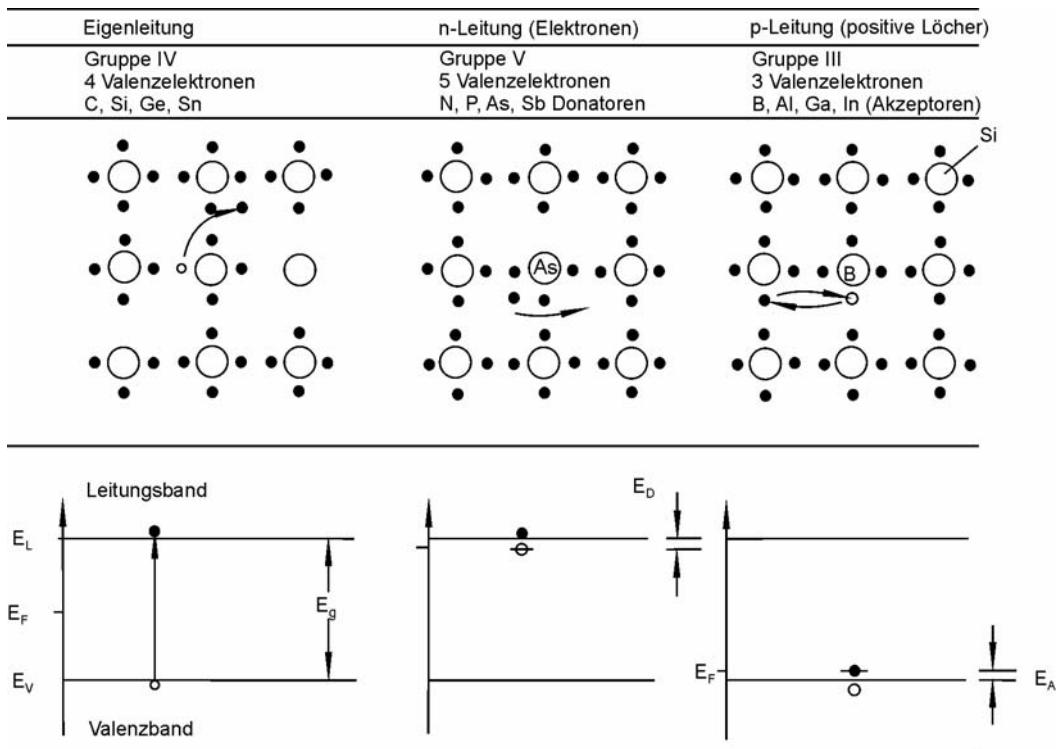
Supraleiter 2. Art mit starken Gitterstörungen bilden die Klasse der *Supraleiter 3. Art*. Sie zeichnen sich durch eine hohe kritische Flussdichte  $B_{c2}$  aus; damit wird die verlustfreie Übertragung großer Ströme möglich.

### Hochtemperatur-Supraleiter

Supraleiter 1., 2. und 3. Art müssen unter hohem technologischem Aufwand mit flüssigem Helium gekühlt werden. 1986 wurde unerwartet eine neue Klasse von Supraleitern mit wesentlich höheren kritischen Temperaturen entdeckt (Tabelle 11.3) Es handelt sich um keramische Werkstoffe mit CuO-Schichten. Kritische Temperaturen von über 77 K erlauben eine Kühlung der Supraleiter mit flüssigem Stickstoff. Dies ist technisch wesentlich einfacher als die He-Kühlung. Während es eine quantenmechanische Theorie der üblichen Supraleiter gibt, sind die Mechanismen der Hochtemperatur-Supraleiter bisher unverstanden.

### Anwendungen

Kabel aus Supraleitern 3. Art werden zum Transport elektrischer Energie verwendet. Da eine Kühlung durch flüssige Gase erforderlich ist, werden diese Systeme nur in Ballungsgebieten eingesetzt. Supraleitende Magnete sind für elektrische Antriebe, Magnetschweebahnen und für die Forschung von großer Bedeutung. Supraleitende Magnetometer oder SQUID (superconducting quantum interferometer devices) nutzen die Flussquantisierung aus. Sie dienen zur Messung kleiner Magnetfelder von der Größe  $B = \Phi_0 / A$ . Bei Querschnittsflächen von  $1 \text{ mm}^2$  erhält man  $B \approx 2 \cdot 10^{-9} \text{ T}$ . Die breite Anwendung von Hochtemperatur-Supraleitern scheitert gegenwärtig noch an den kleinen kritischen Feldern und an Problemen der Verarbeitung der Materialien.



**Bild 11-9** Mechanismen der elektrischen Leitung in Halbleitern im Bändermodell

**Beispiel 11.2.3** Was bedeuten die Begriffe kritische Temperatur und kritisches Magnetfeld? Supraleitung tritt nur unterhalb der kritischen Temperatur und dem kritischen Magnetfeld auf.

### 11.2.4 Halbleiter

Die wichtigsten Halbleiter sind die vierwertigen Elemente (IV. Gruppe des Periodensystems) wie Si, Ge, Sn. Sie kristallisieren in kovalenter Bindung und kubisch-flächenzentrierter Struktur (Diamantgitter). Jedes Atom besitzt vier Nachbarn, die an den Ecken eines regelmäßigen Tetraeders angeordnet sind. Durch gemeinsam benutzte Elektronenpaare sind die Schalen abgesättigt. Eine zweidimensionale Darstellung der Kristallstruktur zeigt Bild 11-9.

In der Optoelektronik werden Mischkristalle auf der Basis von III-V-Halbleitern eingesetzt: ternäre Mischkristalle  $\text{Ga}_x \text{Al}_{1-x} \text{As}$  und quarternäre Mischkristalle  $\text{In}_x \text{Ga}_{1-x} \text{As}_y \text{P}_{1-y}$ .

### Eigenleitung

Die reinen Halbleiter Si oder Ge besitzen nur gebundene Elektronen; das Valenzband ist vollständig gefüllt, das Leitungsband leer. Am absoluten Nullpunkt ist der Kristall ein Isolator. Durch Energiezufuhr, beispielsweise durch Temperaturerhöhung, Licht oder andere Strahlung, werden einzelne Bindungen aufgebrochen und Elektronen vom Valenz- ins Leitungsband gehoben (Bild 11-9) Damit wird ein Stromtransport durch zwei Prozesse möglich: 1.) Beim Anlegen einer Spannung bewegen sich die Elektronen im Leitungsband auf den Pluspol zu. 2.) Durch die frei gewordenen Plätze im Valenzband, die man Defektelektronen nennt, wird ein zusätzlicher Strom gebildet. An der Stelle eines fehlenden Elektrons ist das Ladungsgleichgewicht im Kristall gestört und die positiven Kernladungen überwiegen. Man spricht daher auch von *positiven Löchern*. Benachbarte Elektronen können in die Löcher fallen und es entsteht eine Wanderung der Löcher zum Minuspol. *Der Strom wird also in Halbleitern durch Elektronen und positive Löcher transportiert.* Die spezifische Leitfähigkeit  $\kappa$  eines Halbleiters wird durch die Dichte der freien Elektronen  $n$  und der positiven Löcher  $p$  gegeben (1.3)

$$\kappa = e_0(n\mu_n + p\mu_p) \quad [n \text{ F} \quad p] = \frac{1}{\text{m}^3}. \quad \text{Eigenleitung} \quad (1.6a)$$

Für Si beträgt die Beweglichkeit der Elektronen  $\mu_n = 350 \text{ cm}^2/\text{Vs}$  und die der positiven Löcher  $\mu_p = 480 \text{ cm}^2/\text{Vs}$  (Tabelle 11.4) Die Beweglichkeiten nehmen mit der Temperatur  $T$  ab:

$$\mu_n \sim T^{-3/2} \quad \text{und} \quad \mu_p \sim T^{-3/2}. \quad (1.6b)$$

Da jedes Elektron im Leitungsband ein positives Loch im Valenzband hinterlässt, sind die Dichten der freien Elektronen  $n$  und Löcher  $p$  gleich:

$n = p = n_i$ .	Intrinsische Trägerdichte $n_i$	(11.7a)
-----------------	---------------------------------	---------

Dieser Ausdruck gilt für undotierte Halbleiter, die nur Eigenleitung zeigen.  $n_i$  nennt man *intrinsische Trägerdichte*.

### Temperaturabhängigkeit

Die Dichte der Ladungsträger  $n$  und  $p$  steigt mit der Temperatur an; am absoluten Nullpunkt fällt sie auf null. Die Temperaturabhängigkeit wird durch die Fermi-Verteilung beschrieben. Die Berechnung ist kompliziert, so dass hier nur das Ergebnis gezeigt wird. Es zeigt sich, dass im Bereich der Raumtemperatur  $n$  durch die Boltzmann-Verteilung (1.4b) gegeben ist. Die Benutzung der Fermi-Energie  $E_F$  als Energieschwelle ergibt sich nach längerer Rechnung aus der Theorie:

$$n \sim \exp - \frac{E_L - E_F}{kT} = \exp - \frac{E_g}{2kT} \quad \text{Elektronendichte } n$$

und

$$p \sim \exp - \frac{E_F - E_V}{kT} = \exp - \frac{E_g}{2kT}. \quad \text{Löcherdichte } p$$

$E_g = E_L - E_V$  stellt den Bandabstand dar, wobei  $E_L$  und  $E_V$  in Bild 11-9 beschrieben sind.  $k$  ist die Boltzmann-Konstante und  $T$  die Temperatur. Das Produkt der freien Elektronen- und Löcherdichte ( $n$  und  $p$ ) hängt nur von der Temperatur und der intrinsischen Trägerdichte  $n_i$  ab:

$$np = n_i^2 \sim \exp -\frac{E_g}{kT}. \quad (1.7c)$$

Da diese Gleichung nicht von der Fermi-Energie  $n_i$  abhängt, gilt sie auch für den Fall der Störstellenleitung (n- und p-Leitung)

**Tabelle 11.4** Eigenschaften der Halbleiter Si, Ge und GaAs

	Si	Ge	GaAs
Bandabstand $E_g$ in eV	1,12	0,665	1,43
intrinsische Trägerdichte $n_i$ in $1/\text{cm}^3$	$1,510 \cdot 10^{10}$	$2,410 \cdot 10^{13}$	$1,110 \cdot 10^7$
Atomdichte in $1/\text{cm}^3$	$5,20 \cdot 10^{22}$	$4,44 \cdot 10^{22}$	$2,21 \cdot 10^{22}$
Lebensdauer der Minoritäten in s	$2,510 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-9}$
Beweglichkeit $\mu_n$ in $\text{cm}^2/(\text{Vs})$	1350	3900	8500
Beweglichkeit $\mu_p$ in $\text{cm}^2/(\text{Vs})$	480	1900	435
Gitterkonstante in $10^{-10} \text{ m}$	5,43	5,66	5,65
Dichte $\rho$ in $\text{kg}/\text{m}^3$	2328	5327	5320
linearer Ausdehnungskoeff. $\alpha$ in $10^{-6}/\text{K}$	2,6	5,8	5,9
spezifische Wärmekapazität $c$ in $\text{kJ}/(\text{kgK})$	0,70	0,31	0,35
Wärmeleitfähigkeit $\lambda$ in $\text{W}/(\text{mK})$	145	64	46
Schmelzpunkt in $^\circ\text{C}$	1420	937	1238

### Thermistor

Die Eigenleitung wird bei NTC-Widerständen (NTC = negative temperature coefficient) oder Thermistoren ausgenutzt. Mit (1.3) und (1.7b) erhält man für den Widerstand  $R$  in Abhängigkeit von der Temperatur  $T$ :

$$R(T) \sim \exp \frac{E_g}{2kT}. \quad \text{NTC-Widerstand} \quad (1.8)$$

Aufgrund der starken Temperaturabhängigkeit des Widerstandes werden NTC-Widerstände als Temperatursensoren eingesetzt.

### Photowiderstände

Durch Absorption von Licht können durch den inneren Photoeffekt freie Ladungsträger erzeugt werden. Bei Photowiderständen sinkt der Widerstand bei Lichteinstrahlung, vorausgesetzt dass die Energie eines Photons größer als der Bandabstand ist:  $hf > E_g$ . Der gleiche Effekt tritt bei Photodioden und -transistoren auf (Kapitel 11.3.3)

### Störstellenleitung

Wird die regelmäßige Kristallstruktur eines Eigenhalbleiters durch Leerstellen, Versetzungen oder Fremdatome gestört, kann die Leitfähigkeit beträchtlich erhöht werden. Technisch besonders wichtig ist der kontrollierte Einbau 3- und 5-wertiger Atome in Silizium und Germanium, man nennt diesen Vorgang *Dotierung*. Man unterscheidet n- und p-Dotierung.

## n-Leitung

Silizium und Germanium sind 4-wertig und kristallisieren in Form der Paarbindung. Freie Elektronen existieren bei  $T = 0$  K nicht. Setzt man beim Ziehen der Kristalle aus der Schmelze 5-wertige Atome hinzu, wie Phosphor, Arsen, Antimon, so können nur vier Elektronen zur Paarbindung beitragen. Das fünfte Außenelektron des Fremdatoms wird nur schwach gebunden, so dass es bei Zimmertemperatur praktisch frei ist. Nahezu jedes Fremdatom in einem Siliziumkristall stellt damit ein freies Elektron zur Verfügung und trägt zur Erhöhung der Leitfähigkeit bei. Bereits bei mäßiger Dotierung gilt daher:

$$n = N_D \quad \text{und} \quad p = \frac{n_i^2}{N_D}. \quad \text{aus (1.7c)}$$

Die typische Dichte  $N_D$  beim Dotieren liegt bei 1 Fremdatom auf  $10^5$  bis  $10^6$  Gitteratome. Man nennt die 5-wertigen Elemente *Donatoren*, Bild 11-9 stellt die Donatoren und abgegebene Elektronen im Bändermodell dar. Die Donatoren befinden sich an festen Stellen bei der Energie  $E_D$  im Kristall. Man zeichnet sie daher symbolisch als Striche in Bild 11-9. Die Energie  $E_D$  befindet sich leicht unterhalb des Leitungsbandes, so dass die Elektronen praktisch frei sind. Die Fermi-Energie  $E_F$  liegt ebenfalls in der Nähe von  $E_D$ .

Das Produkt  $np$  bleibt nach (1.7c) bei Dotierung konstant. Das bedeutet: erhöht man die Dichte der freien Elektronen durch Donatoren  $n = N_D$ , die eine Verschiebung der Fermi-Energie bewirken, so nimmt die Löcherdichte  $p$  ab. Das ist verständlich, da durch die zahlreichen Elektronen Löcher aufgefüllt werden. Der Ladungstransport bei Dotierung mit Donatoren erfolgt nahezu vollständig durch Elektronen. Man nennt diesen Mechanismus *n-Leitung*.

## p-Leitung

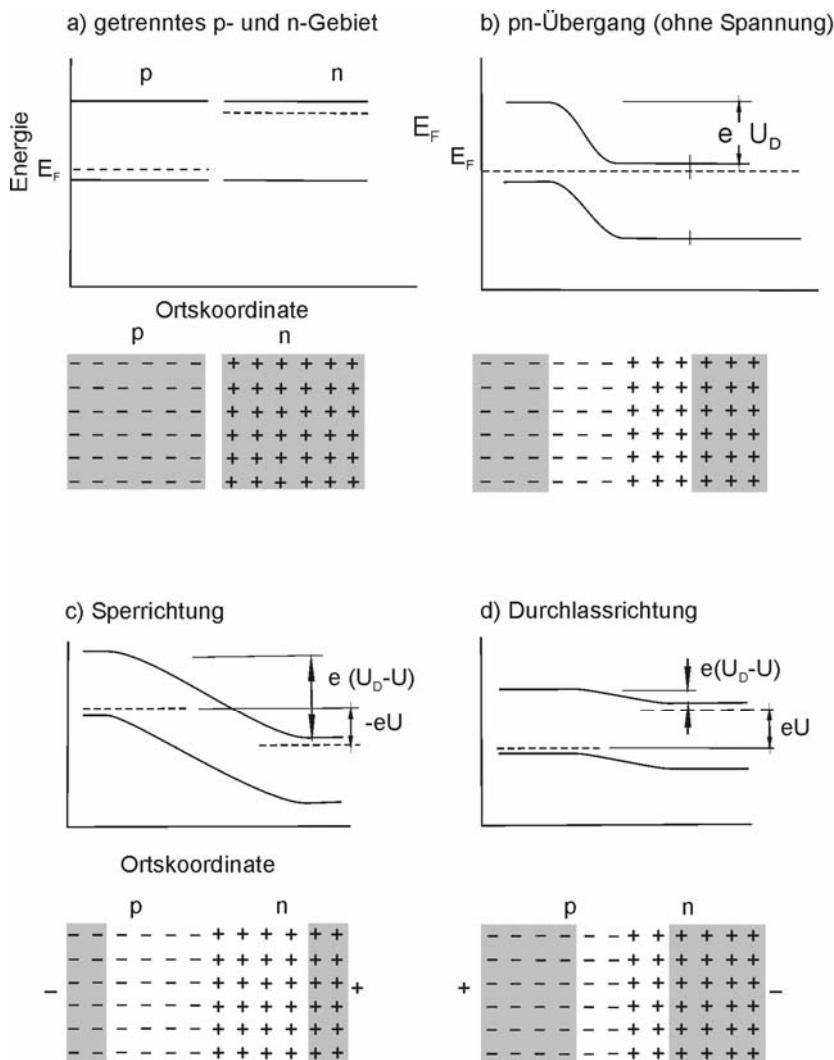
Beim Einbau 5-wertiger Fremdatome in Silizium oder Germanium entsteht n-Leitung. Verwendet man zur Dotierung 3-wertige Atome, wie Bor, Aluminium, Gallium oder Indium, so fehlt für die Paarbildung ein Elektron (Bild 11-9). Dadurch kann leicht ein Elektron, das durch die Wärmebewegung von einem Nachbaratom befreit wurde, an der Störstelle gebunden werden. Man nennt daher die 3-wertigen Fremdatome *Akzeptoren*. Es fehlt nun am Nachbaratom ein Elektron und es entsteht dort ein Defektelektron oder positives Loch. Bereits bei mäßiger Dotierung ist die Zahl der positiven Löcher durch die Dichte der Fremdatome  $N_A$  gegeben:

$$p = N_A \quad \text{und} \quad n = \frac{n_i^2}{N_A}. \quad \text{aus (1.7c)}$$

Bild 11-9 stellt die Akzeptoren, die zu positiven Löchern führen, im Bändermodell dar. Die Akzeptoren befinden sich an festen Stellen bei der Energie  $E_A$  etwas oberhalb des Leitungsbandes. Die Fermi-Energie  $E_F$  liegt ebenfalls in der Nähe von  $E_A$ .

Auch bei p-Dotierung bleibt das Produkt  $np = n_i^2$  nach (1.7c) unverändert. Durch Erhöhung der positiven Löcher sinkt die Zahl der freien Elektronen. Der Ladungstransport bei Dotierung mit Akzeptoren erfolgt nahezu vollständig durch positive Löcher. Man spricht von *p-Leitung*.

Tabelle 11.4 fasst die Verhältnisse für n- und p-Halbleiter bei üblicher Dotierung ( $N_D > n_i$ ,  $N_A > n_i$ ) zusammen. Als Beispiel werden folgende Daten zitiert: Silizium enthält  $5 \cdot 10^{22}$  Atome/cm<sup>3</sup>, bei 300 K entstehen im eigenleitenden Halbleiter  $n_i = 1,4 \cdot 10^{10}$  Ladungsträger/cm<sup>3</sup>. Die Dotierung ( $N_D$  oder  $N_A$ ) liegt im Bereich von  $10^{14}$  bis  $10^{17}$  Fremdatome/cm<sup>3</sup>.

**Bild 11-10** Eigenschaften einer pn-Schicht:

a) getrennte p- und n-Leiter. b) pn-Schicht ohne äußere Spannung.

c) Spannung in Sperrichtung. d) in Durchlassrichtung.

Es wird folgende Symbolik verwendet:

– = Akzeptoren, + = Donatoren,

Schraffur = positive Löcher oder Elektrone n, ohne Schraffur = positive oder negative Raumladungszone

**Beispiel 11.2.4a** Vergleichen Sie den Bandabstand von Si mit der thermischen Energie eines Elektrons bei Zimmertemperatur.Thermische Energie:  $E = 1,5 kT = 1,5 \cdot 0,86 \cdot 10^{-4} \text{ eV} \cdot 300 \text{ K} = 0,039 \text{ eV}$ . Der Bandabstand beträgt 1,12 eV.

Damit ist ein thermischer Übergang eines Elektrons ins Leitungsband sehr unwahrscheinlich.

**Beispiel 11.2.4b** GaAs hat einen Bandabstand von 1,43 eV. Ab welcher Wellenlänge wird Licht nicht mehr absorbiert?

Wenn die Energie eines Lichtquants kleiner als der Bandabstand ist, kann Absorption nicht stattfinden ②.28b)  
 $hf = hc_0 / \lambda \triangleq 1,43 \text{ eV} = 2,29 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ . Daraus folgt ②.28b)  
 $\lambda < hc_0 / E = 865 \text{ nm}$ .

**Beispiel 11.2.4c** Was bedeutet n- und p-Leitung?

*n-Leitung:* Ein 4-wertiger Halbleiter wird mit einem 5-wertigen Atom dotiert.

Dadurch wird ein überschüssiges Elektron  $n$  frei, das zum Pluspol wandern kann.

*p-Leitung:* Ein 4-wertiger Halbleiter wird mit einem 3-wertigen Atom dotiert. Dadurch kann ein Elektron der Umgebung leicht an diese Störstelle gebunden werden. Dadurch fehlt in der Umgebung ein Elektron und es entsteht ein positives Loch  $p$ . Das positive Loch  $p$  wandert (durch Auffüllen mit Elektronen) zum Minuspol.

## 11.2.5 pn-Übergang

Die bipolare Halbleitertechnologie beruht im Wesentlichen auf den Eigenschaften von pn-Übergängen. Bild 11-10a zeigt die Bandstruktur eines p- und n-Halbleiters, die von einander getrennt sind. Es kann sich um unterschiedlich dotiertes Silizium handeln. Der Bandabstand ist gleich, jedoch liegen die Fermi-Niveaus aufgrund anderer Dotierung verschieden.

### pn-Schicht

In Bild 11-10 ist ein pn-Übergang in einem Einkristall dargestellt, dessen Dotierung sich innerhalb weniger Atomabstände von p nach n ändert. Im Gedankenexperiment stellt man sich vor, dass zwei getrennte Halbleiter zusammengefügt werden. Aufgrund des hohen Konzentrationsgefälles diffundieren Elektronen aus dem n-Leiter in den p-Bereich und positive Löcher in umgekehrter Richtung. Dadurch steigt das elektrische Potential der p-Schicht, auf der n-Seite sinkt es. Es entsteht eine Spannung von  $U_D \approx 0,5 \text{ V}$ , welche die Driftbewegung begrenzt. Bild 11-10b veranschaulicht den Vorgang ohne äußere Spannung. Die Minus- und Pluszeichen stellen die Akzeptoren (+) und Donatoren (-) dar. Die positiven Löcher und Elektronen werden durch Schraffuren symbolisiert. Bei getrennten p- und n-Leitern gehört zu jedem Akzeptor ein positives Loch, zu jedem Donator ein Elektron. Beim Zusammenfügen beider Halbleiter tritt die oben beschriebene Diffusion der Ladungsträger auf. In einem der p- und n-Schicht Grenzbereich (ohne Schraffur gezeichnet) verarmen die Gebiete an freien Ladungsträgern. Die entstehende Spannung  $U_D$  verhindert ein weiteres Anwachsen der Grenzschicht, die nahezu frei von beweglichen Ladungsträgern ist.

Man kann zusammenfassen: Im Bändermodell Bild 11-10b) führt die Diffusionsspannung  $U_D$  zu einer Verschiebung der Bandkanten um die Energie  $e_0 U_D$ . Sie wird dadurch bestimmt, dass die Fermi-Energien der p- und n-Schicht auf gleichem Niveau liegen.

### Diode

Legt man nach Bild 11-10c eine Spannung in Sperrrichtung an, werden die freien Elektronen zum Plus- und die positiven Löcher zum Minuspol gezogen. Die Raumladungszone, verarmt an beweglichen Ladungsträgern, verbreitert sich. Der Strom ist nahezu null, bis auf einen geringen Sperrstrom (Bild 11-11). Er beruht darauf, dass Ladungsträger an den Übergang diffundieren und dort unter Wirkung der hohen Feldstärke auf die andere Seite transportiert werden. Bei größeren Spannungen kann der Sperrsättigungsstrom  $I_S$  aus dem Bandabstand  $E_g$  ermittelt werden:

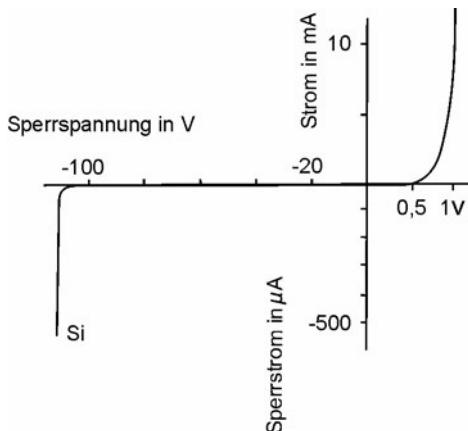
$$I_S \sim \exp - \frac{E_g}{kT}. \quad \text{Dioden-Sperrstrom } I_S \quad (1.9)$$

Dieser Ausdruck setzt voraus, dass  $I_S$  proportional zur Dichte der Minoritätsträger ist, im n-Gebiet handelt es sich um die Löcherdichte  $p$ . Mit (1.7b) erhält man  $p = (n_{i0}^2 / n_D) \exp(-E_g / kT)$ .

Einen analogen Ausdruck ergibt sich für das n-Gebiet, womit (1.9) erklärt ist. Für Si beträgt der Sperrsättigungsstrom  $I_S \approx 0,9 \text{ nA}$ .

Legt man eine äußere Spannung in Flussrichtung an (Bild 11-10d) wird die Diffusionsspannung abgebaut. Die ladungsträgerarmen Zonen werden reduziert und verschwinden bei Spannungen zwischen 0,5 und 1 V. Die Ladungsträger dringen in das benachbarte Gebiet ein und der Strom  $I$  steigt steil mit zunehmender Spannung an ( $U$  Bild 11-11)

$$I = I_S \exp \frac{e_0 U}{kT} - 1 \quad \text{Dioden-Durchlassstrom } I \quad (1.10)$$



**Bild 11-11**  
Kennlinie einer Si-Diode

### Berechnungen

In Bild 11-12 sind die physikalischen Verhältnisse einer pn-Schicht an einem Beispiel in Silizium mit  $n_i = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$  dargestellt. Die Akzeptordichte beträgt  $n_A = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  im p-Bereich, die Donatordichte  $n_D = 2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  im n-Bereich (Bild 11-12a). Die Dichten der Minoritätsträger können aus (1.7b) ermittelt werden:  $np = n_i^2$ . Die berechneten Werte sind außerhalb der Grenzschicht in Bild 11-12b angegeben. Es gilt:  $p_p = n_A$  und  $n_n = n_D$ . In der Grenzschicht findet eine Diffusion der Ladungsträger statt, wodurch eine Verarmung an beweglichen Ladungen auftritt. Dadurch entstehen eine positive und negative Raumladungszone nach Bild 11-12c mit der Dicke  $d_n$  und  $d_p$ . Die Gesamtladungen in beiden Zonen sind gleich:

$$d_n n_D = d_p n_A . \quad \text{pn-Schicht} \quad (1.11)$$

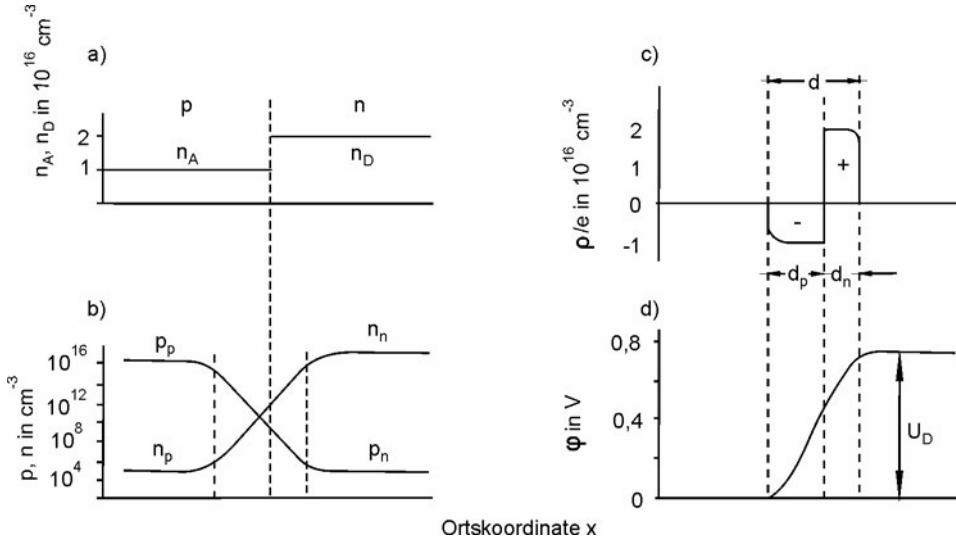
Aus der Ladungsverteilung resultiert die Diffusionsspannung  $U_D$  nach Bild 10-12d.  $U_D$  kann aus der Boltzmann-Verteilung (als Näherung der Fermi-Statistik) und der Elektronendichte im p- und n-Bereich abgeschätzt werden:

$$\frac{n_p}{n_n} = \frac{n_i^2}{n_A n_D} = \exp - \frac{e_0 U_D}{kT} .$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass  $n_p n_A = n_i^2$  und  $n_n = n_D$  betragen (Bilder 11-12a und b). Daraus erhält man für die Diffusionsspannung  $U_D$ :

$$U_D = \frac{kT}{e_0} \ln \frac{n_A n_D}{n_i^2} . \quad \text{Diffusionsspannung } U_D \quad (\text{1.12})$$

Numerische Werte liegen zwischen  $U_D = 0,5$  bis 1 V.

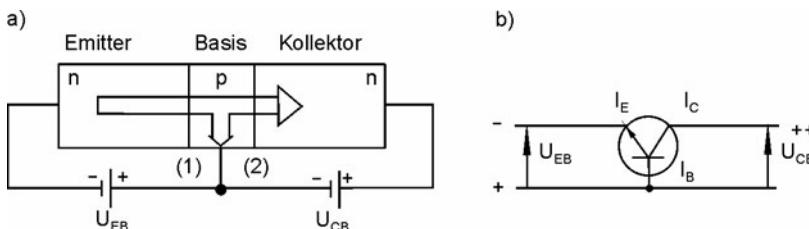


**Bild 11-12** pn-Schicht ohne äußere Spannung:

- a) Dotierung
- b) Verlauf der Konzentration der Ladungsträger
- c) Raumladungen in der Grenzschicht
- d) Verlauf der Spannung

### Transistor-Effekt

Der bipolare Flächentransistor ist eines der wichtigsten elektronischen Bauelemente. Er besteht aus zwei pn-Übergängen in der Reihenfolge npn oder pnp. Die mittlere Schicht ist sehr dünn, etwa 1  $\mu\text{m}$ . Die Wirkungsweise wird an einem npn-Transistor beschrieben Bild 11-13) Die verschiedenen Schichten werden wie folgt bezeichnet: Emitter (n-Schicht, von der die Elektronen ausgehen) Basis (dünne p-Schicht) und Kollektor, an welchem die Elektronen gesammelt werden) Das System besteht aus zwei Diode n mit den Grenzflächen (1) (Emitter-Basis-Diode) und (2) (Basis-Kollektor-Diode)



**Bild 11-13** Beschreibung des Transistoreffektes:

- a) Aufbau, b) Schaltsymbol

Die Grenzschicht 2 wird in Sperrrichtung geschaltet, der Strom ist nahezu null. Schließt man die Grenzschicht 1 in Flussrichtung an, fließen Elektronen von der linken n- in die mittlere p-Schicht. Diese ist so dünn, dass etwa 95 % der Elektronen zur Grenzschicht 2 gelangen, wo sie vom elektrischen Feld zur rechten n-Zone transportiert werden. Der Strom zwischen beiden n-Schichten (Emitter und Kollektor) wird durch die Durchlassspannung der Grenzschicht 1 gesteuert, bzw. den entsprechenden Strom an der Basis. Mit den Beziehungen aus Bild 11-13 kann ausgesagt werden: der Emitter sendet Elektronen aus, die nahezu vollständig zum Kollektor gelangen. Der Kollektorstrom  $I_C$  wird durch den kleinen Basisstrom  $I_B$  gesteuert.

Bei pnp-Transistoren sind die Ladungsträger positive Löcher, ansonsten ist die Funktionsweise analog. Weitere Einzelheiten über Transistoren sind im nächsten Abschnitt 11.3 beschrieben.

**Beispiel 11.2.5a** Berechnen Sie die Diffusionsspannung eines pn-Überganges in Si bei 27 °C

$$(n_D = n_A = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}, n_i = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3})$$

$$\text{Aus (1.12) folgt: } U_D = (kT/e) \ln(n_A n_D / n_i^2) = 0,71 \text{ V.}$$

**Beispiel 11.2.5b** Skizzieren Sie die Kennlinie einer Diode.

Lösung: siehe Bild 11-11.

**Beispiel 11.2.5c** Berechnen Sie die Kennlinie einer Si-Diode in Durchlassrichtung bei  $T = 300 \text{ K}$  mit  $I_S = 1 \text{ mA}$ .

Nach (1.10) gilt:  $I = I_S \exp(e_0 U / kT - 1)$  Man berechne  $I$  für  $U = 0 \text{ V}, 0,3 \text{ V}, 0,5 \text{ V}, 0,6 \text{ V}, 0,7 \text{ V}$ .

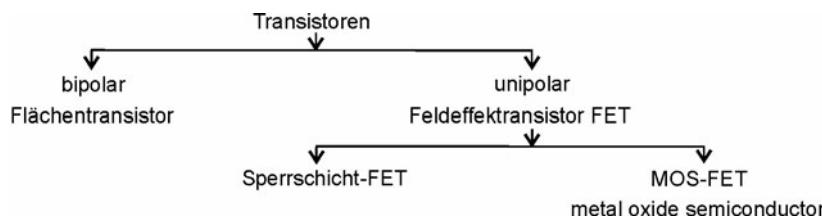
**Beispiel 11.2.5d** Beschreiben Sie den Transistor Effekt.

Lösung: siehe Abschnitt Transistor-Effekt.

## 11.3 Halbleiterbauelemente

### 11.3.1 Transistoren

Transistoren dienen zum Verstärken und Schalten elektrischer Signale. Man unterscheidet *bipolare* und *unipolare Transistoren*. Die unipolaren Bauelemente werden auch Feldeffekttransistoren genannt, die in Sperrschiicht- und MOS-Feldeffekttransistoren untergliedert werden (Bild 11-14).

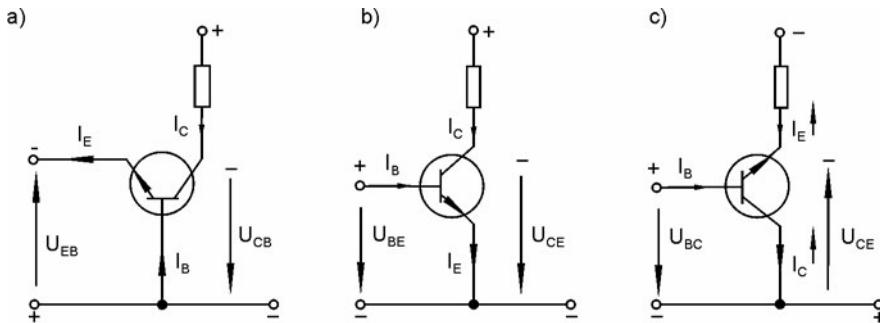


**Bild 11-14** Einteilung und Bezeichnung von Transistoren

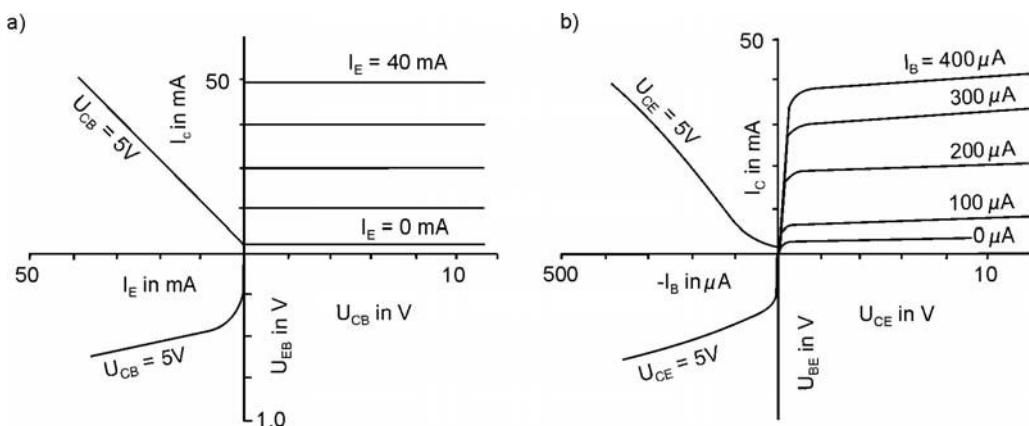
### Bipolare Transistoren

Bipolare oder Flächentransistoren bestehen, wie im letzten Abschnitt beschrieben, aus npn- oder pnp-Schichten. Im Prinzip handelt es sich um zwei gegeneinander geschaltete Dioden, bei denen die gemeinsame mittlere Schicht, die Basis, sehr dünn ausgelegt ist. Nach Bild 11-13 ist

die Emitter-Basis-Diode eines npn-Transistors in Durchflussrichtung geschaltet. Dagegen liegt der Übergang Basis-Kollektor in Sperrrichtung. Dennoch ist der Emitter-Basisstrom sehr klein, da die Basis so dünn ist, dass die vom Emitter ausgehenden Elektronen in den Bereich des Kollektors diffundieren. Der Emitterstrom teilt sich also in den (großen)Kollektorstrom  $I_C$  und den (kleinen)Basisstrom  $I_B$  auf. Entsprechend den drei Anschlüssen des Flächentransistors unterscheidet man zwischen Basis-, Emitter- und Kollektorschaltung.



**Bild 11-15** Grundschatungen des Transistors:  
a) Basis-, b) Emitter-, c) Kollektorschaltung.  
(Die Spannungspfeile zeigen von plus nach minus.)



**Bild 11-16** Kennlinien eines Flächentransistors:  
a) Basisschaltung  
b) Emitterschaltung

### Basisschaltung

Bei der Basisschaltung Bild 11-16a) liegt am Eingang zwischen Emitter und Basis eine Spannung von etwa  $U_{EB} \approx 0,7$  V. Dieser Wert entspricht der Durchlassspannung einer Diode Bild 11-11) Bei npn-Transistoren fließen die Elektronen vom Emitter zur Basis, wo eine Auftei-

lung in den kleinen Basisstrom  $I_B$  und den größeren Kollektorstrom  $I_C$  stattfindet. Emitter- und Kollektorstrom  $I_E$  und  $I_C$  sind nahezu gleich, es gilt für die Stromverstärkung  $A$ :

$$A = \frac{I_C}{I_E} \approx 0,9 \text{ bis } 0,995. \quad \text{Stromverstärkung } A \quad (1.13)$$

Eine Verstärkung der Spannung kommt dadurch zustande, dass ein kleiner Eingangs- und ein großer Ausgangswiderstand von praktisch dem gleichen Strom durchflossen werden. Die Spannung am Ausgang  $U_{CB}$  ist wesentlich größer als die Eingangsspannung  $U_{EB}$ , da  $U_{CB}$  in Sperrrichtung geschaltet ist. Es tritt eine Spannungsverstärkung zwischen 100 und 1000 auf, vorausgesetzt dass eine entsprechend hohe Netzspannung anliegt. Der Transistor in Basisschaltung arbeitet somit als Spannungs- oder als Leistungsverstärker. Bei nahezu konstantem Strom ist die Leistung proportional zur Spannung ( $P = UI$ )

Bild 11-16a stellt die Kennlinien eines Transistors in Basisschaltung dar. Der rechte obere Quadrant zeigt, dass der Kollektorstrom  $I_C$  von der angelegten Spannung  $U_{CB}$  unbeeinflusst ist. Er hängt nur vom Emitterstrom  $I_E$  ab und ist diesem etwa gleich, wie es auch im oberen linken Quadranten ersichtlich ist. Die Eigenschaften des Eingangs werden durch die Diodenkennlinie des Emitter- Basis-Übergangs charakterisiert, wie es im unteren linken Quadranten zu sehen ist. Die Eingangsspannung kann nur in sehr engen Grenzen um 0,7 V variieren.

### Emitterschaltung

Häufig wird die Emitterschaltung nach Bild 11-15b eingesetzt. Der Emitterstrom  $I_E$ , der etwa gleich dem Kollektorstrom  $I_C$  ist, wird durch den kleinen Basisstrom  $I_B$  gesteuert. Als Stromverstärkung  $B$  wird das Verhältnis  $I_C / I_B$  bezeichnet. Mit  $I_B = I_E - I_C$  folgt daraus:

$$B = \frac{I_C}{I_B} = \frac{A}{1-A} \approx 10 \text{ bis } 200. \quad \text{Stromverstärkung } B \quad (1.14)$$

Die angegebenen Werte für  $B$  berechnen sich aus  $A = 0,9$  bis  $0,995$  (1.13). Die Emitterschaltung liefert eine Strom- und Spannungsverstärkung. Sie ist universell zum Verstärken von Strom, Spannung und Leistung einsetzbar.

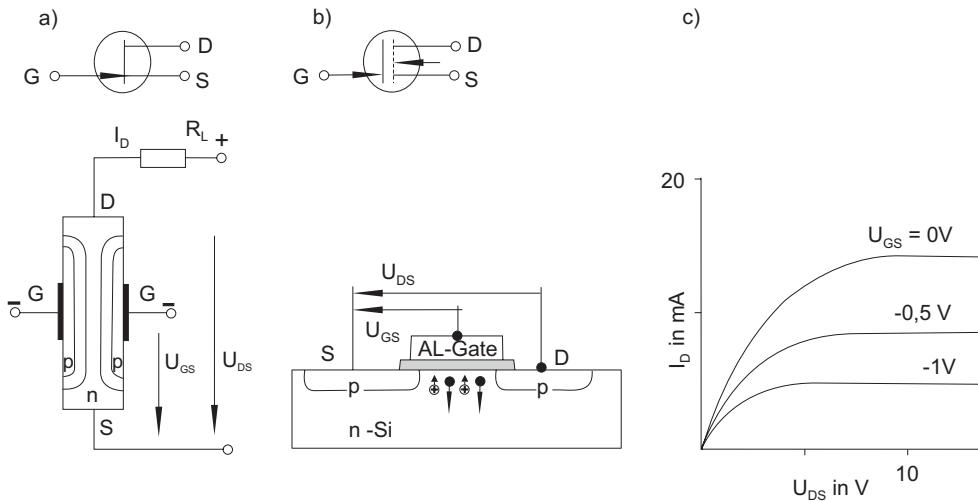
Die Kennlinien sind aus Bild 11-16b ersichtlich. Sie ähneln den Linien der Basisschaltung, wenn man Emitter und Basis wechselseitig austauscht. Der Kollektorstrom  $I_C$  ist weitgehend unabhängig von der angelegten Spannung  $U_{CE}$ . Eingangsstrom  $I_B$  und -spannung  $U_{BE}$  entsprechen der Diodenkennlinie des Basis-Emitter-Überganges. Der Kollektorstrom  $I_C$  ist etwa 100-mal größer als der Basisstrom  $I_B$  und hängt näherungsweise linear von diesem ab.

### Kollektorschaltung

Die Kollektorschaltung nach Bild 11-15c zeichnet sich durch einen sehr hohen Eingangswiderstand aus. Dies liegt daran, dass sich der Eingang an der Basis-Kollektor-Diode befindet, die in Sperrrichtung geschaltet wird. Die Schaltung wird als Impedanzwandler eingesetzt, eine Spannungsverstärkung tritt nicht auf.

### Feldeffekttransistoren

Die bisher beschriebenen Transistoren sind bipolar, d. h. es treten zwei Ladungsträger auf: Elektronen und positive Löcher. Bei unipolaren oder Feldeffekttransistoren (FET) gibt es nur eine Art Ladungsträger: Elektronen bei Vorliege n eines n-Kanals oder positive Löcher beim p-Kanal.



**Bild 11-17** Aufbau und Eigenschaften von Feldeffektransistoren G =Gate, Steuerelektrode, S =Source, D =Drain) a)Sperrsicht FET b)MOS-FET c)Kennlinie von a)

### Sperrsicht-FET

Die Wirkungsweise eines Sperrsicht-FET zeigt Bild 11-17a. Eine längliche Struktur aus n-leitendem Material wird von zwei Seiten durch je ein p-leitendes Gebiet begrenzt. In Längsrichtung legt man eine Spannung  $U_{DS}$  an. Elektronen wandern vom Minuspol, Source genannt, zum Pluspol, dem Drain. Legt man an die seitlichen p-Bereiche, die als Gate bezeichnet werden, eine negative Spannung, so sind die seitlichen pn-Übergänge in Sperrrichtung geschaltet. Es entsteht im n-Bereich eine von Ladungsträgern freie Raumladungszone. Die Größe dieser Zone steigt mit wachsender Sperrspannung  $U_{GS}$ . Dadurch wird der leitende n-Bereich steuerbar eingeengt. Das elektrische Feld in den seitlichen pn-Übergängen steuert somit den Strom durch den n-Kanal. Die Kennlinien eines Sperrsicht-FET zeigt Bild 11-17c. Entsprechend den drei Anschlüssen des FET gibt es drei Schaltungsarten, wie bei den Bipolartransistoren.

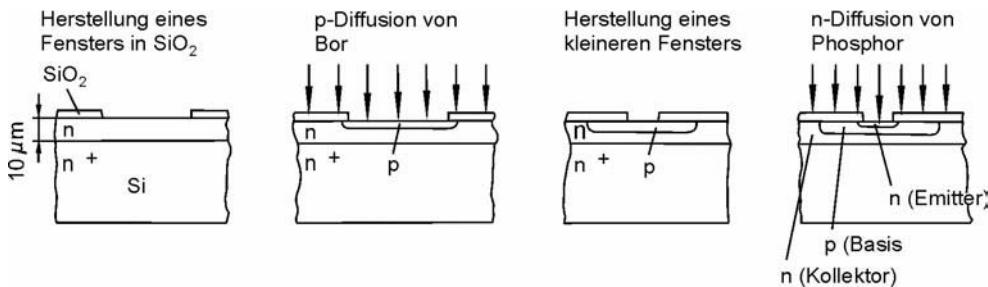
Häufig haben Feldeffekttransistoren vier Anschlüsse. Außer Source (S) (Quelle) Drain (D) (Senke) und Gate (G) gibt es noch einen Anschluss, der mit dem Substrat verbunden ist und Bulk (B) genannt wird. Für das Funktionsprinzip hat dieser Anschluss wenig Bedeutung und er ist häufig mit dem Gate verbunden.

### MOS-FET

Während Sperrsicht-FETs zur Verstärkung analoger Signale eingesetzt werden, haben sich in der Digitalelektronik und bei integrierten Bauelementen MOS-FET (Metal Oxide Semiconductor) durchgesetzt. Der Aufbau in Bild 11-17b geht von einem n-Substrat aus, bei dem ohne Gatespannung kein Strom zwischen Source und Drain fließt. Beim Anlegen einer negativen Steuerspannung werden die Elektronen vom Gate weggedrängt und es kann ein Strom fließen. Das Prinzip ist dem normalen FET ähnlich.

Es gibt Ausführungen in p-MOS und n-MOS mit einem Gate aus Aluminium oder Silizium. Die Isolierschicht zwischen der Gate-Elektrode und dem Substrat wird aus Al- oder Si-Oxid gebildet, woraus sich der Name MOS erklärt. In der C-MOS-Technik, C =complementary komplementär befinden sich p- und n-MOS auf einem Substrat. Die MOS-Technik zeichnet sich durch einen hohen Eingangswiderstand von etwa  $10^{12} \Omega$  aus und erlaubt dadurch eine nahezu verlustlose Steuerung des Stromes  $I_D$ .

Die Schaltbilder von MOS-FET's enthalten meist auch einen Bulk-Anschluss an das Substrat. Man unterscheidet selbstleitende (Verarmungstyp p) oder selbstsperrende (Anreicherungstyp) MOS-FET's. Die bedeutet, dass die Bauelemente ohne Anlegen einer Steuerspannung  $U_{GS}$  entweder leiten oder sperren. Weiterhin unterscheidet man zwischen n- und p-Kanal.



**Bild 11-18** Herstellung integrierter Schaltungen in Bipolartechnik

**Beispiel 11.3.1a** Warum wird bei Transistoren meist die Stromverstärkung angegeben?

Dies liegt daran, dass ein Transistor im Wesentlichen ein Stromverstärker ist und durch Ströme gesteuert wird. Die Verstärkung der Spannung hängt von den Widerständen der Schaltung ab.

**Beispiel 11.3.1b** Begründen Sie ohne Rechnung, warum die Stromverstärkung in Basisschaltung etwa gleich 1 ist Bild 11-15a)

Der Basisstrom ist sehr klein gegenüber den anderen Strömen. Daher ist der Emitterstrom etwa gleichem Kollektorstrom.

**Beispiel 11.3.1c** Begründen Sie ohne Rechnung, warum die Kollektorschaltung die Spannungsverstärkung von etwa 1 liefert Bild 11-15c) Warum ist der Eingangswiderstand sehr groß?

*Spannungsverstärkung:* Die Basis-Emitter-Diode ist in Durchlassrichtung geschaltet.

Damit ist die Spannung dieser Diode sehr klein und die Spannung am Ausgang ist etwa so groß wie am Eingang.

*Eingangswiderstand:* Die Basis-Kollektor-Diode ist in Sperrrichtung geschaltet.

**Beispiel 11.3.1d** Warum sagt man, dass ein Feldeffekttransistor (FET) unipolar ist? Beschreiben Sie den Aufbau eines FET.

Normale Transistoren arbeiten mit n- und p-Leitung. Der FET dagegen hat nur eine Sorte von Ladungsträgern. Beschreibung des Aufbaus: siehe Abschnitt Sperrschiicht-FET.

**Beispiel 11.3.1e** Was bedeutet die Abkürzung MOS-FET? Beschreiben Sie den Aufbau.

MOS-FET = Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor. Aufbau: Si ehe Abschnitt MOS-FET.

## 11.3.2 Integrierte Schaltungen

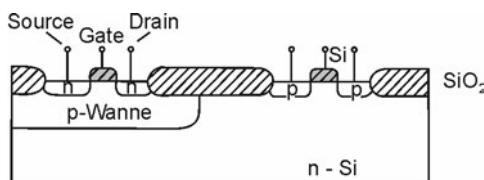
Auf einem Substrat können eine Vielzahl von Bauelementen in einem Fertigungsprozess hergestellt werden, z. B. Transistoren, Widerstände und Kondensatoren. In den integrierten Schaltkreisen (Integrated Circuits ICs) sind komplexe Schaltungen auf einem Chip erhältlich.

## Bipolarechnik

Die Herstellung von integrierten Schaltungen umfasst verschiedene Prozessschritte, die in Bild 11-18 an einem npn-Transistor aufgezeigt werden. In der planaren Bipolarechnik kann von einem hochdotierten n-Silizium-Einkristall von etwa 75 mm Durchmesser ausgegangen werden, auf denen hunderte von IC's Platz haben. Durch Epitaxie, d. h. Aufwachsen einer dünnen kristallinen Schicht aus der Gasphase, wird n-dotiertes Si von etwa 10  $\mu\text{m}$  Dicke aufgebracht. Sie bildet den Kollektor. Daraufhin wird durch Oxidation eine 2  $\mu\text{m}$  dicke Isolierschicht aus  $\text{SiO}_2$  erzeugt und ein Photolack aufgetragen. Die Stellen, die im nächsten Schritt weggeätzt werden, werden mit Hilfe einer präzisen Maskentechnik belichtet. Nach dem Ätzen entsteht ein Fenster, durch das Bor diffundiert und einen p-dotierten Bereich erzeugt. Es handelt sich um die Basis. In einer zweiten Oxidation, mit Auftragung von Photolack, Belichten und Ätzen wird ein kleineres Fenster produziert. Durch Diffusion von Phosphor entsteht die n-leitende Emitterzone. Anschließend folgen mehrere Prozessschritte mit Oxidation, Ätzung und Metallierung zur Kontaktierung und zur Herstellung von Leiterbahnen. Nicht erwähnt wurde die Herstellung der Isolation des Transistors gegenüber benachbarten Elementen. Die beschriebenen Prozessschritte sind modellhaft zu verstehen, moderne Verfahren gehen mehrere unterschiedliche Wege.

## CMOS

Bei der CMOS-Technik stellt man p- und n-Kanal Transistoren auf einem Substrat her. Es wird von einer Si-Scheibe ausgegangen, die beispielsweise n-dotiert ist. Für die n-Transistoren werden durch Ionenimplantation p-Wannen erzeugt (Bild 11-19). Die weiteren Prozessschritte bestehen aus Oxidation, photolithographischen Vorgängen, Ätzen, Dotieren und Aufbringen von Materialien.



**Bild 11-19**  
Aufbau integrierter Schaltungen  
in CMOS p-Wannentechnik)

### 11.3.3 Optoelektronik

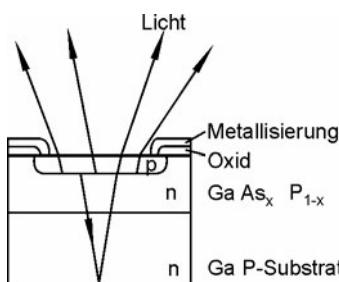
Die Optoelektronik befasst sich mit der Umwandlung optischer Signale in elektrische und umgekehrt. Wichtige Anwendungsgebiete liegen in der Fernsehtechnik, Informationstechnik Elektronik, Laser- und Energietechnik (Solarenergie). Die in terdisziplinären Anwendungen optischer Verfahren in diesen Gebieten werden unter dem Begriff *Photonik* zusammengefasst.

## Leuchtdioden

Lumineszenz- oder Leuchtdioden, als LED (Light Emitting Diode) abgekürzt, bestehen aus einem pn-Übergang, der in Durchflussrichtung geschaltet wird. Elektronen fließen ins p- und positive Löcher ins n-Gebiet. Im Bereich des Überganges können Elektronen und Löcher rekombinieren. Bei Leuchtdioden geschieht dies durch Aussendung von Licht (Bild 11-20). Die Energie  $hf$  der Lichtquanten ist durch die Energie des Bandabstandes  $E_g$  gegeben. Damit gilt für die Wellenlänge  $\lambda$ , wobei  $h$  das Planck'sche Wirkungsquantum und  $c_0$  die Lichtgeschwindigkeit sind:

$$hf = E_g \quad (h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Js}) \text{ und } \lambda = \frac{hc_0}{E_g}. \quad \text{Wellenlänge } \lambda \quad (1.15)$$

Die Wellenlänge  $\lambda$  (oder die Farbe) der LED kann je nach Bandabstand des Halbleiters zwischen infrarot und blau liegen. Oft werden Kristalle vom Typ  $\text{Ga}_x\text{As}_{1-x}\text{P}$  eingesetzt. Je nach Mischungsverhältnis beträgt der Bandabstand zwischen 2,2 eV ( $\lambda=0,55 \mu\text{m}$ ) und 1,4 eV ( $\lambda=0,88 \mu\text{m}$ ). Die Rekombination durch Strahlung tritt nur bei Halbleitern mit so genanntem direktem Übergang auf. Si und Ge weisen indirekte Übergänge auf; eine Rekombination durch Emission eines Quants ist nicht möglich. Bei derartigen Übergängen entsteht Wärme und nicht Licht.



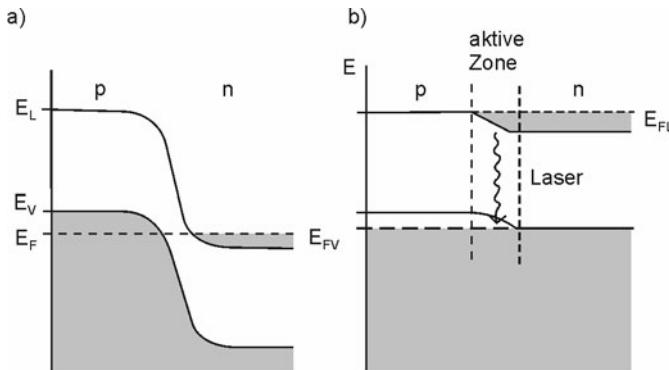
**Bild 11-20**  
Aufbau einer Leuchtdiode

### Halbleiterlaser

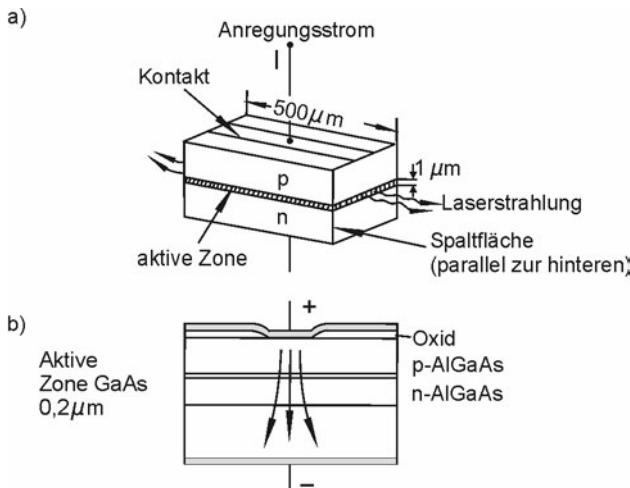
Bei sehr hoher p- oder n-Dotierung rückt das Fermi-Niveau in das Leitungs- oder Valenzband und man bezeichnet diese Halbleiter als *entartet*. Bei GaAs beträgt die erforderliche Konzentration der Fremdatome etwa  $10^{19}/\text{cm}^3$ . Bild 11-21a stellt das Energieband einer Diode aus einer entarteten p- und n-Schicht dar. Schaltet man die Diode in Durchlassrichtung (Bild 11-21b) entsteht in der pn-Übergangszone eine Inversion; im gelben Volumenbereich ist der obere Zustand stärker besetzt als der untere. Dies ist eine der Voraussetzungen für die gesteuerte Emission beim Laser (Abschnitt 9.3.1).

Bild 11-22a zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Halbleiterlasers, auch Laserdiode genannt. Es handelt sich um einen hochdotierten pn-Übergang in GaAs mit einer Inversion beim Anlegen einer Durchlassspannung. Bei einem ausreichenden Strom (ca. 50 mA) überwiegt die gesteuerte Emission über die spontane und es kann eine Lichtverstärkung in einer dünnen aktiven Zone entstehen. Durch Anbringen von Spiegeln an den Endflächen wird eine Rückkopplung erreicht und es tritt Lasertätigkeit auf. Die seitlichen Flächen sind optisch rau, so dass quer zur Schicht eine Rückkopplung unterbleibt. Die spiegelnde Wirkung der Endflächen wird oft allein durch die hohe Brechzahl von  $n_2 = 3,6$  von GaAs erreicht. Man berechnet daraus für den Reflexionsgrad  $R$  an Luft mit  $n_1 = 1$ :  $R = (n_1 - n_2) / (n_1 + n_2)^2 = 0,32$ . Dieser Wert reicht bei vielen Halbleiterlasern für ein Anschwingen aus.

Der Aufbau nach Bild 11-22a hat den Nachteil, dass die Strahlung auch seitlich in die Bereiche außerhalb der pn-Schicht dringt. Derartige Verluste können reduziert werden, wenn die Brechzahl durch zusätzliche dünne Al-dotierte Schichten seitlich des pn-Überganges verringert wird ( $\Delta n/n \approx 5\%$ ). Dadurch tritt Totalreflexion auf und die Strahlung bleibt in der aktiven Zone. Derartige Laser mit Heterostruktur zeigen Wirkungsgrade um 50 %. Zusätzlich kann durch die Form der Elektrode der Strom streifenförmig geführt werden (Bild 11-22b).



**Bild 11-21** Energiebänder beim Halbleiterlaser:  
a)pn-Übergang ohne äußere Spannung.  
b)Erzeugung einer Inversion durch Anlegen einer Durchflussspannung



**Bild 11-22** Aufbau von Halbleiterlasern:  
a) Prinzipieller Aufbau.  
b) Laser mit Heterostrukturen: durch Dotieren mit Al wird die Brechzahl seitlich der aktiven Zonen verringert, so dass eine Wellenleitung entsteht.

Für optische Speicher und in der Nachrichtentechnik werden häufig GaAlAs-Laser mit unterschiedlichen Mischungsverhältnissen eingesetzt, mit Wellenlängen im roten bis nahen infraroten Bereich (Tabelle 11.5) Für die Übertragung durch Glasfasern weist die Strahlung der InGaAsP-Laser im Bereich um  $1,3\mu m$  geringere Verluste auf. Zahlreiche andere Typen von Halbleiterlasern sind in der Entwicklung.

Da die Querschnitte der aktiven Zonen bei Halbleiterlasern in der Größenordnung der Lichtwellenlänge  $\lambda$  liegen, tritt die Strahlung aufgrund der Beugung unter einem hohen Divergenzwinkel  $\theta$  aus. Als Abschätzung kann die Gleichung

$$\theta = \frac{\lambda}{d} [\theta]_{\text{rad}} \quad \text{Divergenzwinkel } \theta \quad (1.17)$$

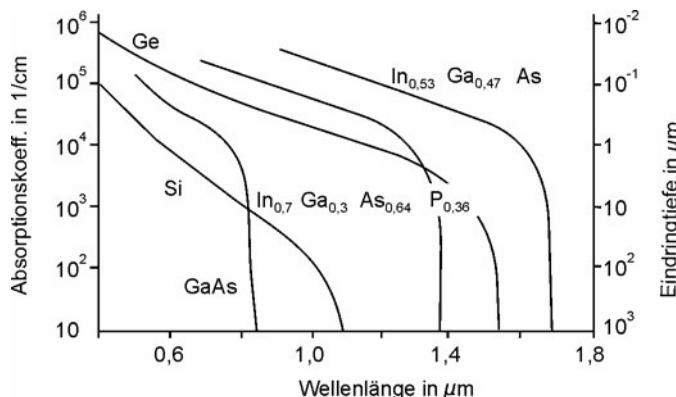
dienen, wobei  $d$  die Schichtdicke angibt. Typische Werte sind  $\theta \approx \pm 40^\circ$ . Die Divergenz kann durch Einsatz von Linsen auf das bei Lasern übliche Maß von etwa 1 mrad reduziert werden, was bei normalen Lichtquellen nicht möglich ist. Die mittlere Leistung von Halbleiterlasern beträgt mehrere mW. Durch monolithische Laserarrays können mehrere W erzeugt werden.

**Tabelle 11.5** Halbleiterlaser

Material	GaAlAs	InGaAsP/InGaP	InGaAsP	Bleisalze
Wellenlänge in $\mu\text{m}$	0,69 - 0,87	0,6 - 0,7	0,92 - 1,65	4 - 40

### Photodetektoren

Beim Eindringen von Strahlung in Festkörper können durch den inneren Fotoeffekt freie Elektronen entstehen (Abschnitt 10.1.2). Dadurch ist der Nachweis von Licht mit Halbleitern möglich. Bild 11-23 zeigt den Absorptionskoeffizienten verschiedener Halbleiter, der die Bandstruktur widerspiegelt. Photonen müssen eine Mindestenergie aufweisen, damit sie Elektronen aus dem Valenz- in das Leitungsband heben können. Damit verbunden ist eine maximale Wellenlänge, oberhalb welcher der Absorptionskoeffizient stark abfällt.



**Bild 11-23**  
Absorptionsverhalten verschiedener Halbleiter für Photodioden. Die obere Grenzwellenlänge spiegelt die Breite der verbotenen Zone wider.

### Photowiderstände

Bei Fotowiderständen führen die durch den Photoeffekt erzeugten Elektronen zu einer Änderung des elektrischen Widerstandes. Derartige Bauelemente werden hauptsächlich zum Nachweis infraroter Strahlung im  $\mu\text{m}$ -Bereich eingesetzt. Beispiele sind PbS oder Germanium mit verschiedenen Dotierungen, wie GeZn.

### Photodioden

Unterhalb von etwa 1,5  $\mu\text{m}$  werden zum Nachweis von Strahlung Photodioden eingesetzt, insbesondere aus Si und Ge (Bild 11-23). Wird ein pn-Übergang mit Licht bestrahlt, werden die in der Raumladungszone erzeugten freien Elektronen durch das vorhandene elektrische Feld getrennt (Bild 11-24). Die Ladungstrennung erfolgt auch ohne äußere Spannung. Wird die Diode mit einem hochohmigen Lastwiderstand oder offen betrieben, lädt sich die p-Seite positiv und die n-Seite negativ auf. An den Enden wird die Leerlaufspannung  $U_L$  gemessen,

die kleiner als die Diffusionsspannung  $U_D$  ist. Bei kurzgeschlossener Photodiode fließt der Kurzschlussstrom  $I_K$ , der proportional zur eingestrahlten Intensität  $E$  des Lichtes ist. Die Kennlinie einer Photodiode zeigt Bild 11-25; ohne Bestrahlung erhält man den Verlauf einer üblichen Diode.

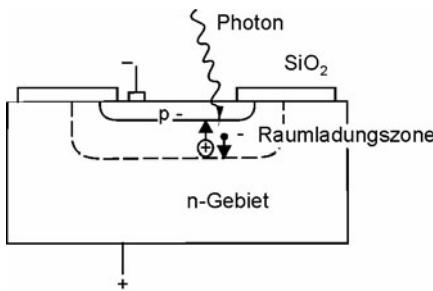


Bild 11-24 Aufbau einer Photodiode

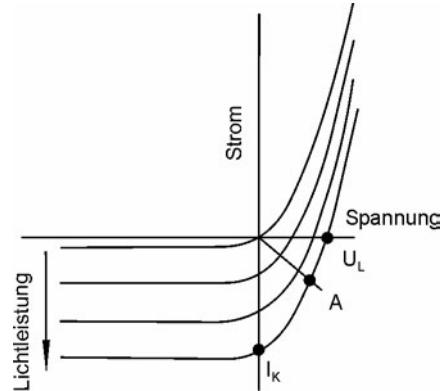


Bild 11-25 Kennlinie einer Photodiode

Bei der Anwendung als Photodetektor oder Lichtmessgerät schaltet man eine Photodiode in Sperrichtung mit einem Widerstand zwischen Spannungsquelle und Diode. An dem Widerstand wird eine Spannung gemessen, die dem Photostrom proportional ist. Man befindet sich im unteren linken Quadranten der Kennlinie und erhält ein Signal, das proportional zur Bestrahlungsstärke ist. Ohne äußere Spannungsquelle wird die Diode als Solarzelle betrieben. Der Strom fließt durch einen äußeren Widerstand  $R$ . Der Arbeitspunkt A ist der Schnittpunkt zwischen der Widerstandsgeraden  $I = U/R$  und der Diodenkennlinie. Gegenwärtig arbeiten Solarzellen mit einem Wirkungsgrad von etwa 10 %. Das bedeutet, dass bei Bestrahlung durch die Sonne mit  $E \approx 1 \text{ kW/m}^2$  eine elektrische Leistung von  $100 \text{ W/m}^2$  erzeugt werden kann.

### PIN-Photodioden

Zur Vergrößerung des empfindlichen Volumens wird bei PIN-Photodioden ein hochohmiger Bereich zwischen die p- und n-Schicht eingebaut. Es handelt sich um eine undotierte Schicht mit Eigenleitung (englisch: intrinsic). Die Schichtfolge ist also p, intrinsic, n, woraus sich die Abkürzung PIN erklärt. Diese Dioden zeichnen sich durch kurze Schaltzeiten ( $\leq 1 \text{ ns}$ ) und eine hohe Empfindlichkeit aus.

### Phototransistor

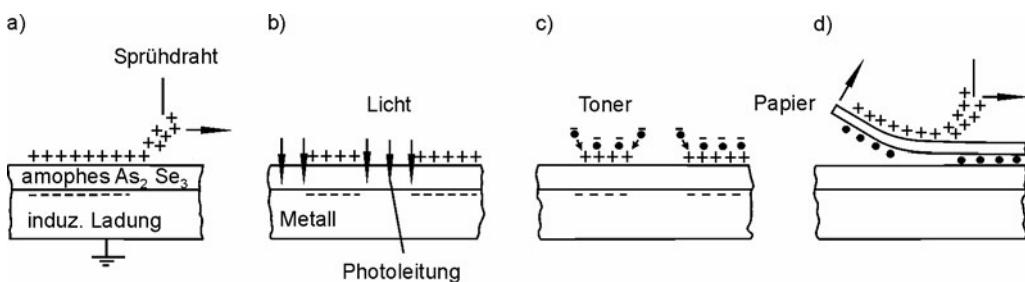
Der Phototransistor stellt einen Detektor mit innerer Verstärkung dar. Sie werden in der Messtechnik dann eingesetzt, wenn die Frequenzen der Signale unterhalb von 100 kHz liegen.

### CCD-Kamera

Ein einzelnes aktives Element, ein Pixel, eines CCD-Bildsensors hat eine Größe von etwa  $10 \times 10 \mu\text{m}^2$ . Diese Elemente werden linear oder flächenartig angeordnet und arbeiten so als Fernsehkamera. Der Aufbau der lichtempfindlichen Elemente erfolgt in MOS-Technik.

### Kopierer und Laserdrucker

Eine Anwendung der Photoleitung stellt der Photokopierer oder Laserdrucker dar. Auf einer leitenden Unterlage wird ein amorpher Photoleiter, z. B.  $\text{As}_2\text{Se}_3$ , als dünne Schicht aufgetragen Bild 11-26) Vor dem Druckvorgang wird diese Schicht durch einen Sprühdraht, der aufgrund seiner hohen Spannung eine Entladung erzeugt, positiv aufgeladen. Bei der Belichtung, beim Kopierer durch eine optische Abbildung des Originals, fließen die Ladungen an den hellen Stellen ab. Auf dem Photoleiter entsteht ein Ladungsbild. Tonerteilchen werden durch das elektrische Feld an den geladenen unbelichteten Stellen angezogen und beim Druckvorgang auf das Papier übertragen. Ähnlich arbeitet der Laserdrucker, bei dem die Belichtung durch einen schreibenden Laserstrahl erfolgt.



**Bild 11-26** Prinzip eines Photokopierers:

- Aufsprühen der Ladung
- Belichtung und Abfließen der Ladungen an den hellen Stellen, Entstehung eines Ladungsbildes
- Aufbringen des Toners
- Übertragen des Toners auf das Papier

**Beispiel 11.3.3a** Was ist der Unterschied zwischen einer Leuchtdiode und einem Halbleiterlaser?

Beim Laser muss eine Inversion auftreten, d.h. Bereiche im Leitungsband müssen stärker mit Elektronen besetzt sein als Bereiche im Valenzband Bild 11-21b) Dies wird durch eine starke Dotierung erreicht, so dass das Fermi niveau in das Leitungs- und Valenzband rückt.

**Beispiel 11.3.3b** Wie groß ist der Divergenzwinkel der Laserstrahlung aus einem Halbleiterlaser mit einer Dicke der aktiven Schicht von  $d = 1 \mu\text{m}$  bei einer Wellenlänge von  $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$ .

Nach (1.17) gilt:  $\theta = \lambda / d \approx 6^\circ$  Eine Linse macht die Strahlung parallel.)

**Beispiel 11.3.3c** Warum gibt es keine Photodioden für  $\lambda > 1,5 \mu\text{m}$ .

Werden die Dioden in Durchlass- oder Sperrrichtung geschaltet?

Der Bandabstand der Halbleiter für die Dioden ist zu groß. Die Dioden werden in Sperrrichtung geschaltet.

**Beispiel 11.3.3d** Welche Photodetektoren können für  $\lambda > 1,5 \mu\text{m}$  eingesetzt werden.

Es können Photowiderstände verwendet werden.

**Beispiel 11.3.3e** Was ist der Vorteil einer PIN-Photodiode gegenüber einer normalen Photodiode?

Die empfindliche Schichtdicke ist größer, so dass nahezu jedes Photon ein Elektron erzeugt.

## 12 Kernphysik

Wesentliche Abläufe des Lebens und der Technik spielen sich in der Atomhülle ab: biologische und chemische Prozesse, elektromagnetische Phänomene oder optische Vorgänge. Reaktionen im Atomkern bestimmen den Aufbau des Weltalls und die Kerntechnik. Sie sind mit der Radioaktivität verbunden. Die auftretenden Energien in einer Kernreaktion liegen im MeV-Bereich; sie übersteigen die entsprechenden Werte in der Hülle von einigen eV ( $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ )

### 12.1 Struktur der Atomkerne

#### 12.1.1 Kernteilchen

Der Kern ist aus *Nukleonen*, d. h. Protonen und Neutronen, aufgebaut. Nach den Erkenntnissen der letzten Jahre bestehen die Nukleonen aus jeweils drei Quarks. Im Kern treten das u-Quark ( $\uparrow$  wie up) mit der Ladung  $Q = 2/3e$  und das d-Quark ( $\downarrow$  wie down) mit  $Q = 1/3e$  auf. Das *Proton* ( $p$ ) besteht aus zwei u- und einem d-Quark, beim *Neutron* ( $n$ ) wird u und d vertauscht:

$p = \bar{u} \uparrow u \downarrow d$ und $n = \bar{d} \downarrow d \uparrow u$ .	Quarks	<b>(12.1)</b>
-----------------------------------------------------------------------------------	--------	---------------

Das Proton trägt also die Elementarladung  $e_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  und das Neutron ist ungeladen (siehe Abschnitt 10.1.1). Die Protonenzahl  $Z$  im Kern ist identisch mit der Zahl der Elektronen der Atomhülle. Sie gibt das Element im Periodensystem an, man nennt sie daher auch *Ordnungszahl*. Die Nukleonenzahl oder *Massenzahl*  $A$  setzt sich aus  $Z$  und der Neutronenzahl  $N$  zusammen (10.6)

$$A = Z + N.$$

#### Isotope

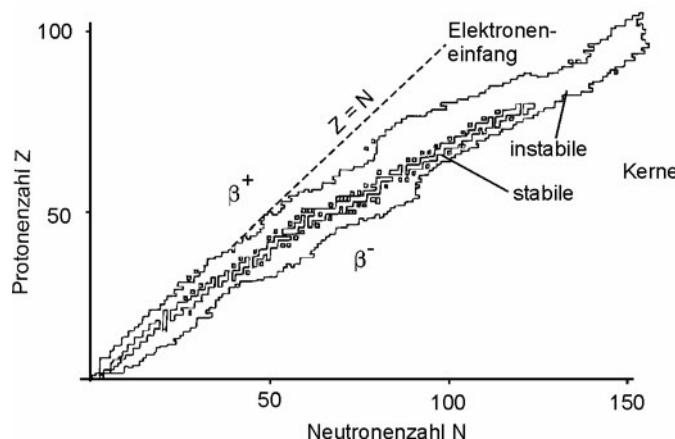
Eine Atomart oder ein *Nuklid* wird durch den entsprechenden Wert von  $Z$  und  $A$  wie folgt charakterisiert:

$${}^A_Z \text{Nuklid} \quad \text{z. B. } {}^4_2 \text{He}, \quad {}^{238}_{92} \text{U}.$$

Es gibt etwa 270 stabile Nuklide und über 2000 instabile, die sich durch radioaktiven Zerfall in stabile Nuklide umwandeln. Dagegen existieren nur 92 stabile chemische Elemente. Nuklide zu einem Element bezeichnet man als *Isotope*, die gleiche Protonenzahl  $Z$  aber unterschiedliche Neutronenzahl  $N$  aufweisen. Bei Isotopen sind die Atomhüllen gleich, jedoch besitzen die Atomkerne durch den Einbau von Neutronen eine andere Massenzahl  $A$ . Bei Wasserstoff und Uran sind folgende Isotope von Bedeutung:

$${}^1_1 \text{H}, \quad {}^2_1 \text{H} (\text{Deuterium}) \quad {}^3_1 \text{H} (\text{Tritium}) \quad \text{und} \quad {}^{235}_{92} \text{U}, \quad {}^{238}_{92} \text{U}.$$

In Bild 12-1 sind alle Nuklide in einem  $Z$ - $N$ -Diagramm dargestellt. Kerne mit gleicher Protonenzahl  $Z$ , also Isotope, befinden sich auf einer waagerechten Linie. Bei den meisten Kernen überwiegt die Zahl der Neutronen  $N$ , d. h. sie liegen unterhalb der  $45^\circ$ -Geraden. Die Neutronen vergrößern den Abstand zwischen den geladenen Protonen und verhindern damit, dass der Kern durch die elektrostatische Abstoßung gleichartiger Ladungen auseinander fliegt.



**Bild 12-1**  
Darstellung der stabilen und instabilen Nuklide

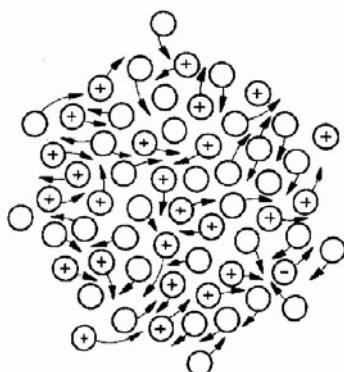
### Kernmodell

Der Kernradius  $r$  hängt von der Massenzahl  $A$  ab (10.2)

$$r = 1,4 \cdot 10^{-15} \sqrt{A} \text{ m.}$$

Kernradius

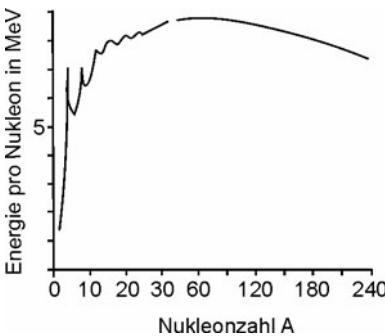
Für  $A=1$  erhält man  $r=1,4 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ . Dieser Wert stimmt ziemlich genau mit dem Nukleonradius für Proton und Neutron überein. Der Kern ist also dicht aus Nukleonen zusammengesetzt, die nach Bild 12-2 in heftiger Bewegung sind. Der Zusammenhalt der Kerne wird durch die *Kernkräfte* verursacht. Sie besitzen eine sehr kurze Reichweite, so dass sie nur bis zum Kernrand wirken.



**Bild 12-2**  
Dynamische Struktur eines Atomkerns

### Bindungsenergie und Kernmasse

Bei der Bildung von Molekülen aus Atomen wird Energie frei, die *Bindungsenergie*. Ähnlich ist es beim Zusammenbau der Kerne aus den Nukleonen. Die mittlere Bindungsenergie je Nukleon stellt Bild 12-3 dar. In leichten Kernen ist die Bindung relativ schwach, die Energie je Nukleon erreicht ein Maximum bei mittleren Massenzahlen  $A$ . Daraus ergibt sich die Möglichkeiten der Energiegewinnung durch die Verschmelzung leichter oder die Spaltung schwerer Kerne.

**Bild 12-3**

Bindungsenergie je Nukleon  $E_B/A$   
in Abhängigkeit der Massenzahl  $A$

Die Relativitätstheorie zeigt die Äquivalenz von Masse  $m$  und Energie  $E = mc_0^2$  (10.10) Daraus folgt, dass die Freisetzung der Bindungsenergie  $E_B$  beim Aufbau der Kerne mit einem Massenverlust  $\Delta m$  verbunden ist. Die Kernmasse  $m$  ist also stets etwas geringer als die Summe von  $Z$  Protonenmassen  $m_P$  und  $N$  Neutronenmassen  $m_N$ :

$$m = Zm_P + Nm_N - \Delta m \quad \text{mit} \quad \Delta mc_0^2 = E_B . \quad \text{Massendefekt } \Delta m \quad (12.2)$$

In Massenspektrometern Bild 8-33) kann die Kernmasse  $m$  genau vermessen und daraus die Bindungsenergie  $E_B$  ermittelt werden Bild 12-3)

Als *atomare Masseneinheit u* wurde die Masse des  $^{12}\text{C}$ -Atoms  $m(^{12}\text{C})$  zugrunde gelegt:

$$1 \text{ u} = m_u = \frac{1}{12} m(^{12}\text{C}) = 66056 \cdot 10^{-27} \text{ kg} . \quad \text{Atomare Masseneinheit } u \quad (12.3)$$

Wegen der Bindungsenergie und des resultierenden Massendefekts weichen die Masseneinheiten  $u$  von Atomen um etwa 1 % von ganzen Zahlen ab.

**Beispiel 12.1.1a** Welchen Durchmesser hat der Kern eines Bleiatoms?

Der Durchmesser beträgt:  $2r = 1,4 \cdot 10^{-15} \sqrt{A} \text{ m} = 17 \cdot 10^{-15} \text{ m}$  ( $A = 207$ , Tab. 10.1)

**Beispiel 12.1.1b** Was bedeuten die Ziffern:  $^{27}_{13}\text{Al}$  ?

Der Aluminiumkern hat 27 Protonen und Neutronen (Nukleonenzahl) sowie 13 Protonen (Ordnungszahl). Die Neutronenzahl ist also 14. Die Atomhülle besitzt 13 Elektronen.)

**Beispiel 12.1.1c** Wie hoch ist die Dichte im Atomkern.

Welche Masse besitzt ein Neutronenstern mit  $R = 0$  km Radius?

Dichte: Die Kernmasse beträgt:  $m = Am_u = A \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ . Kernradius  $r$  und Kervolumen  $V$  ergeben sich zu:  $r = 1,4 \cdot 10^{-15} \sqrt{A} \text{ m}$ ,  $V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (1,4 \cdot 10^{-15})^3 \text{ m}^3$ . Damit wird die Kerndichte:  $\rho = m/V = 1,4 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$ .

Neutronenstern: Masse  $M = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = 1,4 \cdot 10^{17} \text{ kg} \cdot \frac{4}{3} \pi (1,4 \cdot 10^{-15})^3 \text{ m}^3 = 3,5 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$  (3.000 mal Erdmasse)

**Beispiel 12.1.1d** Wie groß ist die Bindungsenergie des Kerns  $^{27}_{13}\text{Al}$  (aus Tab. 10.1: 26,98  $m_u$ )

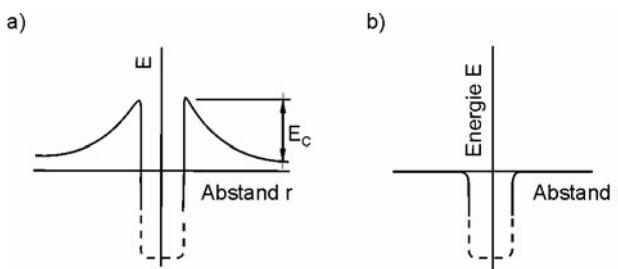
Der Massendefekt beträgt (12.2)  $\Delta m = 13m_P + 14m_N - 26,98m_u = 3,9 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$ . Daraus erhält man die Bindungsenergie:  $E_B = \Delta mc_0^2 = 3,5 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 220 \text{ MeV}$ , d.h. 8,1 MeV je Nukleon.

## 12.1.2 Kernniveaus

### Kernkräfte

Die Protonen und Neutronen werden im Atomkern durch die *starke Wechselwirkung* zusammengehalten. Die Reichweite dieser Kräfte ist sehr gering. Sie wirken nur innerhalb des Kerns und überwinden dort die abstoßenden Coulomb-Kräfte der positiven Protonen.

Außerhalb der Kerns ist die Anziehung der Kernkräfte praktisch gleich null, so dass nur die Abstoßungs Kräfte wirken. Betrachtet man die Kräfte auf ein Proton, das sich einem Kern nähert, ergibt sich zunächst eine elektrostatische Abstoßung bis zum Kernrand und dann eine Anziehung und eine mögliche Bindung. Für ein Neutron entfällt die elektrostatische Kraft außerhalb des Kerns. In Bild 12-4 ist die potentielle Energie von Proton und Neutron in Kernnähe aufgetragen.

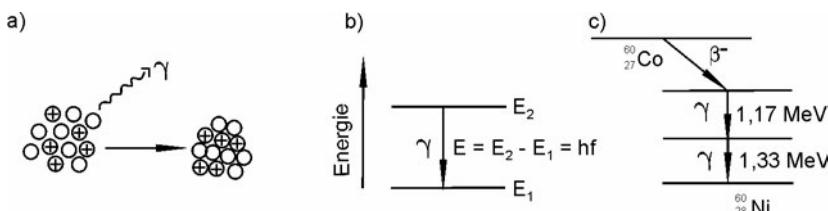


**Bild 12-4**

- a) Potentielle Energie eines positiv geladenen Teilchens (z.B. Proton) bei Annäherung an einen Kern.
- b) wie a) für ein ungeladenes Teilchen (Neutron)

### Kernmodelle

Selbst einfache Atomkerne entziehen sich bisher einer exakten physikalischen Beschreibung, so dass man auf Modelle angewiesen ist. Tatsache ist, dass die Nukleonen relativ dicht im Kern liegen und eine schnelle Bewegung ausüben (Bild 12-2). Im *Tröpfchenmodell* wird der Kern mit einem Flüssigkeitströpfchen verglichen, wobei die Nukleonen den Molekülen entsprechen. Die Kerne führen auch Vibrationen aus, die zu angeregten Kernniveaus führen. Bei hohen Massenzahlen treten ellipsoidförmige Strukturen auf. Diese können rotieren und somit hohe Energiezustände einnehmen.



**Bild 12-5**  $\gamma$ -Strahlung:

- a) Bei der Emission von  $\gamma$ -Strahlung ändert sich die Verteilung von Protonen und Neutronen im Kern.
- b) Der  $\gamma$ -Übergang findet zwischen zwei Kernniveaus statt.
- c)  $\gamma$ -Linien im Zerfall  $^{60}\text{Co} \rightarrow ^{60}\text{Ni}$

Im *Schalenmodell* wird die Bewegung eines einzelnen Nukleons im mittleren Potential der anderen Kernteilchen untersucht. Es zeigt sich, dass unterschiedliche Bahnen möglich sind, die zu angeregten Kernniveaus führen. Die Vorstellungen dieses Modells sind ähnlich wie in der Atomhülle. Allerdings wirkt hauptsächlich die Kernkraft und nicht die elektrostatische Anziehung wie in der Hülle.

Nach den beschriebenen Modellen besteht der Kern aus einem Grundzustand und anderen angeregten Zuständen Bild 12-5) Es kann sich um Zustände nach dem Schalenmodell oder um Vibrations- und Rotationszustände handeln. Ähnlich wie in der Hülle sind Übergänge zwischen den Zuständen möglich. Dabei wird  $\gamma$ -Strahlung emittiert und der Vorgang ähnelt der Lichtemission in der Atomhülle.

## 12.2 Radioaktive Kernumwandlungen

Radioaktive Strahlung wird mit den historischen Namen  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlung belegt. Ursprünglich wurden die Strahlungsarten nur in der Natur beobachtet. Inzwischen überwiegt die Zahl der bekannten künstlichen radioaktiven Isotope bei weitem die der natürlichen. Es bleibt zu hoffen, dass die Produktion künstlicher Isotope nur zum Nutzen der Menschheit eingesetzt wird.

### 12.2.1 $\alpha$ -, $\beta$ - und $\gamma$ -Strahlung

#### $\gamma$ -Strahlung

Bei der  $\gamma$ -Strahlung handelt es sich um eine elektromagnetische Erscheinung, ähnlich wie Röntgenstrahlung oder Licht. Sie entsteht im Atomkern bei Übergängen zwischen verschiedenen Kernzuständen Bild 12-5) Beim  $\gamma$ -Übergang erfolgt im Kern eine Umverteilung der Bewegungszustände der Protonen und Neutronen. Die Strahlung besitzt Teilchencharakter, man spricht von  $\gamma$ -Quanten, deren Energie  $E = hf$  im Bereich von 10 keV bis zu einigen MeV liegt. Sie berechnet sich wie beim Licht aus dem Energieabstand  $E_2 - E_1$  der Niveaus (10.18)

$$E = hf = E_2 - E_1. \quad \gamma\text{-Quanten} \quad (12.4)$$

wobei  $h = 6,6626 \cdot 10^{-34}$  Js das *Planck'sche Wirkungsquantum* und  $f$  die Frequenz der Strahlung darstellen.  $\gamma$ -Strahlung durchdringt Materie relativ stark.

**$\gamma$ -Spektroskopie:** Natürliche und künstliche radioaktive Elemente senden  $\gamma$ -Strahlung in Form eines Linienspektrums aus, die durch mehrere  $\gamma$ -Übergänge entstehen. Durch Messung des  $\gamma$ -Spektrums ist eine genaue Analyse radioaktiver Isotope möglich. Davon wird im Umweltschutz, in der Medizin und Technik Gebrauch gemacht. Bild 12-5c zeigt das  $\gamma$ -Spektrum von  $^{60}\text{Co}$  mit Energien von 1,17 und 1,33 MeV. Der Einsatz dieses Isotops erfolgt in der Strahlentherapie und zur Sterilisierung von Materialien.

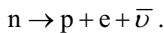
**Innere Konversion:** Angeregte Kernzustände können durch  $\gamma$ -Übergänge oder auch durch so genannte innere Konversion zerfallen. Der Vorgang erfolgt strahlungslos und die Energie wird auf ein Elektron der Atomhülle übertragen, welches das Atom mit hoher Geschwindigkeit verlässt.

**Mößbauer-Effekt:** Zur Untersuchung von Festkörpern und Kernen dient die Mößbauer-Spektroskopie. Bei der Aussendung eines  $\gamma$ -Teilchens erfährt der Kern einen Rückstoß. Durch den Doppler-Effekt verschieben sich dadurch geringfügig die Frequenz und Energie der Strah-

lung. Befinden sich die radioaktiven Kerne in einem Kristall, kann unter bestimmten Bedingungen der Rückstoßimpuls vom gesamten Kristall aufgenommen werden. Eine Energieverschiebung der  $\gamma$ -Strahlung findet dann nicht statt (Mößbauer-Effekt)

### $\beta^-$ -Strahlung

Die natürlichen und künstlichen Kerne sind im Bild 12-1 im Z-N-Diagramm dargestellt. Bei Kernen unterhalb der stabilen Grenze sind zusätzliche Neutronen vorhanden. Beim  $\beta^-$ -Übergang wird ein überschüssiges Neutron n in ein Proton p umgewandelt (Bild 12-6a)

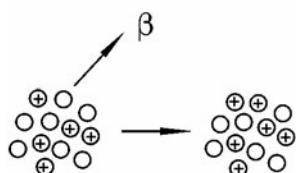


$\beta^-$ -Strahlung

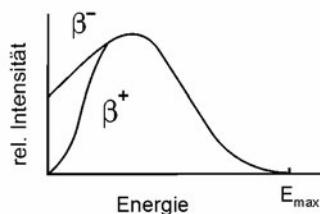
(12.5a)

Es wird ein Elektron e und ein Neutrino  $\bar{\nu}$  (genauer: Elektron-Antineutrino) emittiert. Das Elektron,  $\beta^-$ -Teilchen genannt, verlässt den Kern mit hoher Energie. Das Neutrino ist in der Praxis nur schwer nachweisbar; es ist ungeladen und reagiert nicht auf die so genannte *starke* sondern nur auf die *schwache* Kernkraft. Man beachte, dass in Gleichung 12.5a die Summe der Ladung vor und nach der Reaktion erhalten bleibt. Beim  $\beta^-$ -Übergang ist normalerweise nur das Elektron messtechnisch erfassbar. Die Energieverteilung der  $\beta^-$ -Teilchen ist kontinuierlich, da auch auf das Neutrino Energie übertragen wird (Bild 12-6b)

a)



b)

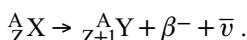


**Bild 12-6**

$\beta$ -Strahlung:

- a) Beim  $\beta^-$ -Übergang wird ein Neutron in ein Proton umgewandelt.
- b) Energieverteilung der  $\beta$ -Teilchen

Formuliert man die Reaktionsgleichung 12.5a für einen Kern, erhält man:



$\beta^-$ -Übergang

(12.5b)

Aus dem Kern X entsteht ein neues Element Y mit der nächst höheren Ladungszahl  $Z + 1$  und gleicher Massenzahl A. Bild 12-5c zeigt den Übergang von  ${}^{60}\text{Co}$  in  ${}^{60}\text{Ni}$ . Meist erfolgt der  $\beta^-$ -Übergang in einen angeregten Zustand des neuen Kerns, der als Folge mehrere  $\gamma$ -Quanten emittiert.  $\beta^-$ -Strahlung, d. h. Elektronenstrahlung, wird von Materie stark absorbiert, die Reichweite liegt in Festkörpern im 0,1-mm-Bereich.

### $\beta^+$ -Strahlung

Kerne oberhalb der Stabilitätsgrenze in Bild 12-1 enthalten zu viele Protonen. Dieser Überschuss kann durch einen  $\beta^+$ -Übergang abgebaut werden, bei dem ein Proton in ein Neutron umgewandelt wird. Diese Transformation kann nur innerhalb des Kernes erfolgen, freie Protonen (Wasserstoffkerne) sind stabil. Beim  $\beta^+$ -Übergang erniedrigt ein Kern X bei konstanter Massenzahl A die Ladungszahl von Z nach  $Z - 1$ :



$\beta^+$ -Übergang

(12.6)

Es entsteht ein neuer Kern Y und es wird ein Positron, das  $\beta^+$ -Teilchen, und ein Neutrino  $\nu$  (genauer: Elektron-Neutrino) emittiert. Der  $\beta^+$ -Prozess wird nicht in der Natur beobachtet. Er tritt nur bei künstlichen radioaktiven Nukliden auf.

Die  $\beta^+$ -Teilchen oder Positronen sind die Antiteilchen zu den Elektronen (positive Elektronen) (siehe Abschnitt 12.5) Treffen Antiteilchen mit den entsprechenden Teilchen zusammen, zerstrahlen sie in zwei entgegengerichtete  $\gamma$ -Quanten. Beim Elektron und Positron treten zwei  $\gamma$ -Quanten mit je 511 keV auf. In der Medizin wird die so genannte Positronen-Emissions-Tomographie entwickelt, welche die 511-keV-Strahlung mit zwei Detektoren nachweist und zur Bildzeugung ausnutzt. Vor der Aufnahme wird dem Patienten ein kurzlebiger  $\beta^+$ -Strahler zugeführt, z. B.  $^{11}_6\text{C}$ ,  $^{13}_7\text{N}$ ,  $^{18}_{15}\text{O}$ ,  $^{18}_{9}\text{F}$ , die mit einem Zyklotron erzeugt werden.

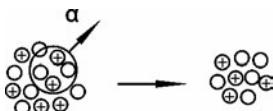
**Elektroneneinfang:** Bei schweren Elementen befinden sich die Elektronen der innersten Schale relativ nahe am Kern. Der  $\beta^+$ -Zerfall erfolgt dann nicht. Stattdessen fängt der Kern ein Elektron ein und wandelt ein Proton in ein Neutron um. Meist tritt beim Elektroneneinfang keine messbare radioaktive Strahlung auf.

### $\alpha$ -Strahlung

Instabile schwere Kerne mit  $A > 70$  und  $Z > 70$  können durch Emission von  $\alpha$ -Teilchen zerfallen. Ein derartiges Teilchen besteht aus je zwei Protonen und Neutronen, d. h. aus einem Heliumkern He. Die Zerfallsreaktion kann allgemein wie folgt geschrieben werden:



Aus einem Kern X entsteht ein neuer Kern Y mit einer um 2 verminderten Ordnungszahl; die Massenzahl ist um 4 reduziert (Bild 12-7). Beispielsweise ist das natürliche Uranisotop  $^{238}_{92}\text{U}$  ein  $\alpha$ -Strahler mit einer Halbwertszeit von 4.5 Milliarden Jahren.  $\alpha$ -Strahlung wird von dünnen Folien mit wenigen  $\mu\text{m}$  Dicke absorbiert. In Luft beträgt die Reichweite wenige cm.



**Bild 12-7**

$\alpha$ -Umwandlung: Bei der  $\alpha$ -Umwandlung emittiert der Kern ein  $\alpha$ -Teilchen, das aus 2 Protonen und 2 Neutronen besteht

**Beispiel 12.2.1a** Berechnen Sie die Wellenlänge von  $\gamma$ -Strahlen mit 60 keV.

Nach (2.4) gilt:  $E = hf = hc_0 / \lambda$ . Daraus folgt:  $\lambda = hc_0 / E = 2 \cdot 10^{-11} \text{ m}$  ( $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ )

**Beispiel 12.2.1b**  $^{238}_{92}\text{U}$  und  $^{235}_{92}\text{U}$  senden  $\alpha$ -Strahlung aus. Welches sind die Endkerne?

Die Massenzahl verringert sich um 4 und Ordnungszahl um 2:  $^{234}_{90}\text{U}$  und  $^{231}_{90}\text{U}$ .

**Beispiel 12.2.1c** Das medizinische Isotop  $^{11}_6\text{C}$  zerfällt durch  $\beta^+$ -Strahlung. In welchem Element endet der Übergang?

Die Kernladungszahl verringert sich um 1:  $^{11}_6\text{C} \rightarrow {}^{11}_5\text{B} + \beta^+ + \text{Neutrino}$ .

### 12.2.2 Radioaktives Zerfallsgesetz

Die spontane Umwandlung instabiler Kerne ist ein statistischer Vorgang. Man kann nie genau sagen, wann ein bestimmter Kern Strahlung emittiert. Ähnlich ist es beim Zerfall angeregter Zustände in der Atomhülle. Das Prinzip von Ursache und Wirkung ist für einen einzelnen Kern nur eingeschränkt gültig. Für eine große Anzahl von Kernen lassen sich jedoch statistisch präzise Aussagen über die Halbwertszeit formulieren.

### Halbwertszeit $T$

Logischerweise muss die Zahl der Zerfälle pro Zeiteinheit ( $dN/dt$ ) proportional zur Zahl der zerfallenden Kerne  $N$  sein:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad [\lambda] = \frac{1}{s}. \quad \text{Zerfallskonstante } \lambda \quad (12.7a)$$

Die Proportionalitätskonstante ist die *Zerfallskonstante*  $\lambda$ . Das Minuszeichen muss eingeführt werden, da die Änderung  $dN$  eine Abnahme beschreibt und damit negativ ist.

Die Zahl der Zerfälle pro Sekunde bezeichnet man als *Aktivität*  $A$ :

$$A = \frac{dN}{dt} \quad [A] = \frac{1}{s}. \quad \text{Aktivität } A \quad (12.8)$$

Die Einheit der Aktivität ist  $[A] = \text{Bequerel} = \text{Bq} = 1 \text{ Zerfall/s}$ . Bisweilen wird noch der Begriff Curie benutzt (Gleichung 12.14).

Durch Integration von (12.7a) erhält man das *radioaktive Zerfallsgesetz*:

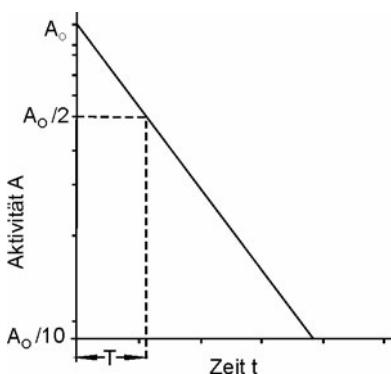
$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad \text{Radioaktives Zerfallsgesetz} \quad (12.7b)$$

Die Ausgangssubstanz hatte zur Zeit  $t=0$   $N_0$  Kerne, zur Zeit  $t$  sind davon noch  $N$  Kerne vorhanden. Es ist üblich, die *Halbwertszeit*  $T$  einzuführen, nach der die Hälfte der  $N_0$  Kerne zerfallen sind. Aus der Gleichung  $N_0/2 = N_0 e^{-\lambda t}$  findet man:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \quad \text{Daraus folgt für das Zerfallsgesetz:}$$

$$N = N_0 e^{-t \ln 2/T} = N_0 2^{-t/T} \quad \text{sowie} \quad A = A_0 e^{-t \ln 2/T} = A_0 2^{-t/T}. \quad (12.7c)$$

Die letzte Gleichung für die Aktivität  $A$  folgt aus der Proportionalität von  $A (= dN/dt)$  und  $N$ . Die Aktivität einer radioaktiven Substanz klingt in Form einer e-Funktion ab. Nach Bild 12-8 erhält man in einer logarithmischen Skala eine Gerade; beim halben Wert der Ausgangsaktivität  $A_0$  kann die Halbwertszeit  $T$  abgelesen werden. Einige Angaben sind in Tabelle 12.1 zusammengefasst.



**Bild 12-8**  
Logarithmische Darstellung des  
radioaktiven Zerfallsgesetzes

**Tabelle 12.1** Halbwertszeiten  $T$  und Masse je MBq ( $m/A$ ) verschiedener Nuklide  
 h = Stunden, d = Tage, a = Jahre)

Nuklid	$T$	$m/A$ in kg/MBq	Nuklid	$T$	$m/A$ in kg/MBq
$^{108}_{47}\text{Ag}$	2,41 min	$3,7 \cdot 10^{-7}$	$^{90}_{38}\text{Sr}$	28,5 a	$1,9 \cdot 10^{-10}$
$^{56}_{25}\text{Mn}$	2,58 h	$1,3 \cdot 10^{-7}$	$^{137}_{55}\text{Cs}$	30,2 a	$3,1 \cdot 10^{-10}$
$^{131}_{53}\text{I}$	8,02 d	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$^{14}_{6}\text{C}$	5730 a	$6,1 \cdot 10^{-9}$
$^{32}_{15}\text{P}$	14,3 s	$9,5 \cdot 10^{-4}$	$^{36}_{17}\text{Cl}$	$3,0 \cdot 10^{-5}$ a	$8,2 \cdot 10^{-7}$
$^{60}_{27}\text{Co}$	5,27 a	$2,4 \cdot 10^{-1}$	$^{238}_{92}\text{U}$	$4,5 \cdot 10^{-9}$ a	$8,1 \cdot 10^{-2}$

Für die praktische Anwendung radioaktiver Nuklide ist der Zusammenhang zwischen der Aktivität  $A$  einer isolierten radioaktiven Substanz und deren Masse  $m$  wichtig. Mit  $N = mN_A / m_m$  erhält man aus (12.7) und (12.8)

$$A = \frac{\ln 2 m N_A}{m_m T} . \quad \text{Aktivität } A \quad (12.8)$$

Dabei ist  $N_A = 6,02 \cdot 10^{26}$  kmol $^{-1}$  die Avogadro-Konstante und  $m_m$  die Molmasse in kmol/kg. Für  $m = 1$  kg U mit  $T = 4,5 \cdot 10^9$  Jahre erhält man  $1,23 \cdot 10^7$  Bq.

### Radioaktives Gleichgewicht

Oft schließen sich einem radioaktiven Zerfall weitere an. Daher kann sich eine Gleichgewichtsverteilung der verschiedenen radioaktiven Nuklide einstellen.

**Beispiel 12.2.1a** Das medizinische eingesetzte Isotop  $^{131}\text{I}$  hat eine Halbwertszeit von  $T = 8,04$  Tagen.

a) Wie viel % sind nach  $t = 1$  Woche zerfallen? b) Nach welcher Zeiit ist noch 1% der Ausgangsaktivität vorhanden?

a) Das Zerfallsgesetz (2.7c) lautet:  $N/N_0 = 2^{-t/T} = 0,53$ . Es sind noch  $1 - 0,53 = 47\%$  vorhanden.

b) Aus  $N/N_0 = 0,01 = 2^{-t/T}$  folgt:  $t = -T \log 0,01 / \log 2 = 53,5$  Tage.

**Beispiel 12.2.1b** Die Halbwertszeit von Uran beträgt 4,5 Milliarden Jahre.

Wie viele Kerne zerfallen pro Sekunde in 1 kg Uran?

In 1 mol = 238 g Uran befinden sich  $6,02 \cdot 10^{23}$  Atome (Avogadro'sche Konstante) In 1 kg erhält man damit  $N = 6,02 \cdot 10^{23} / 0,238 = 2,53 \cdot 10^{24}$  Atome. Die Halbwertszeit beträgt  $T = 4,5 \cdot 10^9$  Jahre =  $1,4 \cdot 10^{17}$  s. Daraus folgt für die Zerfallskonstante  $\lambda = \ln 2 / T = 4,88 \cdot 10^{-18}$  s $^{-1}$ . Damit kann mit (12.7a) berechnet werden:

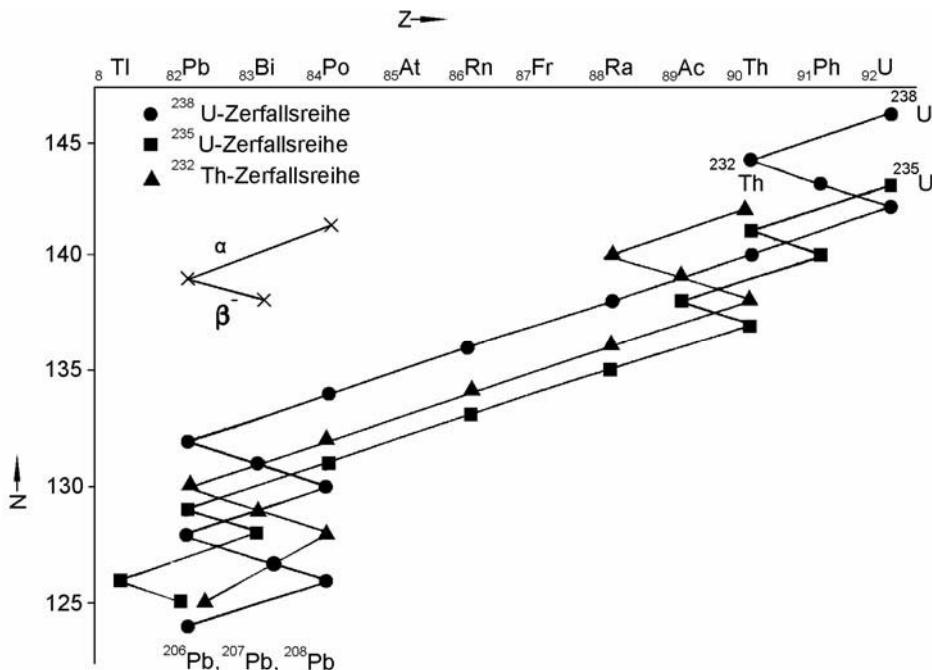
$$dN/dt = N\lambda = 2,53 \cdot 10^{24} \cdot 4,88 \cdot 10^{-18} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ Bq}.$$

### 12.2.3 Natürliche Radioaktivität

In der Natur kommen ungefähr 75 radioaktive Nuklide vor. Ein Teil davon wurde bei der Entstehung der Erde vor etwa 4,6 Milliarden Jahren gebildet. Die Lebensdauer dieser Nuklide hat etwa die gleiche Größenordnung. Es handelt sich um

$^{232}\text{Th}$  (4 · 10<sup>10</sup> Jahre),  $^{235}\text{U}$  (7,4 · 10<sup>8</sup> Jahre),  $^{238}\text{U}$  (4,5 · 10<sup>9</sup> Jahre),  $^{40}\text{K}$  (1,3 · 10<sup>9</sup> Jahre),  $^{87}\text{Rb}$  (4,8 · 10<sup>10</sup> Jahre) sowie um 11 weitere Kerne.

Die ersten drei bilden Zerfallsreihen mit jeweils etwa zehn instabilen Isotopen. Daneben entstehen einige radioaktive Nuklide ständig durch kosmische Strahlung in der Erdatmosphäre, die wichtigsten sind  $^{14}\text{C}$  (6730 Jahre) und Tritium (2,3 Jahre).



**Bild 12-9** Natürliche Zerfallsreihen ausgehend von  $^{238}\text{U}$ ,  $^{235}\text{U}$  und  $^{232}\text{Th}$

## Zerfallsreihen

Die drei natürlichen Zerfallsreihen starten bei  $^{232}\text{Thorium}$ ,  $^{235}\text{Uran}$  und  $^{238}\text{Uran}$ . Diese Kerne wandeln sich durch mehrmalige  $\beta$ - und  $\alpha$ -Übergänge nach Bild 12-9 um. Die stabilen Endprodukte sind verschiedene Bleisotope. In den Reihen treten radioaktive Isotope des Edelgases Radon ( $\text{Rn}$ ) auf. Da der Boden und die Baumaterialien der Häuser stets gewisse Mengen von Thorium und Uran enthalten, wird ständig radioaktives Radon in die Luft überführt. In geschlossenen Räumen kann dadurch eine leichte Erhöhung der Radioaktivität auftreten.

Zur Datierung von Mineralien und Gesteinen wird häufig die *Bleimethode* herangezogen. Bestimmt man in einer Probe die Anzahl der radioaktiven Mutteratome, wie Uran oder Thorium, und die daraus gebildeten stabilen Bleiisotope, so kann daraus das Alter ermittelt werden. Voraussetzung ist, dass zur Zeit  $t = 0$  keine Bleiisotope vorhanden waren. Ähnlich arbeitet die *Kalium-Argon-Methode*, wobei  $^{40}\text{K}$  die Muttersubstanz und  $^{40}\text{Ar}$  das Zerfallsprodukt sind. Es gibt noch einige andere Methoden, z. B. die Bestimmung von U und He (gebremste  $\alpha$ -Teilchen) in Gesteinen.

## Kosmische Strahlung

Die primäre Komponente der kosmischen Strahlung besteht aus 91,5% Protonen, 7,8%  $\alpha$ -Teilchen und 0,7% Kernen bis zu  $Z=30$ . Beim Beschuss der atmosphärischen Gase Stickstoff, Sauerstoff und Argon werden verschiedene radioaktive Isotope und Neutronen gebildet. Am bekanntesten ist die Erzeugung von radioaktivem Kohlenstoff  $^{14}\text{C}$  in höheren Schichten der Erdatmosphäre durch Neutronenbeschuss:



Über die Erdoberfläche gemittelt entstehen etwa 25000  $^{14}\text{C}$ -Kerne/(m<sup>2</sup> s) Der  $\beta$ -Strahler  $^{14}\text{C}$  gelangt als CO<sub>2</sub> zur Erdoberfläche, wo er von den Pflanzen aufgenommen wird. Nach dem Absterben findet keine Aufnahme mehr von  $^{14}\text{C}$  statt und es beginnt ein Zerfall dieses Isotops mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren. Der Anteil des radioaktiven  $^{14}\text{C}$  bezogen auf das normale stabile  $^{12}\text{C}$  erlaubt somit eine Altersbestimmung archäologischer Funde aus organischem Material.

Das radioaktive Isotop des Wasserstoffs Tritium ( $^3\text{H}$ ) entsteht u. a. ebenfalls durch Neutronenbeschuss von Stickstoff  $^{14}\text{N}(\text{n}, \text{H}) \, \text{I}\!\!\!\text{E}$ . Die Produktionsrate in der Atmosphäre liegt etwa bei 2500  $^3\text{H}$ -Kerne/(m<sup>3</sup> s) Der gesamte natürliche Weltvorrat beträgt einige Kilogramm. Tritium besitzt eine Halbwertszeit von 12,3 Jahren, so dass es zur geologischen Altersbestimmung von Gewässern bis zu 50 Jahren herangezogen wird. Unerfreulicherweise wurde  $^3\text{H}$  in großen Mengen zum Bau von Wasserstoffbomben künstlich produziert.) Weitere Angaben zur natürlichen Radioaktivität finden sich in Abschnitt 12.4.

#### 12.2.4 Künstliche Kernreaktionen

Kernreaktionen mit einer Umwandlung der Kerne werden durch Beschuss von Materie mit Neutronen, Protonen ( $^1\text{H}$ ) Deuteronen ( $^2\text{H}$ ) Helium ( $\alpha$ -Teilchen) und anderen Kernen durchgeführt. Möglich sind auch Reaktionen mit energiereichen Elektronen oder  $\gamma$ -Quanten. Die erzeugten Isotope dienen wissenschaftlichen, medizinischen und technischen Anwendungen. Die Neutronen werden meist mit speziellen Kernreaktoren für die Forschung produziert. Zur Beschleunigung der anderen oben erwähnten Teilchen werden die entsprechenden Atome ionisiert und den elektrischen Feldern von Teilchenbeschleunigern ausgesetzt.

##### Teilchenbeschleuniger

Zur Einleitung von Kernreaktionen geladenen Teilchen (Ionen) müssen das Projektil in den Kern eindringen. Dazu ist die Coulomb-Abstossung zu überwinden Bild 12-4) Die erforderliche hohe Geschwindigkeit oder Energie wird in Teilchenbeschleunigern erzeugt. Diese bestehen aus einer Ionenquelle, in der die Projektil-Atome ionisiert werden. Die elektrischen Felder zur Beschleunigung der Ionen können linear oder zirkular angeordnet werden.

Ein wichtiger Linearbeschleuniger trägt den Namen *Van-de-Graaff*. In einer Entladung werden auf ein umlaufendes Gummiband Elektronen gesprührt, die in einigen Metern Entfernung im feldfreien Raum im Inneren einer isolierten Metallhohlkugel abgestreift werden. Dadurch wird die Kugel auf  $10^6$  V = 1 MV und mehr aufgeladen. Die Ionenquelle befindet sich ebenfalls im Inneren der Metallkugel. Die Spannung wird über einen Spannungsteiler an Metallsegmenten eines evakuierten Rohres gelegt, in dem der Ionenstrahl beschleunigt wird.

Höhere Energien von über 50 MeV werden in Kreisbeschleunigern, wie dem *Zyklotron* erreicht Bild 8-32) Heutzutage dient es hauptsächlich zur Erzeugung radioaktiver Isotope für die Medizin. Beim *Synchrotron* bleibt der Radius der beschleunigten Teilchen konstant. Dies wird durch ein Magnetfeld erreicht, das mit zunehmender Geschwindigkeit der Ionen ansteigt. Insbesondere zur Erforschung der Elementarteilchen wurden Beschleuniger mit Protonenergien von mehreren 100 GeV mit einem Umfang von einigen Kilometern gebaut.

## Reaktionstypen mit Ionen

Als beschleunigte Ionen in Teilchenbeschleunigern werden insbesondere Protonen und Deuteronen eingesetzt. Für Anwendungen in Technik und Medizin erzeugt man hauptsächlich Radiumnuklide mit kurzer Lebensdauer, um Mensch und Umwelt so gering wie möglich zu belasten. Dagegen treten bei Kernexplosionen Halbwertzeiten bis zu mehreren 100 Jahren auf; das ist unverantwortlich. Ein Beispiel für ein kurzlebiges Isotop ist  $^{123}\text{I}$  (Jod) mit einer Halbwertzeit von 13,2 Stunden. Es wird durch Beschuss einer dünnen Schicht aus  $\text{TeO}_2$  nach der Reaktion  $^{122}\text{Te}(d,n)^{123}\text{I}$  durch Deuteronen erzeugt.

## Reaktionen mit Neutronen

Der Kernreaktor als Neutronenquelle ist die wichtigste Anlage zur Erzeugung radioaktiver Nuklide. Bei langsamen Neutronen treten ( $n, \gamma$ ) Reaktionen auf. Das Neutron wird im beschossenen Kern eingefangen und dort eingebaut. Es entsteht ein schwereres Isotop des gleichen Elementes. Überschüssige Energie wird durch  $\gamma$ -Strahlung abgeben. Ein Beispiel ist die Produktion von radioaktiven Goldnadeln zur Tumortherapie nach der Reaktion  $^{197}\text{Au}(n, \gamma)^{198}\text{Au}$ . Aus dem natürlichen Isotop  $^{197}\text{Au}$  entsteht der  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahler  $^{198}\text{Au}$  mit einer Halbwertzeit von 2,7 Tagen. Das Isotop  $^{60}\text{Co}$  für zur Tumorbestrahlung wird in der Reaktion  $^{59}\text{Co}(n, \gamma)^{60}\text{Co}$  produziert Bild 12-6a) Bei schnellen Neutronen kann eine ( $n, p$ ) Reaktion ablaufen, z. B.  $^{32}\text{S}(n, p)^{32}\text{F}$ .

Bei der Aktivierungsanalyse wird eine Probe im Reaktor mit langsamen Neutronen bestrahlt. Durch ( $n, \gamma$ ) Reaktionen entstehen je nach Zusammensetzung der Elemente verschiedene radioaktive Isotope, die  $\gamma$ -Strahlung aussenden. Durch den Einsatz der  $\gamma$ -Spektroskopie kann eine Analyse der Elemente erfolgen, um Spurenelemente in äußerst geringer Konzentration zu bestimmen.

Durch langsame Neutronen wird Kernspaltung in  $^{235}\text{U}$  verursacht (Abschnitt 12.3) Aus den Spaltprodukten können zahlreiche radioaktive Isotope chemisch abgetrennt werden. Ein Beispiel ist  $^{131}\text{I}$  (Jod) mit einer Halbwertzeit von 8,02 Tag en, das zur Untersuchung der Schilddrüse eingesetzt wird. Bei diesem Verfahren wird mit einem  $\gamma$ -Scanner der Halsbereich punktweise abgetastet, so dass ein Bild der Verteilung des radioaktiven Jod entsteht. Der Arzt ermittelt daraus seine Diagnose.

## Anwendung radioaktiver Strahlung

Die wichtigste Anwendung radioaktiver Isotope liegt in der Nuklearmedizin. Einige Einsatzbereiche wurden bereits erwähnt: Tumorbehandlung und Diagnostik. Beispiele in der Technik sind Dickenmessung von Blechen oder Folien durch Absorptionsmessung von  $\gamma$ - oder  $\beta$ -Strahlung, Füllstandsmessen durch Durchstrahlung mit  $\gamma$ -Strahlung, Feuchtigkeitsmessung in Beton oder Boden,  $\gamma$ -Radiographie zum Auffinden von Defekten in Werkstücken, radioaktive Markierungen bei Verschleißmessungen oder bei Transportprozessen. Zahlreiche Anwendungen ergeben sich auch in der Strahlenchemie. Wegen der Umweltbelastung werden jedoch radioaktive Isotope nur dann einsetzen, wenn sich keine anderen geeigneten Verfahren finden lassen.

## 12.3 Kernspaltung und Kernfusion

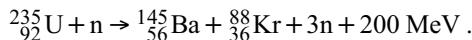
Beim Beschuss von Isotopen von Uran, Plutonium und Thorium mit Neutronen findet eine Kernspaltung statt. Eine Spaltung ist auch mit anderen Projektilen möglich, jedoch ohne technische Bedeutung. Bei der Kernspaltung wird Energie frei, die  $10^8$ -mal größer ist als bei chemischen Reaktionen. Dies hat zum Fluch der Kernwaffen und zu den im Prinzip nützlichen aber umstrittenen Kernreaktoren geführt.

### 12.3.1 Spaltung mit Neutronen

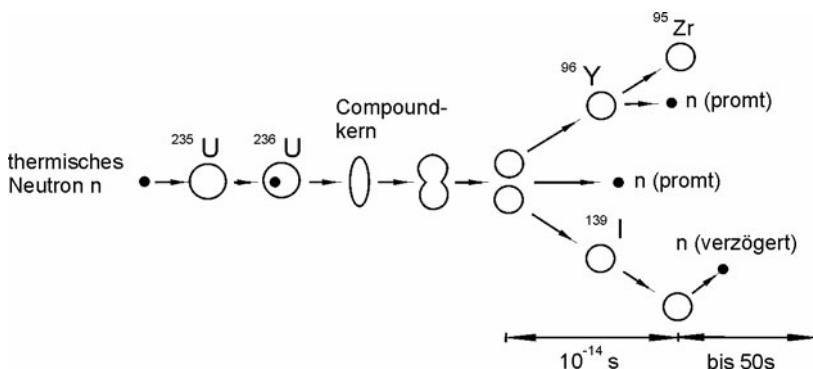
#### Spaltreaktionen

Neutronen sind ungeladen. Damit können sie sich dem Kern ohne Abstoßung durch Coulomb-Kräfte nähern (Bild 12-4b) und von diesem eingefangen werden. Da sich langsame Neutronen länger in Kernnähe befinden, ist die Wahrscheinlichkeit für den Einfang besonders hoch. Dabei wird die Bindungsenergie frei, die nach Bild 16-3 etwa 6 MeV beträgt. Durch diese Energie befindet sich der neue Kern in einem hoch angeregten Compound-Zustand. Bei den meisten Kernen entsteht durch Emission von  $\gamma$ -Strahlung ein Übergang in den stabilen Grundzustand. Anders ist es bei einigen Kernen, wie  $^{233}_{92}\text{U}$ ,  $^{235}_{92}\text{U}$  und  $^{239}_{94}\text{Pu}$  (Plutonium). Entsprechend Bild 12-10 deformiert sich der Compound-Kern und zerplatzt in zwei etwa gleich große Bruchstücke:

Kern  $+ n \rightarrow$  2 Spaltprodukte + 3 Neutronen + Energie  $\Delta E$ , beispielsweise



Für  $^{235}_{92}\text{U}$  und die anderen zitierten schweren Kerne existiert jeweils eine große Anzahl unterschiedlicher Spaltprodukte, die meist hoch radioaktiv sind und weiter zerfallen. Die letzte Zerfallsgleichung für  $^{235}_{92}\text{U}$  ist auch von historischem Interesse, da an ihr 1938 zufällig die Kernspaltung durch den chemischen Nachweis von Ba entdeckt wurde.



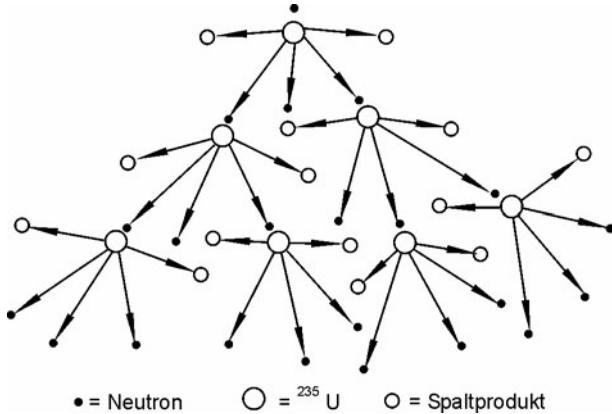
**Bild 12-10**  
Ablauf der Kernspaltung von  $^{235}\text{Uran}$  durch thermische Neutronen

#### Energie und Massendefekt

Die in jeder Spaltung frei werdende Energie von etwa 200 MeV =  $3,2 \cdot 10^{-11} \text{ J}$  kann aus Bild 12-3 verstanden und berechnet werden. Es handelt sich um die Differenz der Bindungsenergien vor und nach der Spaltung. Bei chemischen Reaktionen ist es ähnlich, mit dem Unterschied, dass die Reaktionen in der Hülle bei  $10^{-8}$  fach niedrigerer Energie ablaufen.) Vor der Spaltung von  $3,2 \cdot 10^{-11}$  liest man aus Bild 12-3 für die Nukleonenzahl  $A=235$  eine Bindungsenergie von  $235 \cdot 7,3 \text{ MeV} = 1720 \text{ MeV}$  ab. Nach der Spaltung in zwei Kerne im mittleren

ren  $A$ -Bereich erhält man  $235,8,5 \text{ MeV} = 2000 \text{ MeV}$ . Die Differenz der Bindungsenergien entspricht etwa den 200 MeV aus (2.9) die bei jeder Spaltung entstehen.

Die Bindungsenergie führt zu einer Verringerung der Kernmasse (Abschnitt 12.1.1). Die bei der Spaltung frei werdende Energie  $\Delta E = 200 \text{ MeV}$  entspricht einem Massenverlust, dem so genannten *Massendefekt*, von  $\Delta m = \Delta E / c_0^2 = 0,2 m_u \approx 0,3 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ . Da die Uranmasse 235  $m_u$  beträgt, entspricht dies einem Massenverlust von etwa 1 ‰.



**Bild 12-11**  
Prinzip der Kettenreaktion

In 1 kg Uran befinden sich  $\frac{1\text{kg} \cdot 6,022 \cdot 10^{26} / \text{kmol}}{235\text{kg/kmol}} = 2,6 \cdot 10^{24}$  Kerne. Bei der Spaltung von 1 kg entstehen somit  $3,2 \cdot 10^{-11} \cdot 2,6 \cdot 10^{24} \text{ J} \approx 2 \cdot 10^7 \text{ kWh}$ . Dagegen wird bei der Verbrennung von 1 kg Kohle nur etwa 10 kWh frei.

### Kettenreaktion

Bei der Spaltung nach (2-9) werden 2 bis 3 Neutronen gebildet, die weitere Kerne zertrümmern können. Damit ist das Prinzip einer Kettenreaktion möglich. Wenn jede Spaltung mehr als eine weitere Spaltung verursacht, wächst der Prozess exponentiell an (Bild 12-11). Dieses kann zu einer Kernexplosion führen, sofern der Anstieg nicht gebremst wird. Letzteres ist bei den Kernreaktoren der Fall, die nach dem Hochfahren der Leistung im Gleichgewicht arbeiten; jede Spaltung erzeugt nur eine neue.

### Kritische Masse

Beim Einschalten des Reaktors läuft anfangs eine langsame Kettenreaktion ab und die Leistung erhöht sich. Die entstehenden Neutronen dürfen den Kernbrennstoff nicht verlassen, sondern sollen neue Spaltprozesse auslösen. Da sich die Neutronen jedoch über große Bereiche der Brennelemente bewegen, bevor eine weitere Spaltung auftritt, muss die Masse groß genug sein, damit nur wenige Neutronen entweichen. Eine Kettenreaktion ist somit nur oberhalb der *kritischen Masse* möglich. Sie hängt von der Form und Zusammensetzung der Brennelemente und dem Reaktoraufbau ab. Liegt das spaltbare Material in reiner Form vor, so reichen Volumina von der Größe eines Fußballs für den Bau einer Atombombe aus.

### Urananreicherung

Von den in der Natur vorkommenden Isotopen ist nur  $^{235}_{92}\text{U}$  für den Betrieb von Kernreaktoren brauchbar. Natürliches Uran besteht aus 0,7 %  $^{235}_{92}\text{U}$  und 99,3 % ungeeignetem  $^{238}_{92}\text{U}$ . Für die Brennelemente der meisten Reaktoren muss eine Anreicherung von  $^{235}_{92}\text{U}$  erfolgen, in der

Regel bis auf 3 bis 4 %Uran, das zu etwa 90 %angereichert ist, kann zur Erzeugung von Atombomben und für Reaktoren in U-Booten missbraucht werden. Man unterscheidet folgende Verfahren der Urananreicherung, die auf physikalischen Effekten beruhen: Gas-Diffusion, Gas-Zentrifugen, und Trenndüsen.

**Beispiel 12.3.1a** Welche Energie wird bei der Spaltung von 1 kg  $^{235}\text{U}$  frei ( $\approx 10 \text{ MeV}$  pro Spaltung) Was kostet die Energie bei einem Wirkungsgrad von 30 % und einem Preis von 0,10 €/kWh?

In 1 kg Uran befinden sich  $N = 6,02 \cdot 10^{23} / 0,238 = 2,53 \cdot 10^{24}$  Atomkern **Aufgabe 12.2.1b)** Die Energie beträgt  $E = 2,53 \cdot 10^{24} \cdot 210 \text{ MeV} = 8,8 \cdot 10^{13} \text{ J} = 2,5 \cdot 10^7 \text{ kWh}$ . Daraus folgt ein Preis von  $2,5 \cdot 10^7 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 750.000 \text{ €}$

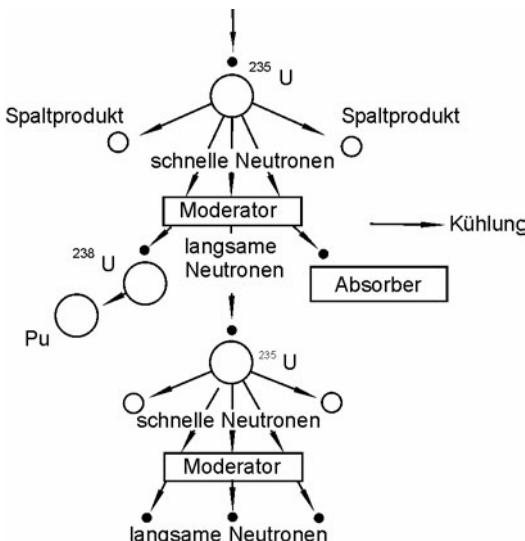
**Beispiel 12.3.1b** Ermitteln Sie aus Bild 12-3, dass bei der Kernspaltung von Uran etwa 200 MeV frei werden.

Die Bindungsenergie pro Nukleon von Uran mit  $A = 235$  beträgt nach Bild 12-3 etwa 7 MeV. Die Spaltprodukte haben jeweils etwa die halbe Massenzahl von etwa 120. In diesem Bereich beträgt die Bindungsenergie pro Nukleon 8 MeV. Pro Nukleon wird also bei der Spaltung etwa 1 MeV frei. Bei 235 Nukleonen ergeben sich etwa 200 MeV.

## 12.3.2 Kernreaktoren

In Reaktoren läuft eine gesteuerte Kettenreaktion ab **Bild 12-12)** Ein Teil der Neutronen wird in den Absorbern der Regelstäbe kontrollierbar eingefangen. Bei thermischen Reaktoren werden die Neutronen im Moderator abgebremst, um die Wahrscheinlichkeit für eine Spaltung zu erhöhen. Die Energie der Spaltfragmente wird durch Stoß in der Materie in Wärme umgewandelt, die durch das Kühlmittel abgeführt wird. Ein Kernreaktor besteht also neben dem Behälter und der Abschirmung im Wesentlichen aus folgenden Teilen:

- Brennstoff (angereichertes Uran, Natururan, Plutonium)
- Moderator (schweres Wasser  $\text{D}_2\text{O}$ ) leichtes Wasser  $\text{H}_2\text{O}$ ) Graphit,
- Kühlmittel (Gase, Wasser)
- Regelstäbe (Cadmium)

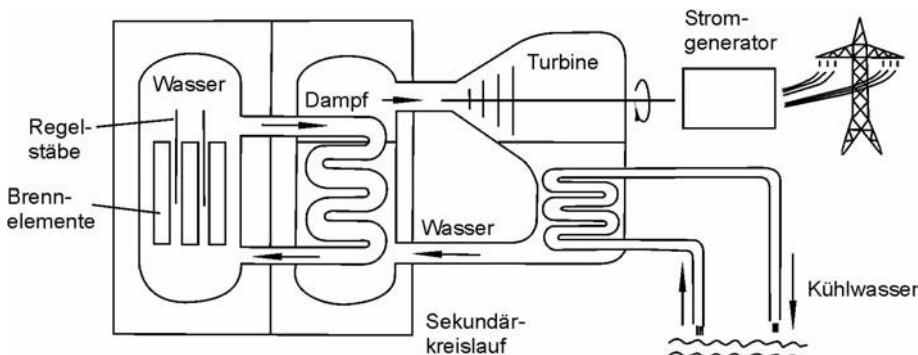


**Bild 12-12**  
Kontrollierte Kernspaltung von  $^{235}\text{Uran}$  mit Moderator (Bremssubstanz) und Absorber (Regelstab) sowie Brüten von Plutonium

Einige Reaktortypen arbeiten mit langsamem, so genannten thermischen Neutronen andere mit schnellen. Bei Brutreaktoren findet neben der Energiegewinnung eine Umwandlung von nicht spaltbarem Material in spaltbares statt.

### Leichtwasser-Reaktoren

Die auf dem Weltmarkt derzeit dominierende Linie bevorzugt die Leichtwasser-Reaktoren. Leichtes, d. h. normales Wasser  $H_2O$ , wird sowohl als Kühlmittel als auch als Moderator verwendet. Der Leichtwasser-Reaktor ist ein thermischer Reaktor mit langsamem Neutronen. Als Brennstoff kommt hauptsächlich Uran infrage, das zu etwa 3 % mit  $^{235}U$  angereichert ist, jedoch ist auch ein Betrieb mit  $^{233}U$  oder  $^{239}Pu$  möglich, die künstlich in so genannten Brutreaktoren erzeugt werden. Die Steuerung der Leichtwasser-Reaktoren erfolgt mit Regelstäben, die Cadmium enthalten. Dieses Element besitzt einen sehr hohen Wirkungsquerschnitt für Neutroneneinfang. Bild 12-13 zeigt einen Leichtwasser-Reaktor in der Ausführungsform eines *Druckwasser-Typs*. Der primäre Kühlkreislauf und die radioaktiven Stoffe sind in sich geschlossen. Die Temperatur liegt um 320 °C. Da es das Wasser nicht siedet, ist das Reaktorgefäß als Druckbehälter (60 bar) konstruiert. Die Energie wird in einem Wärmeaustauscher abgegeben, in dem Dampf zum Betreiben von Turbinen entsteht. Die meisten noch arbeitenden deutschen Reaktoren funktionieren nach diesem Prinzip.



**Bild 12-13** Prinzip eines Druckwasser-Reaktors

Der hohe Druck wird beim *Siedewasser-Reaktor* auf etwa 70 bar verringert, indem der Dampf direkt im Reaktorbehälter erzeugt wird. Dies hat den Nachteil, dass radioaktiver Dampf auf die Turbine geleitet wird.

### Schwerwasser-Reaktoren

Da normales Wasser Neutronen absorbiert, kann es in Reaktoren mit Natururan nicht verwendet werden. Schweres Wasser ( $D_2O$ ) weist eine schwächere Absorption auf, so dass die geringe Konzentration von 0,7 % von  $^{235}U$  in Natururan für einen Betrieb ausreicht. Schwerwasser-Reaktoren mit Natururan sind selten.

### Gasgekühlte Graphit-Reaktoren

Dieser Reaktor wird nur dort zur Energiegewinnung verwendet, wo das Militär eine Plutonium-Gewinnung als Nebenprodukt durchgesetzt hat, z. B. in Tschernobyl. Der Moderator besteht aus Graphit, die Kühlung wird durch  $CO_2$  übernommen. Der Reaktortyp kann auch mit Natururan betrieben werden.

## Brutreaktoren

Normale Reaktoren nutzen nur den Energieinhalt von  $^{235}\text{U}$  mit einem Vorkommen von 0,7% Brutreaktoren mit schnellen Neutronen, so genannte Schnelle Brüter, sind in der Lage, nicht spaltbares  $^{238}\text{U}$  in spaltbares  $^{239}\text{Pu}$  umzuwandeln. Für diesen Prozess sind schnelle Neutronen erforderlich. Der Brüter benutzt als Brennstoff das selbstproduziertes  $^{239}\text{Pu}$ . Dieses Element ist extrem giftig ist und schon in minimalen Mengen krebserregend. Außerdem können aus  $^{239}\text{Pu}$  mit geringem technischen Aufwand Atombomben gebaut werden. Erfreulicherweise hat sich diese Reaktorlinie nicht durchgesetzt.  $^{239}\text{Pu}$  ist in geringerer Menge auch in den abgebrannten Brennelementen normaler Reaktoren vorhanden.

## Probleme

Während der normale Betrieb von Reaktoren akzeptable Umweltprobleme aufzuwerfen scheint, trifft dies für Unfälle, die Wiederaufbereitung von Brennelementen und die Entsorgung nicht zu.

## Atombomben

Bisher wurden etwa 1000 Atombomben gezündet – das war unverantwortlich. Konventionelle nukleare Bomben beruhen allein auf dem Prinzip der Kernspaltung. Im einfachsten Fall werden zwei Körper aus spaltbarem Material mittels einer normalen Explosion in einem Rohr zusammengeschossen. Beim Zusammenprall wird die kritische Masse überschritten. Durch spontane Spaltung sind immer einige Neutronen vorhanden und es kommt zu einer explosiven Kettenreaktion. Durch Einstrahlung mittels einer Neutronenquelle (z. B. ein Gemisch aus Radium und Beryllium) wird die Explosionskraft verstärkt. Die Hiroshima-Bombe, die einige 100000 Menschen tötete, enthielt 6 kg  $^{235}\text{U}$ . Die nächste Bombe, über Nagasaki abgeworfen, bestand aus  $^{239}\text{Pu}$ . Dieses Spaltmaterial fällt in Reaktoren als Abfall an. Das Vernichtungspotential nuklearer Bomben wurde durch die Entwicklung von Wasserstoff-Bomben, die zusätzlich die Kernfusion einsetzen, um ein Vielfaches gesteigert (Abschnitt 12.3.3)

### Beispiel 12.3.2a

Wozu dient der Moderator beim Reaktor?

Bei der Spaltung von  $^{235}\text{U}$  entstehen schnelle Neutronen. Diese fliegen zu schnell an anderen Uranernen vorbei, um eine weitere Spaltung einzuleiten. Daher werden die Neutronen im Moderator abgebremst.

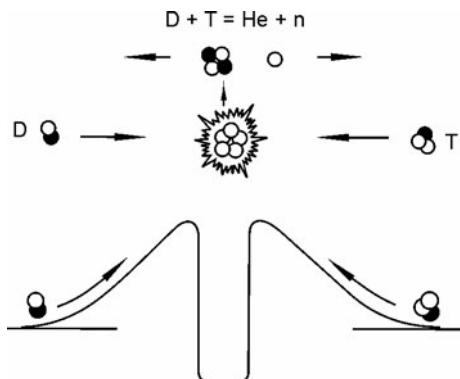
### Beispiel 12.3.2b

Kann ein Reaktor auch ohne angereichertes Uran arbeiten?

Ja, mit Natururan und schwerem Wasser als Moderator und Kühlmittel. Außerdem können künstlich erzeugtes  $^{233}\text{U}$  oder  $^{239}\text{Pu}$  mit normalem Wasser verwendet werden.

## 12.3.3 Kernfusion

Es gibt zwei Möglichkeiten, durch Kernreaktionen Energie freizusetzen: die *Kernspaltung* und die *Kernverschmelzung*. Beide Prozesse nutzen die Bindungsenergie der Kernteilchen aus Bild 12-3) Die Kernspaltung ist Thema des Abschnitts 12.3.2. Im folgenden Abschnitt wird die Kernverschmelzung oder Kernfusion behandelt. Sie ist die Ursache für die Strahlung der Sonne und damit fundamental für das Leben. Seit Jahrzehnten wird versucht, die Kernverschmelzung kontrolliert in Fusionsreaktoren zu beherrschen und als praktisch unbegrenzte Energiequelle zu nutzen. Trotz wichtiger Erfolge ist eine technische Lösung erst in einigen Jahrzehnten zu erwarten. Die unkontrollierte Kernfusion führt zu ungeheueren Zerstörungen in der Weiterentwicklung der Atombombe, der Wasserstoff- oder H-Bombe.

**Bild 12-14**

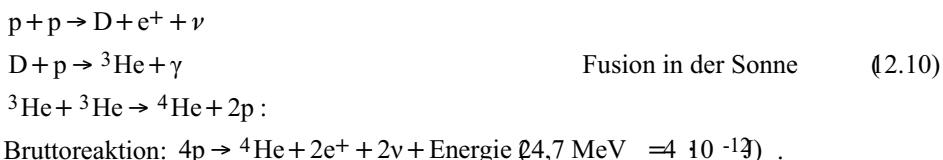
Kernfusion am Beispiel von Deuterium (D) und Tritium (T) Bei großen Entfernungen wirkt die elektrostatische Abstoßung, bei kleinen die anziehenden Kernkräfte

### Prinzip der Kernfusion

Atomkerne bestehen aus Nukleonen, den ungeladenen Neutronen und den positiven Protonen. Nähern sich zwei Kerne, stoßen sie sich aufgrund der gleichartigen Ladung ab. Die Wirkung der elektrischen Abstoßung ist in Bild 12-14 als so genannter Potentialwall dargestellt. Besitzen die Kerne eine hohe kinetische Energie, können sie sich bis zur gegenseitigen Berührung annähern. Bei derartig kurzen Abständen treten die anziehenden Kernkräfte in Erscheinung. Die Kerne werden ineinander gezogen und sie verschmelzen. Ähnlich wie bei der Kernspaltung wird bei der Kernfusion nach Bild 12-3 Energie frei.

### Fusionsreaktionen der Sonne

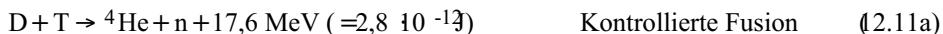
Aus Bild 12-3 ist ersichtlich, dass bei Verschmelzung leichter Kerne, z. B. Wasserstoff, eine Freisetzung von Energie erfolgt. Die Sonne basiert auf diesem Prinzip, insbesondere läuft der *Deuterium-Zyklus* in drei Stufen ab:



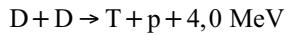
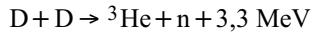
Zwei Protonen p verschmelzen zu einem Deuteron (D) wobei sich ein Proton durch  $\beta^+$ -Übergang in ein Neutron umwandelt (siehe Abschnitt 12.2.1) Im nächsten Schritt wird  ${}^3\text{He}$ , im übernächsten  ${}^4\text{He}$  gebildet. Insgesamt entsteht als Bruttoreaktion aus vier Protonen:  ${}^4\text{He}$ , begleitet von zwei  $\beta^+$ -Übergängen. Im Sonneninneren verläuft dieser Prozess bei Temperaturen von etwa  $1,5 \cdot 10^7 \text{ K}$ . Bei diesen Temperaturen besitzen die Protonen genügend thermische Energie, um die elektrostatische Abstoßung untereinander zu überwinden. Die Sonne gewinnt somit ihre Energie aus der Verschmelzung von Protonen, d. h. Wasserstoff, zu Helium.

### Kontrollierte Kernfusion

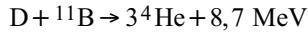
Seit Jahrzehnten wird versucht, die Kernfusion zur Gewinnung von Energie zu nutzen. In Versuchsanlagen werden leichte Kerne, hauptsächlich die Wasserstoff-Isotope Deuterium (D) oder Tritium (T) im Plasmazustand auf hohe Temperaturen gebracht, um die Kerne zu verschmelzen. Insbesondere wird die Reaktion



untersucht. Bei den ebenfalls aussichtsreichen Reaktionen



Kontrollierte Fusion (2.11b)



ist der Potentialwall höher und damit die Zündung der Reaktion schwieriger.

### Erzeugung von Tritium

Für die besonderes aussichtsreiche Fusionsreaktion  $D + T$  wird Deuterium und Tritium benötigt. Tritium ist ein radioaktives Isotop des Wasserstoffs, bestehend aus einem Proton und zwei Neutronen. Da die Halbwertzeit 12,3 Jahre beträgt, kommt es in der Natur praktisch nicht vor (Abschnitt 12.2.3) Es kann künstlich durch Beschuss von Lithium mit Neutronen erzeugt werden. Bisher wird Tritium in speziellen militärischen Kernreaktoren für den Bau und die Erneuerung von H-Bomben großtechnisch produziert – eine schreckliche Tatsache. Später bei einer friedlichen Nutzung können die Fusionsreaktionen ihr benötigtes Tritium selbst erzeugen. Dazu wird das bei der D-T-Reaktion erzeugte Neutron benutzt. In einem zukünftigen 1-GW-Reaktor werden jährlich 5 kg Tritium verbraucht und aus Li erzeugt.

Das für die Fusion benötigte Deuterium, auch *schwerer Wasserstoff* genannt, kommt im normalen Wasser vor. Das Verhältnis  $H_2O$  zu  $D_2O$  beträgt 6000 : 1. Die Menge von  $10^{13}$  t Deuterium und  $10^{11}$  t Lithium (der gewinnbare Anteil ist t geringer) stellen einen enormen Energievorrat dar. Ähnliche Vorräte liegen im Uran und Thorium bei Verwendung von Brut- und Hochtemperaturreaktoren vor, die allerdings erhebliche Sicherheitsrisiken aufweisen.

### Lawson-Diagramm

Zur Energiegewinnung durch Kernfusion sind hohe Temperaturen von etwa  $10^8$  K erforderlich. Zusätzlich müssen die Teilchendichte  $n$  des D-T-Gasmisches und die Brenndauer  $T$  ausreichend groß sein; entscheidend ist das Produkt  $nT$ . In Bild 12-15 sind die für die Fusion erforderlichen Temperaturen und die entsprechenden  $nT$ -Werte im *Lawson-Diagramm* aufgetragen. Zusätzlich sind die erreichten Bereiche verschiedener Experimentieranlagen zur Fusion markiert. Man ist von einer kontrollierten Kernfusion noch relativ weit entfernt. Die Bewältigung der technischen Schwierigkeiten zur Energiegewinnung durch Fusion wird noch Jahrzehnte dauern.

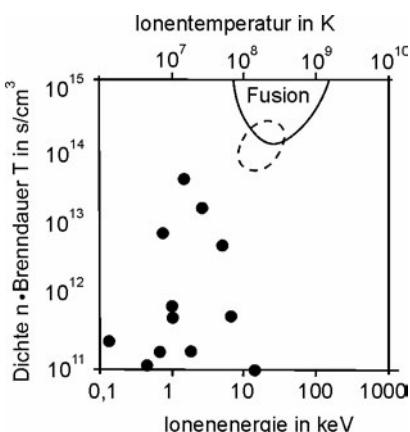


Bild 12-15

Für die Kernfusion in einem D-T-Plasma muss das Wertepaar  $n \tau$  (Teilchendichte mal Zeitdauer der hohen Temperatur) und  $T$  (Temperatur) im dargestellten Bereich liegen (Lawson-Diagramm). Die Punkte beschreiben existierende Versuchsanlagen, der gestrichelte Bereich die Vorhersagen für neuere Anlagen

## H-Bombe

Während der Explosion von Atombomben entstehen Temperaturen von vielen Millionen Grad. Bei einer Wasserstoffbombe befindet sich ein Gemisch aus Deuterium und Tritium in unmittelbarer Nähe des nuklearen Sprengkopfes. Nach der Zündung wird durch die Fusion zusätzliche Energie frei, die die Sprengkraft einer Atombombe um den Faktor 20 erhöht. In manchen Konstruktionen wird das Tritium während der Explosion der primären Bombe durch Neutronen in Lithium-6-Deuterid erzeugt. Eine H-Bombe mit 0,2 Mt Sprengkraft wiegt etwa 120 kg und verursacht die Zerstörung von 20 Nagasaki-Bomben. Eine Weiterentwicklung ist die Neutronenbombe, die durch Neutronen tötet, aber wenig Fallout und eine reduzierte Druckwelle erzeugt. In ihr läuft hauptsächlich eine D-T-Reaktion ab, wobei die nach Gleichung 12-11a entstehenden Neutronen möglicherweise durch n-2n-Reaktionen vervielfacht werden.

**Beispiel 12.3.2a** Die Sonne strahlt in Erdentfernung ( $r = 150$  Millionen km) eine Leistungsdichte von  $S = 1,4 \text{ kW/m}^2$ . Welche Masse verliert die Sonne pro Sekunde?

$$W/t = \Delta mc_0^2/t = S \cdot 4\pi r^2. \text{ Daraus folgt: } \Delta m/t = S \cdot 4\pi r^2/c_0^2 = 4,4 \cdot 10^9 \text{ kg/s.}$$

**Beispiel 12.3.2b** Welche Energie wird bei der Fusion von 1 kg Deuterium mit Tritium nach der Gleichung frei:  $D + T = He + n + 17,6 \text{ MeV}$ ? Wie hoch ist der Preis bei 0,10 €/Wh?

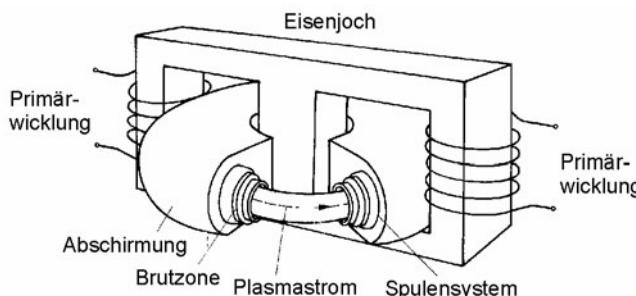
In 1 mol  $\Rightarrow$  g Deuterium befinden sich  $N_A$  (Tab. 1.3) Atome. Damit erhält man für 1 kg  $N = 3 \cdot 10^{26}$  Atome. Die Energie beträgt:  $E = N \cdot 17,6 \text{ MeV} = 2,3 \cdot 10^8 \text{ kWh}$  mit einem Preis von 23 Millionen €

## 12.3.4 Fusionsreaktoren

Zur Energiegewinnung durch die kontrollierte Kernfusion muss bei einer Temperatur von  $10^8 \text{ K}$  das D-T-Gemisch hinreichend lange ohne Wandkontakt zusammengehalten werden. Beim *Träigkeitseinschluss* werden kleine Kugeln aus gefrorenem Deuterium und Tritium durch Hochleistungslaser (oder mit Elektronen-, bzw. Ionenstrahlen) aufgeheizt. Das entstehende Plasma wird aufgrund seiner Trägheit eine kurze Zeit zusammenbleiben, so dass Kernfusion einsetzen kann. Andere Verfahren arbeiten mit dem *magnetischen Einschluss*.

## Plasma

Wasserstoff, und dessen Isotope Deuterium und Tritium, sind oberhalb von 20000 K ionisiert, d. h. in Kerne und Elektronen zerlegt. Die atomare Bindung hat ihre Bedeutung verloren, und die Elektronen und Kerne verhalten sich wie unabhängige Gase. Dieser Zustand der Materie wird als *Plasma* bezeichnet. Man kann ein Plasma mit Hilfe von Magnetfeldern von den Wandmaterialien fernhalten, und kurzzeitig Temperaturen von einigen Millionen Grad erzeugen.



**Bild 12-16**

Prinzip eines Tokamaks zur Erzeugung der Kernfusion. Die Primärwicklung erzeugt im Plasma einen Strom (Sekundärwicklung) wie in einem Transformator. Das Plasma wird durch ein ringförmiges Magnetfeld zusammengehalten.

## Tokamak

In Bild 12-16 zeigt einen experimentellen Fusionsreaktor, der einem Transformator ähnelt. Bei dem *Tokamak* wird an die Primärwicklung ein kurzer Strompuls angelegt. Die Sekundärwicklung ist ein leitendes D-T-Plasma. Zusätzlich wird um das Plasmariohr eine Spule gelegt, die ein kreisförmiges Magnetfeld in Richtung des Plasmastromes erzeugt. Auf den Plasmastrom wirkt damit die Lorentzkraft, die das Plasma zusammenschnürt. Es wird komprimiert und kann damit Temperaturen von einigen 10 Millionen Grad erreichen (Bild 12-15)

## Stellerator

Beim *Tokamak* ist nur Pulsbetrieb möglich, eine kontinuierliche Fusion kann beim *Stellerator* auftreten. Dieser besteht aus einer ringförmigen Spule, deren Magnetfeld das Plasma von der Wandung fernhält. Nachteilig ist, dass eine zusätzliche externe Heizung für das Plasma erforderlich ist. Diese kann durch Teilchenstrahlung oder elektromagnetische Wellen erfolgen.

## Vorteile

Der wesentliche Vorteil von Fusionsreaktoren gegenüber Kernreaktoren liegt in Folgendem:

- erhöhte Sicherheit, da eine Kernschmelze nicht auftreten kann,
- praktisch unbegrenzter Energievorrat,
- Entstehung von radioaktivem Abfall mit kleiner Lebensdauer, da keine Spaltprodukte entstehen sondern hauptsächlich eine Neutronenaktivierung.

## 12.4 Strahlenschutz

Wir leben in einer Umwelt mit natürlicher und künstlicher Radioaktivität. Das Verhalten von Strahlung in Materie und die biologische Wirkung ist daher von erheblicher Bedeutung.

### 12.4.1 Wechselwirkung von Strahlung und Materie

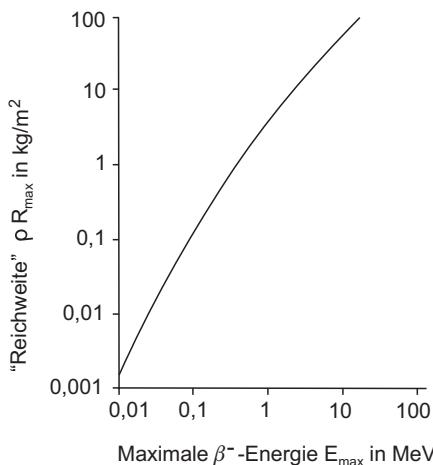
Strahlung wird in Materie durch unterschiedliche Mechanismen absorbiert. Es wird zwischen geladenen Teilchen, wie  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Strahlung, ungeladenen Neutronen und  $\gamma$ - oder Röntgenstrahlung unterschieden.

#### $\alpha$ -Strahlung

$\alpha$ -Teilchen, d. h. He-Kerne, haben nur eine sehr kurze Reichweite in Materie. Die Strahlung verliert durch Ionisierung Energie, wobei die Bewegungsrichtung wegen der großen Masse der  $\alpha$ -Teilchen weitgehend geradlinig bleibt. In Luft unter Normalbedingungen kann die mittlere Reichweite  $R$  (in mm) aus folgender Faustformel abgeschätzt werden:

$$R = 3,1 \cdot E_{\alpha}^{3/2} \quad \alpha\text{-Reichweite } R \quad (12.12)$$

In der Zahlenwertgleichung muss die Energie  $E_{\alpha}$  in MeV eingesetzt werden. Für 5 MeV erhält man  $R \approx 5$  mm, d. h. 50 % der  $\alpha$ -Teilchen haben bei diesem Wert ihre Energie verloren. Die maximale Reichweite ist etwas größer. Die Reichweite in Festkörpern liegt, je nach Ordnungszahl und  $\alpha$ -Energie, um 10  $\mu\text{m}$ , z. B. Papier 50  $\mu\text{m}$ , Al 20  $\mu\text{m}$  und Pb 4  $\mu\text{m}$ . Ähnliche Aussagen gelten für Protonen, Deuteronen und andere beschleunigte Ionen.

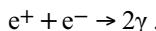
**Bild 12-17**

Maximale Reichweite  $\rho R_{\max}$  von  $\beta$ -Strahlung in Abhängigkeit von der Energie  $E_{\max}$   
( $\rho$  = Dichte des Materials)

### $\beta$ -Strahlung

$\beta$ -Teilchen, d. h. Elektronen aus dem Kern, sind 2000-mal leichter als Protonen. In Materie werden die Teilchen daher stark an den Atomen abgelenkt und der Weg verläuft unregelmäßig zickzackförmig. Für die Energieverluste sind folgende Prozesse verantwortlich: Ionisation und atomare Anregung sowie Bremsstrahlung.

Bei  $\beta^+$ -Strahlung findet *Vernichtungsstrahlung* mit einem atomaren Elektron statt und es entstehen zwei  $\gamma$ -Quanten mit je 511 keV (Abschnitt 12.2.2)



Vernichtungsstrahlung

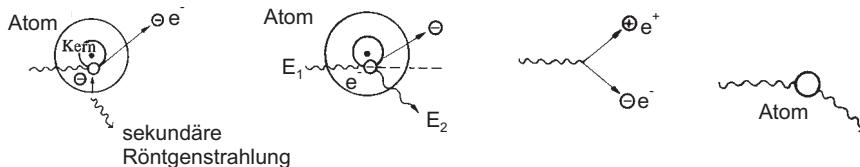
Der unregelmäßige Weg der  $\beta$ -Teilchen in Materie führt zu einer starken Rückstreuung. Die Teilchenflussdichte in Materie fällt anfangs näherungsweise exponentiell ab. Die maximale Reichweite  $R_{\max}$  kann aus Bild 12-17 entnommen werden, in dem  $\rho R_{\max}$  ( $\rho$  = Dichte) in Abhängigkeit von der maximalen  $\beta$ -Energie aufgetragen ist. Beispielsweise erhält man für Aluminium mit  $\rho = 2720 \text{ kg/m}^3$  bei  $E_{\max} = 1 \text{ MeV}$  eine maximale Reichweite von  $R_{\max} = 4,8 \text{ mm}$ .

a) Photoeffekt

b) Comptoneffekt

c) Paarbildung

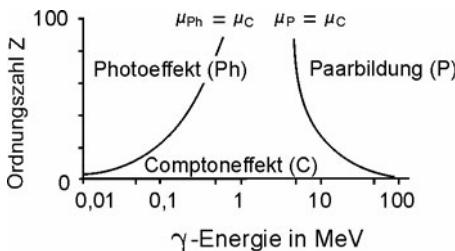
d) Rayleigh-Streuung

**Bild 12-18** Wechselwirkung von  $\gamma$ -Strahlung und Materie:

a) Photoeffekt. b) Comptoneffekt c) Paarbildung. d) Rayleigh-Streuung

### $\gamma$ -Strahlung

$\gamma$ -Strahlung und Röntgenstrahlung werden in Materie durch verschiedene Prozesse geschwächt (Bild 12-18)

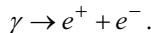
**Bild 12-19**

Je nach Energie überwiegt ein Effekt bei der Wechselwirkung von  $\gamma$ -Strahlung mit Materie

Der *Photoeffekt* bestimmt die Absorption bei Energien unterhalb von 100 keV bei  $Z \geq 20$  Bild 12-19) Dabei wird ein Elektron insbesondere aus der K- oder L-Schale herausgeschlagen. Durch Auffüllen der Löcher mit Elektronen entsteht charakteristische Röntgenstrahlung (Abschnitt 10.3.2)

Beim *Comptoneffekt* stößt ein Photon mit einem ungebundenen oder gebundenen Elektron (Abschnitt 10.1.2) zusammen. Das Photon verliert an Energie und wird abgelenkt. Das gestoßene Elektron wird im Festkörper genau wie ein  $\beta$ -Teilchen gebremst. Bei der Schwächung eines  $\gamma$ -Strahls dominiert der Comptoneffekt im Energiebereich zwischen etwa 100 keV und 5 MeV Bild 12-19)

Der *Paareffekt* beschreibt die Entstehung eines Elektron-Positron-Paares nach der Reaktion



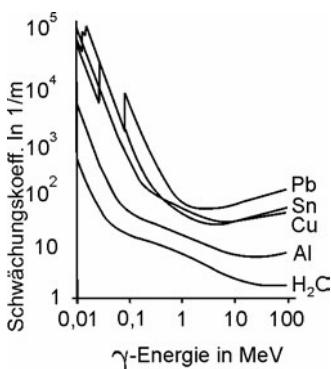
Paareffekt

Die Gleichung stellt die Umkehrung der Zerstrahlung eines Positrons dar. Die Erzeugung erfordert eine Energie von mindestens 1,026 MeV, was der doppelten Elektronenmasse entspricht.

Die *Rayleigh-Streuung* beschreibt die elastische Streuung ohne Energieverluste; es wird nur die Richtung der  $\gamma$ -Strahlung geändert. Dieser Effekt trägt nicht zur Absorption sondern zur Schwächung eines Strahls durch Ablenkung der  $\gamma$ -Quanten bei.

Die Schwächung von  $\gamma$ - oder Röntgenstrahlung in Materie gehorcht einem Exponentialgesetz:

$$\Phi = \Phi_0 e^{-\mu x} .$$

 $\gamma$ -Schwächung (12.13a)**Bild 12-20**

Linearer Schwächungskoeffizient für  $\gamma$ -Strahlung bei verschiedenen Materialien

Die Flussdichte  $\Phi$  (in Photonen/(m<sup>2</sup> s)) nimmt mit der Strecke  $x$  in das Material hinein ab.  $\Phi_0$  ist die einfallende Flussdichte. Der Schwächungskoeffizient  $\mu$  (in m<sup>-1</sup>) wird durch die beschriebenen Effekte bestimmt und ist in Bild 12-20 für verschiedene Elemente dargestellt.

Die Reichweite  $R$  der Strahlung kann durch den Wert beschrieben werden, bei welchem die Zahl der Photonen auf den Wert  $1/e \approx 37\%$  gefallen ist:

$$R = \frac{1}{\mu} . \quad \gamma \text{ Reichweite } R \quad (12.13b)$$

Für 100 keV beträgt  $R = 0,2$  mm für Blei und 2 cm für Aluminium Bild 12-20)

**Beispiel 12.4.1a** Wie groß ist die Reichweite von  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strahlen in Luft bei 1 MeV?

$\alpha$ -Strahlung: Nach (12.12) gilt:  $R \approx 1$  mm (0 % Wert)

$\beta$ -Strahlung: Aus Bild 12-17 liest man bei 1 MeV ab:  $\rho R_{\max} \approx 3 \text{ kg/m}^2$ . Mit der Luftdichte  $\rho \approx 2,8 \text{ kg/m}^3$  erhält man für die maximale Reichweite  $R_{\max} \approx 1 \text{ m}$ .

**Beispiel 12.4.1b** Wie groß ist die Reichweite von  $\gamma$ -Strahlung in Wasser und Blei bei 100 keV?

Man entnimmt Bild 12-20: Wasser:  $R = 1/\mu \approx 1/10 \text{ m}$ . Blei:  $R = 1/\mu \approx 1/5000 \text{ m} = 0,2 \text{ mm}$ .

**Beispiel 12.4.1c** Wie dick muss eine Wand aus Blei sein, damit 1000 keV Röntgenstrahlung auf 1 % des Ausgangswertes abgeschwächt wird ( $\mu = 5 \text{ mm}^{-1}$ )?

Nach (12.13a) gilt:  $\phi/\phi_0 = 0,001 = \exp(-\mu x)$   $x = -\ln 0,001/5 \text{ mm} = 4 \text{ mm}$ .

**Beispiel 12.4.1d** Welche Effekte spielen in der bildgebenden Röntgentechnik eine wichtige Rolle?

Es handelt sich um den Photoeffekt (Absorption) und den Comptoneffekt (Streuung). Bild 12-19 zeigt in Abhängigkeit von der Ordnungszahl und der Energie, welcher Effekt wichtiger ist. Die Absorption ist für die Bildgebung verantwortlich und die Streuung für die Bildunschärfe.

## 12.4.2 Messung radioaktiver Strahlung

Radioaktive Strahlung löst in Materie Elektronen aus, die als Strom oder Spannung nachgewiesen werden.

### Ionisationskammer

In einer Ionisationskammer werden die in Luft oder einem anderen Gas entstehenden Elektronen und Ionen durch Anlegen eines elektrischen Feldes an die Elektroden gesaugt und als Strom nachgewiesen. Zur Messung von  $\alpha$ - und energieärmer  $\beta$ -Strahlung wird das radioaktive Material in die Kammer eingebracht. Bei  $\beta$ -Strahlung höherer Energie wird ein dünnes Fenster aus einer Folie in die Ionisationskammer eingebaut, so dass sich das radioaktive Material auch außen befinden kann.

Der Nachweis von  $\gamma$ -Strahlung erfolgt hauptsächlich durch die aus den Wänden gelösten Elektronen. Die Empfindlichkeit wächst bei gesteigertem Gasdruck. Zur Dosimetrie von Röntgen- oder  $\gamma$ -Strahlung werden *gewebeäquivalente Materialien* verwendet.

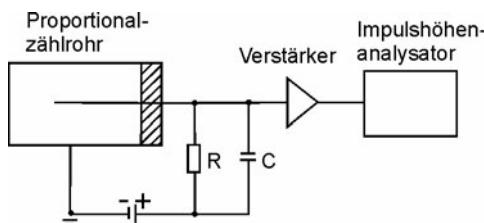


Bild 12-21  
Aufbau eines Proportionalzählrohrs

## Proportionalzählrohr

Mit Ionisationskammern wird ein Strom gemessen, der als Mittelwert die ionisierende Wirkung zahlreicher Quanten angibt. Proportionalzählrohre können einzelne  $\alpha$ -,  $\beta$ - oder  $\gamma$ -Teilchen und deren Energie nachweisen. In die Achse eines Rohres wird ein isolierter Draht angebracht, an den eine positive Spannung gelegt wird (Bild 12-21). Als Füllgase werden beispielsweise Argon, Methan oder Mischungen eingesetzt. In der Nähe des Drahtes entsteht eine hohe Feldstärke, so dass die im Gas erzeugten Elektronen schnell Energie gewinnen. Dadurch sind sie in der Lage, weitere Elektronen aus den Atomen zu schlagen (Stoßionisation, Bild 8.37). Es entsteht eine Vervielfachung der Ionen, so dass jedes ionisierte Teilchen eine relativ große Ladung erzeugt. Der entstehende Strom wird an einem Widerstand in einen Spannungspuls umgewandelt und elektronisch verarbeitet. Die Höhe der maximalen Spannung ist ein Maß für die Energie des ionisierenden Teilchens.

## Geiger-Müller-Zählrohr

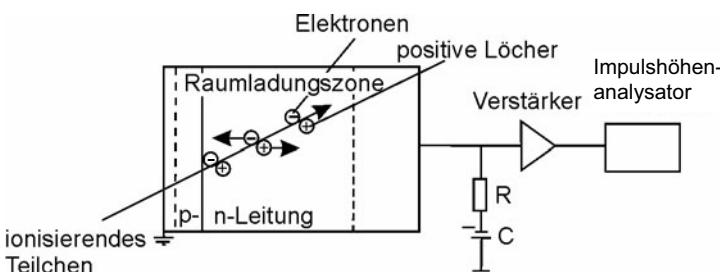
Steigert man die Spannung eines Proportionalzählrohrs, steigt die Pulshöhe, bis sie schließlich nicht mehr von der Energie abhängt. Man nennt die Anordnung dann *Geiger-Müller-Zählrohr*, mit dem man die Quanten zählen kann.

## Szintillationszähler

Bei der Absorption eines  $\gamma$ -Quants durch den Photoeffekt in NaI-Kristallen entsteht ein Lichtblitz, verursacht durch die Anregung der Atome durch das Photolektron. Dieser kurze Lichtpuls wird mit einem *Photomultiplier* oder *Sekundärelektronen-Vervielfacher* in ein elektronisches Signal umgewandelt.

## Halbleiterdetektoren

Das Prinzip von Halbleiterdetektoren ähnelt dem der Ionisationskammern. In Materie werden durch Strahlung Elektronen erzeugt, die einen Strompuls produzieren. In der  $\gamma$ -Spektroskopie werden spezielle Halbleiterdiode eingesetzt, insbesondere aus Ge und Si. Bei der Herstellung von Ge(Li) und Si(Li)-Detektoren wird Lithium in die Kristalle eingedriftet. Zwischen dem p- und n-Gebiet entsteht eine ausgedehnte ladungsträgerarme Zone, die als Intrinsic- oder i-Schicht bezeichnet wird. In dieser Schicht von einigen cm Dicke werden durch die Strahlung Elektronen erzeugt, die bei angelegter Sperrspannung einen Strompuls liefern (Bild 12-22). Ähnlich arbeiten HPGe-Detektoren, wobei HP für high purity steht. Halbleiterdetektoren hoher Auflösung für  $\gamma$ -Spektroskopie müssen mit flüssigem Stickstoff gekühlt werden. Es gibt auch Halbleiterdetektoren für  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strahlung, die der Reichweite angepasst und wesentlich dünner sind.



**Bild 12-22** Aufbau eines pn-Halbleiterdetektors (pin) für  $\gamma$ -Strahlung. Für  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strahlung sind die Detektoren wegen der geringeren Reichweite dünner.

### 12.4.3 Dosimetrie

Radioaktive Strahlung wirkt stark schädigend auf Menschen und biologisches Material, so dass die biologische Strahlenmesstechnik, die *Dosimetrie*, erhebliche Bedeutung hat. Im Folgendem werden die wichtigsten Messgrößen des Strahlenschutzes definiert.

#### Aktivität *A*

Die Zahl der Umwandlungen pro Sekunde wird als *Aktivität* bezeichnet. Die Einheit lautet:

$$1 \text{ Bequerel} \equiv \text{Bq} \equiv \text{s}^{-1}$$
Aktivität, Bequerel (12.14a)

Früher wurde die Einheit Curie eingesetzt:

$$1 \text{ Curie} \equiv 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq} \equiv 3,7 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$$
Aktivität, Curie (12.14b)

Als Beispiel sei die natürliche spezifische Aktivität des Grundwassers zwischen 0,05 und 0,5 Bq/kg erwähnt.

#### Energiedosis *D*

Die *Energiedosis D* gibt die absorbierte Energie  $dE$  pro Massenelement  $dm$  an:

$$D = \frac{dE}{dm} \quad [D] = \frac{\text{J}}{\text{kg}} = \text{Gray} = \text{Gy}.$$
Energiedosis *D* (12.15a)

Die Einheit der Energiedosis beträgt  $[D] \text{J/kg}$  Gray. Die ältere Einheit lautet:

$$1 \text{ Rad} \equiv \text{rd} \equiv 0,01 \text{ Gy}.$$
Rad und Gray (12.15b)

Zur Kennzeichnung eines Strahlenfeldes ist die Angabe des betrachteten Materials notwendig, wobei meist Gewebe oder gewebeähnliche Materialien betrachtet werden. Die tödliche Energiedosis von 10 Gy (1000 rd) führt lediglich zu einer Temperaturerhöhung von 0,002 °C im Gewebe. Damit wird klar, dass spezielle nichtthermische Schädigungsmechanismen vorliegen, wie die Erzeugung von Radikalen mit anschließenden biologischen Reaktionen.

#### Ionendosis *J*

Die *Ionendosis J* gibt die erzeugte Ladung  $dQ$  pro Massenelement  $dm$  an:

$$J = \frac{dQ}{dm} \quad [J] = \frac{\text{C}}{\text{kg}}.$$
Ionendosis *J* (12.16a)

Die Einheit der Ionendosis beträgt  $[J] \text{C/kg}$ . Der Zusammenhang mit der älteren Einheit Röntgen lautet:

$$1 \text{ Röntgen} \equiv \text{R} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ C/kg}.$$
Röntgen (12.16b)

Auch bei der Ionendosis *J* muss zur eindeutigen Kennzeichnung des Strahlungsfeldes das bestrahlte Material angegeben werden. Für Luft und Gewebe erhält man folgenden Zusammenhang für die Zahlenwerte:

$$\{ \text{R} \} \approx \{ \text{rd} \} \equiv 0,01 \text{ Gy}$$
ray und Röntgen (12.16b)

## Äquivalentdosis $H$

Zur Beurteilung der biologischen Wirkung wurde die Äquivalentdosis  $H$  eingeführt. Nicht jede Strahlung ist gleich gefährlich; der dimensionslose *Qualitätsfaktor*  $Q$  (icht mit der Ladung  $Q$  verwechseln) ist ein Maß für den verursachten Schaden:

$$H = QD \quad [H] \text{ Sievert} \Leftrightarrow \text{Äquivalentdosis} \quad H \quad (12.17a)$$

Die Qualitätsfaktoren  $Q$  verschiedener Strahlungsarten zeigt Tabelle 12.2. Die Einheit der Äquivalentdosis  $H$  ist die gleiche wie die der Dosis  $D$ : 1 J/kg. Zur Unterscheidung wurde der Name Sievert oder Sv eingeführt. Die Einheit von  $H$  lautet somit  $[H] \text{ Sievert} \Rightarrow \text{Sv}$ . Statt Sievert wird noch die ältere Bezeichnung rem benutzt (em steht für r roentgen equivalent man).

Es gilt:

$$1 \text{ rem} \Rightarrow 0,01 \text{ Sv.} \quad \text{Rem und Sievert} \quad (2.17b)$$

Zur Kennzeichnung der biologischen Wirkung von Strahlung muss also  $H$  in Sievert oder rem angegeben werden.

**Tabelle 12.2** Qualitätsfaktoren  $Q$  für unterschiedliche Strahlungsarten bei äußerer Bestrahlung

Strahlung	$Q$
Photonen, Elektronen, Positronen	1
Neutronen, Protonen, einfach geladene Ionen	10
$\alpha$ -Teilchen, mehrfach geladene Ionen	20

Wird ein Organ bestrahlt, bezeichnet man die Äquivalentdosis als Organdosis. Bei Bestrahlung mehrerer Organe oder des ganzen Körpers berechnet man die effektive Dosis als die gewichtete Summe der Organdosen. Die Wichtungsfaktoren betragen z. B.: 0,20 für Keimdrüsen, 0,12 für Knochenmark, 0,12 für Dickdarm, 0,12 für Lunge, 0,12 für Magen, 0,05 für Brust und 0,05 für Blase.

## Biologische Wirkung

Tabelle 12.3 zeigt die biologischen Konsequenzen einer Bestrahlung mit höherer Dosis. Im Vergleich dazu sind die normalen, natürlichen und bisherigen künstlichen Werte in Tabelle 12.4 zusammengefasst. Die natürliche radioaktive Belastung des Menschen liegt jährlich bei 2 mSv  $\Rightarrow$  200 mrem. Über das gesamte Leben werden somit etwa 0,2 Sv  $\Rightarrow$  20 rem akkumuliert. Röntgenaufnahmen und die nuklearmedizinische Diagnostik belastet den Menschen im Mittel mit über 1 mSv/Jahr. Es ist bewiesen, dass schon geringe Strahlendosen, welche die natürlichen Werte überschreiten, zu genetischen und cancerogenen Schäden führen, die in Tabelle 12.3 nicht enthalten sind. Tabelle 12.5 stellt die natürliche spezifische Aktivität einiger Nahrungsmittel dar.

**Tabelle 12.3** Wirkung bei kurzzeitiger Ganzkörperbestrahlung mit  $\gamma$ -Strahlung

Dosis	1. Woche	2. Woche	3. Woche	4. Woche
0,25 Sv 25 rem	keine subjektiven Symptome, Abnahme der Zahl weißer Blutkörper	Blutbild wird normal		
subletal 1 Sv	keine subjektiven Symptome	Blutbild wird normal	Unwohlsein, Haarausfall, wunder Rachen	Kräfteverfall, Erholung wahrscheinlich
100 rem				
letal 4 Sv	Erbrechen, Abnahme der Zahl der weißen Blutkörperchen auf 1000/mm <sup>3</sup>	keine deutlichen Symptome	wie oben, Entzündungen im Dünndarm	Kräfteverfall, 50 %odesfälle
400 rem				

**Tabelle 12.4** Mittlere Strahlenbelastung im Jahr eines erwachsenen Menschen

## a) Natürliche Strahlung

	Strahlensquelle	Art	Mittlere jährliche Dosis in mSv	
Äußere Be-strahlung	Kosmische Strahlung Terrestrische Strahlung	$\gamma$ , $\beta$ $\gamma$	0,30 0,42	Summe: 0,72
Innere Be-strahlung	$^{3}\text{H}$ , $^{14}\text{C}$ , $^{22}\text{Na}$ (kosmogen) $^{40}\text{K}$	$\beta$ $\beta$ ( $\gamma$ )	0,01 0,17	
Atmung und Nahrung)	Uranreihe Thoriumreihe	$\alpha$ ( $\beta$ , $\gamma$ ) $\alpha$ ( $\beta$ , $\gamma$ )	0,4 bis 1,0 0,1 bis 0,2	Summe: 0,7 bis 1,4
				Gesamte natürliche Belastung: ca. 1,5 bis 2,0

**Tabelle 12.4** Mittlere Strahlenbelastung im Jahr eines erwachsenen Menschen

## b) Zivilisatorische Strahlung

Ursache		Keimdrüseldorfje Untersuchung in mSv	Mittlere jährliche Dosis in mSv
Röntgen:	Schirmbildaufnahme	0,0002 - 0,03	
	Lungendurchleuchtung	0,003 - 0,06	
	Magendarstellung	0,6 - 3,4	
	Kontrasteinlauf	0,1 - 29	
Szintigraphie:	Schilddrüse ( $^{131}\text{I}$ )	0,02 - 0,9	
	Hirn ( $^{99\text{m}}\text{Tc}$ )	0,2 - 3	
	Leber ( $^{198}\text{Au}$ )	0,04 - 3	
	Bauchspeicheldrüse ( $^{75}\text{Se}$ )	9 - 60	
Medizinische Strahlenanwendung, jährliches Mittel			0,5 bis 1,0
Fallout aus Kernwaffenversuchen (Auswirkung in Deutschland)			0,01
Emission von Kern- und Kohlekraftwerken			-0,01
Reaktorunfälle (Tschernobyl, Auswirkung in Deutschland im 1. Jahr)			1

**Tabelle 12.5** Natürliche spezifische Aktivität  $A$  in Lebensmitteln

Produkt	Nuklid	$A$ in mBq/1	Produkt	Nuklid	$A$ in mBq/kg
Trinkwasser	$^3\text{H}$	20 bis 70	Milch	$^{40}\text{K}$	46
Trinkwasser	$^{40}\text{K}$	200	Rindfleisch	"	116
Trinkwasser	$^{238}\text{U}$	0,4	Hering	"	136

**Beispiel 12.4.3a** Beweisen Sie, dass die tödliche Energiedosis von  $D = 10 \text{ Gy}$  zu einer Temperaturerhöhung von nur  $0,002^\circ\text{C}$  führt.

Die Gleichung zur spezifischen Wärmekapazität  $c$  lautet §.16a) d  $Q = mc \cdot T$

Daraus folgt: d  $T = dQ / mc = D / c = 0,002^\circ\text{C}$ .

Dabei wurde  $dQ/m = D$  gesetzt und für  $c$  der Wert für Wasser eingesetzt:  $c = 4200 \text{ J/kgK}$

**Beispiel 12.4.3b** Bei einer Röntgendifurchleuchtung während einer Operation herrscht eine Dosisleistung Dosis pro Zeit von  $\dot{D} = 0,02 \text{ mGy/s}$ . Wie groß sind näherungsweise die Dosis  $D$ , die Äquivalentdosis  $H$  und die Ionendosis  $J$  nach 10 min?

Dosis:  $D = \dot{D} t = 0,02 \cdot 600 \text{ mGy} = 12 \text{ mGy}$ . Äquivalentdosis (§.2.17a)  $H = DQ / 2 \text{ mSv}$ . Ionendosis: Für Röntgenstrahlung gilt (§.2.16b)  $0,01 \text{ Gy} = 0,000258 \text{ C/kg}$ . Damit erhält man:  $J = 3,1 \cdot 10^{-4} \text{ C/kg}$ .

**Beispiel 12.4.3c** In der Nuklearmedizin werden Röntgenstrahlung,  $\gamma$ -Strahlung, Elektronenstrahlung,  $\beta$ -Strahlung, Neutronen,  $\alpha$ -Strahlung, Protonen und mehrfach geladene Ionen eingesetzt. Geben Sie die Äquivalenzdosis für 1 mGy an.

Es gilt  $H = DQ$ , wobei  $Q$  aus Tabelle 12.2 entnommen wird.

**Beispiel 12.4.3d** Wie groß ist die natürliche Strahlenbelastung und die mittlere Belastung durch die Medizintechnik? Natur: 1,5 bis 2 mSv, Medizintechnik: 0,5 bis 1 mSv.

## 12.5 Physik der Elementarteilchen

Materie besteht aus Atomen, die aus dem Kern und der Hülle aufgebaut sind. Der Kern ist aus Protonen und Neutronen zusammengesetzt, die in Quarks zerlegt werden können. Heutzutage glaubt man, dass die Quarks nicht weiter gespalten werden können, und man nennt sie daher Elementarteilchen. Eine zweite Klasse von Elementarteilchen sind die Leptonen, zu denen die Elektronen zählen. Letztendlich ist die Materie also aus Elementarteilchen aufgebaut.

### 12.5.1 Fundamentale Wechselwirkungen

Es sind vier verschiedene Arten von Kräften, auch *Wechselwirkungen* genannt, zwischen Elementarteilchen bekannt (Tabelle 12.6) die Gravitation, der Elektromagnetismus und zwei Arten von Kernkräften, die man als schwache und starke Wechselwirkung bezeichnet. Während die Gravitation und die elektromagnetischen Kräfte zu den täglichen Erfahrungen zählen, entzieht sich die starke und schwache Wechselwirkung normalerweise einer direkten Beobachtung. Sie wirken im Bereich der Atomkerne.

**Tabelle 12.6** Eigenschaften der vier fundamentalen Wechselwirkungen

	Gravitation	Elektromagnetische Wechselwirkung	Schwache Wechselwirkung	Starke Wechselwirkung
Teilchen	Alle	Ladungen	Leptonen, Quarks	Quarks, Hadronen
Beispiele	Planeten	Atome, Moleküle	$\beta$ -Übergang	Atomkern
Stärke	$10^{-39}$	$10^{-2}$	$10^{-14}$	1
Reichweite	$\infty$	$\infty$	$10^{-18} \text{ m}$	$\infty$ (Quarks) $10^{-15} \text{ m}$ (Hadronen)
Feldquanten	Graviton	Photon	$W^+, W^-, Z^0$	Gluonen

### Feldquanten

Die Übertragung der Kräfte erfolgt durch *Feldquanten*, die für jede Wechselwirkung unterschiedlich sind (Tabelle 12.6). Die Gravitationskraft zwischen Massen wird durch den Austausch von *Gravitonen* bewirkt, die elektromagnetischen Kräften zwischen Ladungen durch *Photonen*. Die entsprechenden Feldquanten für die starke und schwache Wechselwirkung bezeichnet man als *Gluonen* und *Weakonen* ( $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z^0$  –Ströme). Man stellt sich vor, dass die Kräfte durch einen Fluss von Feldquanten zwischen den Teilchen verursacht werden. Die Feldquanten werden also ständig emittiert und absorbiert.

### Struktur der Materie

Die vier fundamentalen Wechselwirkungen beeinflussen den Aufbau der Materie. Im Mikrokosmos der Atomkerne dominieren die starke und schwache Kernkraft. Außerhalb der Kerne bestimmen die elektromagnetischen Kräfte den Aufbau der Atome und Moleküle. Diese Kräfte sind auch allein maßgebend für die technischen Geräte und für die chemischen und physiologischen Vorgänge. Die Gravitation ist die schwächste der vier Grundkräfte. Sie wirkt erst bei großen Massen und sie bestimmt den Aufbau des Universums.

### 12.5.2 Beschreibung der Elementarteilchen

Seit 1970 weiß man, dass drei Gruppen von Elementarteilchen existieren: *Leptonen*, *Quarks* und *Feldquanten*. Aus diesen Gebilden werden hunderte in Tabelle 12.7 gezeigt, dass es zu jedem Teilchen ein Antiteilchen mit entgegengesetzten Eigenschaften gibt.

**Tabelle 12.7** Liste der Elementarteilchen: Leptonen, Quarks, Feldquanten

Leptonen Teilchen		Feldquanten		Leptonen Antiteilchen	
Name	Ladung	Name		Name	Ladung
$e^-$ Elektron	- e <sub>0</sub>	$\Gamma$	Graviton	$e^+$	Positron - e 0
$\mu^-$ Myon	- e <sub>0</sub>	$\gamma$	Photon	$\mu^+$	Antimyon - e 0
$\tau^-$ Tauon	- e <sub>0</sub>	$G$	Gluonen	$\tau^+$	Antitauon - e 0
$v_e$ e-Neutrino	0	$W^\pm, Z^0$	Weakonen	$\bar{v}_e$	e-Antineutrino 0
$v_\mu$ $\mu$ -Neutrino	0			$\bar{v}_\mu$	$\mu$ -Antineutrino 0
$v_\tau$ $\tau$ -Neutrino	0			$\bar{v}_\tau$	$\tau$ -Antineutrion 0

Quarks Teilchen				Quarks Antiteilchen	
u	Up	$\frac{2}{3}\psi$	0	$\bar{u}$	Anti-Up - $\frac{2}{3}\psi$ 0
d	Down	- $\frac{1}{3}\psi$	0	$\bar{d}$	Anti-Down - $\frac{1}{3}\psi$ 0
s	Strange	- $\frac{1}{3}\psi$	0	$\bar{s}$	Anti-Strange - $\frac{1}{3}\psi$ 0
c	Charme	$\frac{2}{3}\psi$	0	$\bar{c}$	Anti-Charme - $\frac{2}{3}\psi$ 0
b	Bottom	- $\frac{1}{3}\psi$	0	$\bar{b}$	Anti-Bottom - $\frac{1}{3}\psi$ 0
t	Top	$\frac{2}{3}\psi$	0	$\bar{t}$	Anti-Top - $\frac{2}{3}\psi$ 0

## Leptonen

Das griechische Wort *leptos* „leicht“ weist darauf hin, dass Leptonen leichte Elementarteilchen sind. Die bekanntesten Vertreter dieser Klasse sind das Elektron und sein Antiteilchen das Positron. Die Myonen und Tauonen sind instabile Teilchen, die beispielsweise in Elektronen und Neutrinos zerfallen. Die Neutrinos sind ungeladene Teilchen, die vermutlich ähnlich wie Photonen keine Ruhemasse besitzen. Das Universum enthält eine ungeheure Menge an Neutrinos, etwa 10<sup>9</sup>-mal so viele wie Kernteilchen. Da sie nur auf die schwachen Kräfte reagieren, spürt man diese Teilchen nicht und sie durchdringen ohne weiteres die Erde. Falls die Neutrinos doch eine kleine Ruhemasse aufweisen, hätte das einen bremsenden Einfluss auf die Expansion des Weltalls.

## Quarks

Das Wort *Quark* ist eine Phantasiebezeichnung aus dem Buch Finnegan's Wake von J. Joyce: „Three quarks for master mark“ oder frei übersetzt „Drei Käsehocks machen einen ganzen Mann.“ Diese relativ schweren Elementarteilchen treten nicht isoliert, sondern nur in Gruppen auf. Beispielsweise bestehen Proton und Neutron aus je drei Quarks. Insgesamt existieren 18 verschiedene Quarks; in Tabelle 12.7 sind nur s echs aufgeführt: u, d, s, c, b und t. Jedes der aufgezählten Teilchen tritt in drei verschiedenen Versionen auf, die man als rot, grün und blau unterscheidet. Natürlich haben diese Namen nichts mit wirklichen Farben zu tun, sondern es handelt sich bestimmte Quantenzahlen. Zu jedem Quark gibt es ein Antiteilchen.

## Feldquanten

Die dritte Elementarteilchengruppe sind die Feldquanten: *Gravitonen*, *Photonen*, *Gluonen* und *Weakonen* (Tabelle 12.6 und 12.7) Das Graviton existiert mit hoher Wahrscheinlichkeit, konnte aber bisher noch nicht experimentell nachgewiesen werden. Möglicherweise gibt noch

weitere derartige Quanten. Es wurde bereits dargelegt, dass die Feldquanten die Überträger der Kräfte zwischen den Elementarteilchen und der Materie sind.

### 12.5.3 Quarks und Hadronen

Nach den gegenwärtigen Erkenntnissen ist die Materie aus den Elementarteilchen der Tabelle 12.7 zusammengesetzt. Aus den Quarks werden zahlreiche Hadronen gebildet. Das griechische Wort *ȝdros* = stark“deutet darauf hin, dass für den Aufbau der Hadronen die starke Wechselwirkung verantwortlich ist. Die Hadronen fallen in zwei Klassen, die Mesonen und Baryonen (Tabelle 12.8a und b) Die wichtigsten Baryonen sind das Proton und Neutron, die als Kernteilchen bekannt sind.

**Tabelle 12.8a**

Aufbau der Baryonen aus drei Quarks

Bezeichnung	Quarks
Proton p	<i>uud</i>
Neutron n	<i>udd</i>
$\Lambda^0$	<i>uds</i>
$\Sigma^+$	<i>uus</i>
$\Sigma^0$	<i>uds</i>
$\Sigma^-$	<i>dds</i>
$\Xi^0$	<i>uss</i>
$\Xi^-$	<i>dss</i>
$\Lambda_c^+$	<i>udc</i>
$\Xi_c^+$	<i>usc</i>
$\Xi_c^0$	<i>csd</i>
$\Omega^-$	<i>sss</i>

**Tabelle 12.8b**

Aufbau der Mesonen aus einem Quark und Anti-Quark

Bezeichnung	Quarks
Pionen	
$\pi^0$	$u\bar{u}$
$\pi^+$	$u\bar{d}$
$\pi^-$	$\bar{u}d$
Kaonen	
$K^+$	$u\bar{s}$
$K^-$	$\bar{u}s$
$K^0$	$d\bar{s}$
$\bar{K}^0$	$\bar{d}s$
+ca. 30 andere Mesonen	

### Baryonen

Die schweren Hadronen nennt man Baryonen, ausgehend von dem griechischen Wort *ȝarys* = schwer.“Sie bestehen aus drei Quarks mit unterschiedlichen Farben‘, derart dass aus rot, grün und blau ein weißes Teilchen auftritt. Von besonderer Bedeutung sind das Proton und das Neutron in folgender Zusammensetzung:

Proton  $\neq uud$  und Neutron  $\neq add$

Die anderen in Tabelle 12.8a aufgeführten Baryonen sind instabil. Im Übrigen ist auch das freie Neutron instabil; erst im Atomkern tritt es stabil auf.

### Mesonen

Die mittelschweren Teilchen, die aus Quarks aufgebaut sind, nennt man Mesonen (*mesos* = mittel) Sie bestehen aus einem Quark und einer Anti-Quark (Tabelle 12.8b) Am bekanntesten sind die  $\pi$ -Mesonen.

# Sachwortverzeichnis

$\lambda/2$ -Platte.....	214
$\lambda/4$ -Platte.....	214
$\gamma$ -Scanner.....	311
$\gamma$ -Spektroskopie.....	304
$\gamma$ -Strahlung .....	304 ff., 320 f.
<b>A</b>	
Abbildungsgleichung.....	199
Abbildungsmaßstab .....	209
Abbildungssstrahlengang .....	206
Aberration, chromatische.....	200
– sphärische .....	200
Absorber, sättigbarer .....	234
Absorption.....	257
Absorptionsgrad .....	106
Absorptionskoeffizient .....	258
Adiabatenexponent .....	92, 95
adiabatisch.....	95
Aerodynamik .....	53
Aerosol .....	60
Aerostatik .....	46
Aggregatzustand .....	82
Akkomodation .....	201
Akkumulator.....	188
Aktionsprinzip .....	19
Aktivierungsanalyse .....	311
Aktivität.....	307
Akustik .....	134
Akzeptoren .....	284
Altersbestimmung.....	310
Ampere .....	2, 144
Ampere-Maxwell'sches Gesetz .....	167
Amplitude.....	111
Amplitudenmodulation .....	123
Antiteilchen .....	306
Äquipotenzialfläche.....	147
Äquivalentdosis .....	326
Arbeit.....	27
Archimedes.....	52
Astigmatismus .....	200
Atemströmung .....	62
Atom .....	239
Atombombe .....	316
Atomkern.....	300
Atommasse .....	78
Aufenthaltswahrscheinlichkeit .....	253
Auflösung .....	223
Auflösungsvermögen .....	210, 222
Auftrieb.....	52
Auftriebskorrektur .....	53
Auge .....	201, 234
Ausdehnungskoeffizient .....	73
Ausstrahlung, spezifische .....	105
Austenid.....	272
Austrittsarbeit .....	242, 277
Austrittspupille .....	208
Automotor.....	36
Avogadro'sche Konstante.....	3, 78
<b>B</b>	
Babinet'sches Theorem .....	223
Bahnbeschleunigung.....	14, 17
Bahngeschwindigkeit.....	15
Bahngrößen.....	18
Balmer-Serie .....	250
Bändermodell.....	276, 281
Barkhausen-Sprünge .....	162
Baryon .....	331
Basisschaltung .....	290
Batterie .....	188
Beamer .....	205
Beleuchtungsstärke .....	2, 236
Bequerel.....	325
Bereich, elastischer .....	44
– plastischer .....	44
Bernoulli'sche Gleichung .....	55
Beschleunigung .....	6
Bestrahlungsstärke .....	105
Beugung .....	221
Beweglichkeit .....	276
Bewegung, dreidimensionale .....	12
– geradlinige .....	4, 10
Bezugssystem .....	23
Biegung .....	46
Bild, virtuelles .....	198
Bildkonstruktion .....	198
Bindung .....	
– heteropolare .....	269
– homöopolare .....	269
– Ionen- .....	269
– kovalente .....	269
– metallische .....	269
Bindungsenergie je Nukleon .....	302
bipolar .....	289

Bipolartechnik .....	293 f.	Dezibel .....	137
Bleimethode .....	309	Diamagnetika .....	156
Blindwiderstand .....	177	Diaprojektor .....	205
Bloch-Wand .....	162	Dichte .....	50, 74
Bohr'sche Postulate .....	251	– des Wassers.....	75
Bohr'sches Atommodell .....	249	Dieselmotor .....	100
Boltzmann'sches Verteilungsgesetz .....	87	diffraktive Optik .....	222
Boltzmann-Konstante .....	3, 80	Diode .....	286
– -Verteilung.....	87	Dipol, elektrischer .....	148
Boyle-Mariotte .....	50, 76	Dipolmoment .....	148
Bragg-Reflexion .....	227	Dispersion .....	192
Brechkraft .....	197	Dissoziation .....	187
Brechung .....	190	Donatoren .....	284
Brechzahl .....	191	Doppelbrechung .....	213
Bremsstrahlung.....	260	Doppler-Effekt .....	132
Bremsverzögerung .....	10	Dosimetrie .....	325
Brennpunkt .....	197	Dotieren .....	284
Brennpunktstrahl .....	198	Drain .....	292
Brennstoffzelle .....	189	Drehimpuls .....	37
Brennweite .....	197	Drehimpulserhaltung .....	38
Brewster-Winkel .....	212	Drehkristall-Methode .....	264
Brille .....	202	Drehmoment .....	35
Brown'sche Molekularbewegung .....	72	Drehspiegel .....	194
Bruchdehnung .....	45	Drehstrom .....	179
Brutreaktor .....	316	Drehzahl .....	14
<b>C</b>		Dreiecksschaltung .....	180
Candela .....	2, 237	Dreiphasenstrom .....	180
Carnot-Kreisprozess .....	96	Drosselspule .....	186
Cavendisch .....	64	Druck .....	47, 76
CCD-Kamera .....	298	– Druck in Flüssigkeiten .....	48
Celsius .....	73	– Druck in Gasen .....	50
CO <sub>2</sub> -Laser .....	268	– Druck, dynamischer .....	55
Compton-Effekt .....	243, 322	–, statischer .....	55
Computertomographie .....	262	Druckausbreitung .....	48
Corioliskraft .....	24	Druckmessung .....	49
Coulomb .....	143	Druckwandler .....	48
Coulomb'sches Gesetz .....	143	Druckwasser-Reaktor .....	315
Curie'sches Gesetz .....	161	Dualismus .....	242, 244
<b>D</b>		Dulong-Petit .....	90
Dalton'sches Gesetz .....	84	Durchfluss .....	54
Dampfdruck .....	81, 83	Durchflutungsgesetz .....	154
Dämpfung .....	117	Dynamik .....	19, 32, 53
Datierung .....	309		
dB .....	137		
de-Broglie-Wellenlänge .....	244	<b>E</b>	
Debye-Scherrer .....	264	Ebbe .....	64
Deformation .....	43	Effektivwert .....	175
Dehnung .....	43	Eigenschwingung .....	131
Deuterium .....	300, 317	Eintrittspupille .....	204
Deutron .....	311	Elastizitätsmodul .....	44, 129
deutliche Schweite .....	202	elektrische Energie .....	146

elektrische Influenz .....	147	Farbdreieck .....	235
elektrische Spannung.....	145	Farben dünner Plättchen .....	220
elektrische Stromstärke.....	2	Farbfehler.....	200
elektrischer Strom.....	144	Farbmatrik .....	235
elektrisches Flussdichte .....	148	Faseroptik .....	192
elektrisches Potenzial .....	146	Federkonstante.....	21
elektrochemische Äquivalent.....	187	Feldeffekttransistor .....	289, 291
Elektrolyse.....	187	Feldemissionsmikroskop.....	246
Elektromotor.....	157	Feldquanten .....	329 f.
Elektronen		Fermi-Energie .....	276
– -bahn .....	248	– -Verteilung .....	277
– -beugung .....	246	Fernrohr .....	206
– -einfang .....	306	Ferromagnetika .....	156
– -emission .....	182	Festkörper .....	269
– -gas .....	277	FET .....	289
– -masse .....	239	Fixpunkt.....	75
– -mikroskop .....	245	Flächentransistor.....	289
– -röhre .....	185	Fluss, elektrischer .....	152
– -spinresonanz .....	265	Flüssigkeitsthermometer .....	75
– -strahl .....	183	Flüssigkristall.....	273
– -welle .....	247, 249	Flut.....	64
– -wellenlänge.....	244	Fotoeffekt.....	297
Elektrostriktion .....	273	Foucault'sches Pendel.....	26
Elementarladung .....	3, 143	Fourier-Analyse .....	123
Elementarteilchen .....	328	– -Synthese .....	123
Elementarwelle .....	221	Freiheitsgrad .....	87
Emission .....	257	Frequenz .....	110
– induzierte .....	228, 258	Frequenzmischung .....	234
– spontane .....	228, 258	Frequenzverdopplung .....	233
– stimulierte .....	228, 258	Fresnel-Linse .....	201
Emissionsgrad .....	106	Fusion .....	317
Emitterschaltung .....	290	Fusionsreaktor .....	319
Energie .....	27		
– elastische .....	28		
– innere .....	87		
– kinetische .....	27		
– potentielle .....	28		
– Energiebänder .....	275		
– Energiedosis .....	325		
– Energieerhaltung .....	29		
– Energieniveau .....	249		
Enthalpie .....	83		
Entspiegelung .....	219		
Erdbeben .....	136		
Erdbeschleunigung .....	10, 63		
Expansion .....	91		
<b>F</b>			
Fallbewegung .....	10		
Faraday'sche Konstante $F$ .....	3, 188		
Faraday'scher Käfig .....	147		
Faraday'sches Gesetz .....	187		
Faraday-Effekt .....	214		
<b>G</b>			
Galilei-Fernrohr .....	207		
– -Transformation .....	68		
galvanisches Element .....	188		
Ganzkörperbestrahlung .....	327		
Gasdruck .....	86		
– reale .....	80		
– ideale .....	76		
Gasentladung .....	185		
Gaskonstante .....	3		
– allgemeine .....	79		
– spezielle .....	77		
– universelle .....	79		
Gastheorie, kinetische .....	86		
Gasthermometer .....	75		
Gasturbine .....	101		
Gas-Verflüssigung .....	82		
Gate .....	292		
Gauß'sche Näherung .....	194		
Gauß'scher Strahl .....	231		

Gay-Lussac.....	77	Hohlspiegel.....	194
Gegenkraft.....	20	Holographie.....	225
Gehör.....	139	Hooke'sches Gesetz.....	44
Geiger-Müller-Zählrohr.....	324	Hörschwelle.....	137
Gesamtdruck .....	55	Huygens'sches Prinzip .....	221
Geschwindigkeit.....	4	Hydrodynamik.....	53
– Ausbreitungs-.....	127	hydrodynamisches Paradoxon .....	57
– kosmische .....	68	Hydrostatik.....	46
– Phasen- .....	128	Hysteresekurve.....	162
– -vektor .....	12		
– -verteilung .....	87		
Gesetz von Boyle-Mariotte .....	50	<b>I</b>	
Gesetz von Dulong-Petit .....	90	Impedanz .....	176, 178
Gesetz von Gay-Lussac.....	76	Impedanzwandler .....	291
Getriebe.....	37	Impulserhaltung.....	30
Gewichtskraft .....	21	Induktion .....	165
Gitter .....	221	Induktionsgesetz .....	165
Gitterspektrometer.....	222	Induktivität .....	166
Glan-Thompson-Prisma .....	214	Inertialsystem .....	19
Glas .....	273	Influenz .....	147
Gleichstromkreis .....	171	Interferenz .....	130, 217
Gleichzeitigkeit .....	70	Interferenzfilter .....	218
Gleitreibung.....	22	Interferenzmikroskop .....	221
Glühemission.....	183, 278	Interferometer .....	220
Gluon.....	330	Internationales Einheitensystem SI.....	1
Gravitation .....	63, 329	intrinsische Trägerdichte .....	282
Gravitationsgesetz .....	63	Inversion .....	229, 258
Gravitationskonstante .....	3	Ionenbindung .....	267
Gravitationskraft .....	63	Ionendosis .....	325
Gravitationswaage .....	64	Ionenstrahl .....	183
Graviton .....	330	Ionisation .....	250
Grenzwellenlänge .....	297	Ionisationskammer .....	185, 323
Grenzwinkel .....	191	irrversibel .....	98
Größe, molare .....	78	isobar .....	76, 93
<b>H</b>		isochor .....	94
Hadron.....	331	Isolator .....	275
Haftreibung .....	22	isotherm .....	76, 94
Halbleiter .....	281	Isotop .....	300
Halbleiterlaser .....	295		
Halbwertszeit $T$ .....	307	<b>J</b>	
Hall-Effekt .....	158	Jod .....	311
Hall-Spannung .....	159	Joule .....	2, 27
Hangabtriebskraft .....	21	Joule-Tompson-Effekt .....	82
Hauptebene .....	199		
Hauptquantenzahl .....	249	<b>K</b>	
H-Bombe .....	319	Kalium-Argon-Methode .....	309
Heisenberg'sche Unschärferelation .....	247	Kältemaschine .....	102
Heißluftmotor .....	101	Kapazität .....	150
hexagonal .....	271	Kelvin .....	2, 72
Hochdruckgebiet .....	26	Kepler'sches Gesetz .....	64
Hochtemperatur-Supraleiter .....	280	Kepler-Fernrohr .....	207
Höhenformel, barometrische .....	51	Kern .....	239
		– -fusion .....	312, 316
		– -kräfte .....	303

– -modell.....	301
– -niveau .....	303
– -physik .....	300
– -reaktion.....	310
– -reaktor.....	314
– -spinresonanz .....	265
– -spintomograph .....	266
– -verschmelzung .....	316
Kerreffekt .....	215
Kettenreaktion .....	313
Kilogramm.....	2
Kinematik.....	4
Kirchhoff'sches Gesetz.....	172
Knotenregel .....	172
Koaxialkabel.....	170
Koerzitivfeldstärke .....	163
Kohärenz .....	215
Kohärenzlänge .....	216
Kohärenzzeit.....	217
Kollektorschaltung .....	290
komplexe Schreibung .....	178
komplexer Widerstand .....	178
Kompressibilität .....	47
Kompression .....	91
Kompressionsmodul .....	45
Kondensator.....	150
Kondensor .....	205
Konkavspiegel .....	194
Konstante, elastische .....	45
Kontaktpotential .....	278
Kontinuitätsgleichung .....	54
konvalente Bindung .....	267
Konvektion .....	104
Konversion, innere .....	304
Konvexspiegel .....	196
Kopierer .....	299
Kraft .....	19, 21
Kräfte, elastische .....	21
Kräftepaaar .....	40
Kraftwandler .....	48
Kreisbeschleuniger .....	184
Kreisbewegung .....	14, 18
Kreisel .....	40
Kreiselkompass .....	42
Kreisprozess .....	95
Kristall .....	269
Kristallsystem .....	270
kritisches Magnetfeld .....	280
kubisch .....	271
Kühlmittel .....	314
Kurzsichtigkeit .....	202
<b>L</b>	
Ladung .....	2, 143
– elektrische .....	143
Ladungsdichte .....	147
Längenänderung .....	44
Längenkontraktion .....	70
Laser .....	227
– Farbstoff- .....	232
– Festkörper- .....	232
– Halbleiter- .....	232
– Ionen- .....	232
– Molekül- .....	232
– -drucker .....	299
– -Scanning-Mikroskop .....	245
– -spiegel .....	219
– -typen .....	232
Laue-Verfahren .....	263
Lautstärke .....	138
Lawson-Diagramm .....	318
LCD .....	274
Leichtwasser-Reaktor .....	315
Leistung .....	27
– Blind- .....	176
– elektrische .....	173
– Schein- .....	176
– Wirk- .....	176
Leistungsfaktor .....	176
Leistungszahl .....	101
Leiter .....	275
Leitfähigkeit .....	172, 276
Leitung, metallische .....	276
Leitungsband .....	275, 282
Lenz'sche Regel .....	165
Lepton .....	330
Leuchtdiode .....	295
Leuchtstoffröhre .....	186
Licht .....	257
– -geschwindigkeit .....	3, 170, 191
– -leitfaser .....	192
– -quelle .....	186
– -stärke .....	2
– -strom .....	236
– -technik .....	236
Linienspektrum .....	250
Linse .....	197
Linsensystem .....	199
Lissajous-Figuren .....	122
logarithmisches Dekrement .....	117
Lorentz-Kraft .....	158
– -Transformation .....	69
Auftrieb .....	51
Auftriebsdruck .....	84
Lumen .....	236

Lupe .....	202
Lux .....	2, 237
<b>M</b>	
Mach'scher Kegel .....	132
magnetische Feldkonstante.....	3, 155
magnetische Feldlinie.....	153
magnetische Feldstärke .....	153 f.
magnetische Flussdichte $B$ .....	155
magnetische Induktion .....	2, 155
magnetische Suszeptibilität .....	156
magnetischer Dipol .....	153
magnetischer Fluss .....	2, 156
magnetischer Werkstoff .....	163
Magnetisierung.....	160
Magnetismus .....	153
– Antiferro-.....	163
– Dia-.....	161
– Ferri-.....	163
– Ferro-.....	162
– Para-.....	161
Magnetostriktion .....	163
Magnetspektrometer.....	184
Magnuseffekt.....	57
Manometer .....	49
Martensid .....	272
Maschenregel .....	173
Masse .....	2, 20
– kritische .....	313
– relativistische .....	70
– und Energie.....	70
Massendefekt.....	302, 312
Massenträgheitsmoment .....	33
Massenzahl.....	240, 300
Materiewelle.....	244
Maxwell'sche Geschwindigkeit .....	88
– Gleichung .....	167
Medium, optisch dichtes.....	190
– optisch dünnes .....	190
Meißner-Ochsenfeld-Effekt.....	280
Memory-Legierungen.....	272
Meson.....	331
Messfernrohre .....	208
Meteorologie .....	26
Meter .....	2
Michelson-Interferometer.....	216
Mikroskop .....	209
Mittelpunktstrahl .....	198
Moden .....	219
– longitudinale .....	230
– transversale .....	230
Moderator.....	314
Modulation .....	123
Mol .....	2
Molekül .....	267
Molekularmasse.....	79
Molmasse.....	78
Molvolumen .....	78
monoklin.....	271
MOS-FET .....	289, 292
Mößbauer-Effekt .....	304
Myon .....	330
<b>N</b>	
Nachtsehen .....	234
Naturkonstanten.....	3
Néel-Temperatur.....	163
Neodymlaser.....	229
Neutrino .....	305
Neutron .....	239, 300, 311
Neutronenwellenlänge .....	247
Newton .....	2, 20
Newton'sche Axiome .....	19
– Ringe .....	220
n-Leitung .....	284
Normalbedingung .....	78
Normalkraft .....	21
Normalspannung .....	43
Normal-Wasserstoffelektrode .....	188
NTC-Widerstand .....	283
Nukleon .....	239, 300
numerische Apertur .....	210
Nutation .....	40
<b>O</b>	
Oberflächenladung .....	147
Objektiv .....	204, 207, 209
Öffnungsfehler .....	200
Ohm .....	2, 171
Ohm'sches Gesetz .....	171
Okular .....	209
Optik, geometrische .....	190
– nichtlineare .....	233
optische Aktivität .....	214
Optoelektronik .....	294
Ordnungszahl .....	240, 300
orthorombisch .....	271
Ortsvektor .....	12
Oszillatoren .....	110
– harmonischer .....	116
Oszilloskop .....	185
Ottomotor .....	99
Overhead-Projektor .....	206
<b>P</b>	
Paarbildung .....	321

Paareffekt.....	322
Parallelschaltung von Widerständen.....	174
Parallelstrahl.....	198
Paramagnetika.....	156
Partialdruck.....	84
Pascal.....	47
Peltier-Effekt.....	278
Pendel.....	114
Periodensystem.....	255
Permanentmagnet.....	153, 163
Permeabilität.....	155
Permeabilitätszahl.....	155
Permittivitätszahl.....	148
Perpetuum mobile.....	98
Phase.....	111, 127
Phasendiagramm.....	83
Phasensprung.....	190
Phasenumwandlung.....	85
Photoapparat.....	204
Photodetektor.....	297
Photodiode.....	297
Photoeffekt.....	242, 322
Photometrie.....	234
Photon.....	228
Photonik.....	294
Phototransistor.....	298
Photowiderstand.....	283, 297
Piezoeffekt.....	272
PIN-Photodiode.....	298
Planck'sches Wirkungsquantum.....	3
Planetensystem.....	64
Plasma.....	187, 319
Plattenkondensator.....	150
p-Leitung.....	284
pn-Halbleiterdetektor.....	324
pn-Übergang.....	286
Pockelszelle.....	215
Poise.....	59
Poisson'sche Zahl.....	45
Polarisation	
– von Licht.....	211
– elektrische.....	148
– elliptische.....	212
– lineare.....	211
– magnetische.....	160
– Orientierungs-.....	150
– Verschiebung-.....	150
– zirkuläre.....	212
Polarisationsfilter.....	212
Polarisationsprisma.....	214
Polytrop.....	95
positives Loch.....	282
Positron.....	306
Positronen-Emissions-Tomographie .....	306
Potenzial .....	145
Potenzialdifferenz .....	146
Prandtl'sches Staurohr .....	55
Präzession .....	41
Presse, hydraulische .....	48
Primärelement .....	188
Prinzip von Archimedes .....	52
Prismenfernrohr .....	207
Probeladung .....	144
Projektor .....	205
Proportionalzählrohr .....	323
Proton .....	239, 300
Punkt, kritischer .....	82
Pyrometer .....	75, 108
<b>Q</b>	
Qualitätsfaktor .....	326
Quanten-Hall-Effekt .....	159
Quantenoptik .....	227
Quantenzahl .....	252
– Bahndrehimpuls-.....	252
– Haupt-.....	252
– Magnet-.....	252
– Neben-.....	253
– Spin-.....	252
Quark .....	300, 330
Querdehnung .....	44
Querdehnungszahl .....	44
<b>R</b>	
Radialbeschleunigung .....	14 f.
Radiant .....	2
Radioaktivität .....	308
Raman-Effekt .....	268
Rasterelektronenmikroskop .....	245
Raum .....	71
Raumausdehnungskoeffizient .....	74
Raumwinkel .....	2
Rayleigh-Streuung .....	321
Re .....	62
Reflexion .....	190, 212
Reflexionsgrad .....	213
Regelstab .....	314
Reibung, innere .....	58
Reibungskraft .....	22
Reichweite .....	321
Reihenschaltung von Widerständen .....	174
Relativitätstheorie .....	68
– allgemeine .....	71
Rem .....	326
Remanenz .....	163
Resonanz .....	119

Resonator .....	218, 229	Schwimmen .....	52
reversibel .....	97	Schwingkreis .....	181
Reynolds-Zahl .....	62	– Parallel-.....	182
rhomboedrisch .....	271	– Reihen-.....	181
Rohrströmung .....	59	Schwingung .....	110
Rollreibung .....	22	– Dreh-.....	113
Röntgenbremsstrahlung .....	260	– elastische.....	112
Röntgenfluoreszenz .....	264	– elektromagnetische .....	181
Röntgenröhre .....	260	– Feder-.....	112
Röntgenstrahlen, Absorption von .....	262	– Fundamental-.....	125
Röntgenstrahlung .....	260	– gekoppelte.....	126
–, charakteristische .....	261	– Torsions-.....	113
Rotation .....	24, 32	– Überlagerung von .....	119
Rotationsenergie .....	32	Schwingungsdauer .....	115
Rotationsspektrum .....	268	Schwingungsenergie .....	115
Rückkopplung .....	182	Schwingungsgleichung .....	111
 <b>S</b>		Schwingungsisolierung .....	119
SAE-Skala .....	60	Sehwinkel .....	202
Sammellinse .....	198	Sekundärelement .....	188
Satelliten .....	67	Sekunde .....	2
Sättigungsdruck .....	84	Selbstinduktion .....	166
Saugeffekt .....	56	Sieden .....	83 f.
Saugpumpe .....	50	Sievert .....	326
Schale .....	249, 255	Sinkgeschwindigkeit .....	60
Schalenmodell .....	304	SI-System .....	1
Schalldämmung .....	141	Solarkollektor .....	108
Schalldruck .....	134	Sonne .....	64, 317
Schallgeschwindigkeit .....	129, 134 f., 143 ff., 170 ff., 182 f., 191 f., 197, 199 ff., 216, 219, 221 f., 231, 236 ff., 243 f., 249 ff., 257 ff., 276 f., 282, 300, 302, 326	Source .....	292
Schallintensität .....	136	Spaltreaktion .....	312
Schallpegel $L$ .....	137	Spannung .....	2, 145
Schallschnelle .....	136	Spannungsdoppelbrechung .....	214
Schallwandler .....	141	Spannungsreihe .....	188
Schaltung		– elektrochemische .....	188
– integrierte .....	293	Spektral-Analyse .....	125
– Parallel- .....	151	Spektralapparat .....	222
– Reihen- .....	151	Spektralbereiche von Strahlung .....	228
Schärfentiefe .....	204	Spektrallinie .....	250
Scheitelwert .....	175	Spektroskopie .....	259
Schmelzdruckkurve .....	83	Sperrschiicht-FET .....	289, 292
Schmelzen .....	83	Spiegel .....	194
Schmelzenthalpie .....	85	Spiegelteleskop .....	208
Schreibprojektor .....	206	Spinresonanz .....	265
Schubmodul .....	45	Statik der Flüssigkeiten und Gase .....	46
Schwächungskoeffizient .....	262	statisches Gleichgewicht .....	21
Schwebung .....	120	Staudruck .....	55
Schweredruck .....	49 f.	Stefan-Boltzman'sches Gesetz .....	106
schwerer Wasserstoff .....	318	Steiner'scher Satz .....	35
Schwerpunkt .....	31	Stellerator .....	320
Schwerwasser-Reaktor .....	315	Steradian .....	2
		Sternschaltung .....	179
		Stirling-Motor .....	100
		Stoffmenge .....	2, 78
		Stokes .....	59

Störstellenleitung .....	283	Thermokraft .....	278
Stoßgesetz .....	31	Thermospannung .....	278
Strahl		Thorium .....	309
– außerordentlicher .....	213	Tiefdruckgebiet .....	26
– ordentlicher .....	213	Tonleiter .....	140
Strahlenbelastung .....	327	Torr .....	49
Strahlenschutz .....	320	Torricelli'sches Ausströmungsgesetz .....	58
Strahlung		Totalreflexion .....	191
– elektromagnetische .....	169	Trägheitsgesetz .....	19
– kosmische .....	309	Trägheitskraft .....	23
Strom .....	144	Trägheitsmoment .....	32, 113
– -dichte .....	172	Transformator .....	179
– im Vakuum .....	182	Transistor .....	289
– in Flüssigkeiten .....	187	– bipolarer .....	289
– in Gasen .....	185	– unipolarer .....	289
Stromgenerator .....	158, 165	Transistor-Effekt .....	288
Stromlinie .....	54	Treibhaus-Effekt .....	108
Stromröhre .....	54	triklin .....	271
Strömung .....	53	Tripelpunkt .....	72, 83
Strömungswiderstand .....	61	Tritium .....	300, 310, 317
Struktur		Tubusfaktor .....	210
– cholesterische .....	274	Tubuslinse .....	209
– nematische .....	274	Tunnelmikroskop .....	245
– smektische .....	274	Turbine .....	100
Sublimationsenthalpie .....	85	Turbulenz .....	61
Superposition .....	120		
Supraleitung .....	279	<b>U</b>	
Suszeptibilität		Überschallgeschwindigkeit .....	133
– elektrische .....	149	Ulbricht'sche Kugel .....	237
– magnetische .....	160	Ultraschall .....	142
Synchrotron .....	310	Umlaufbahn, geostationäre .....	67
Synchrotronstrahlung .....	171, 264	Umlenkprisma .....	192
Szintillationszähler .....	324	unipolar .....	289
<b>T</b>		Unschärferelation .....	247
Tagsehen .....	234	Uran .....	309
Tauon .....	330	Urananreicherung .....	313
Teilchenbeschleuniger .....	310		
Teleobjektiv .....	204	<b>V</b>	
Temperatur .....	2, 72	Valenzband .....	275, 282
– -koeffizient .....	172	Van-de-Graaff .....	310
– kritische .....	82	Van-der-Waals'sche Gleichung .....	81
– -leitfähigkeit .....	89	Vektor .....	39
– -messung, optische .....	108	Venturi-Düse .....	56
– thermodynamische .....	97	Verdampfungsenthalpie .....	85
Termschema .....	229	Verflüssigung .....	81
Tesla .....	2	Vergrößerung .....	203, 206, 209
tetragonal .....	271	Vernichtungsstrahlung .....	321
thermische Energie .....	86	Verschiebungsdichte, elektrische .....	152
Thermistor .....	283	Verspiegelung .....	219
Thermodynamik .....	72	Vibrationsspektrum .....	268
– Hauptsätze der .....	88	Vierniveau-Laser .....	229
Thermoelement .....	75, 278	Viskosität .....	59
		Volt .....	2, 145

Volta'sche Spannungsreihe .....	188
Volumenänderung .....	45
Vorgang	
– irreversibler .....	98
– reversibler.....	97
<b>W</b>	
Wärme	
– -ausdehnung.....	74
– latente .....	85
– -kapazität, molare .....	89
– -kapazität, spezifische.....	88
– -kraftmaschine .....	96, 99
– -leitfähigkeit .....	89, 103
– -leitung .....	103
– -pumpe.....	98, 101
– -strahlung.....	105
– -strom.....	103
Wasser dampf.....	84
Wasserstoffatom.....	248
Wasserstrahlpumpe .....	56
Watt.....	2, 29
Weakon .....	330
Weber.....	2, 156
Weber und Fechner .....	137
Wechselstromkreis .....	174
Wechselstromnetz .....	176
Wechselwirkung.....	20
– elektromagnetische .....	329
– schwache .....	329
– starke .....	329
Weiß'sche Bezirke .....	162
Weitsichtigkeit .....	202
Welle .....	126
– elektromagnetische .....	168, 227
– -gleichung.....	128
– komplexe .....	225
– -länge .....	127
– Längs-.....	129
– Longitudinal-.....	128
– Objekt.....	226
– Referenz- .....	226
– Schal-.....	129
– stehende .....	130
– Überlagerung von .....	130
– -vektor .....	128
– -widerstand .....	170
Werkstoff, amorpher .....	273
Widerstand .....	2
– induktiver.....	175
– kapazitiver .....	175
– ohmscher.....	175
– spezifischer .....	172, 277
Widerstandsbeiwert .....	62
Widerstandskraft.....	61
Widerstandsthermometer.....	75
Wiedemann-Franz'sches Gesetz.....	104
Wien'sches Verschiebungsgesetz.....	108
Wiggler.....	264
Windsystem .....	26
Winkel .....	2
– -auflösung .....	224
– -beschleunigung .....	17
– -geschwindigkeit.....	14, 111
– -größen.....	18
Wirbel.....	61
Wirkungsgrad, thermischer.....	96
Wölbspiegel .....	196
Wurf .....	11
– schräger.....	11
– senkrechter.....	11
<b>Z</b>	
Zähigkeit .....	58
– dynamische .....	59
– kinematische .....	59
Zeit .....	71
Zeitdehnung .....	70
Zentrifugalkraft .....	24
Zentripetalkraft .....	25
Zerfallsgesetz, Radioaktives.....	306
Zerfallskonstante .....	307
Zerfallsreihe .....	309
Zerstänger .....	56
Zerstreuungslinse .....	198
Zugfestigkeit .....	45
Zustand, kritischer .....	81
Zustandsänderung	
– adiabatische .....	94
– isobare .....	93
– isochoore .....	94
– isotherme .....	94
– polytrop .....	95
Zustandsgleichung .....	72
Zustandsgröße .....	77
Zyklotron .....	184, 310
Zylinderspule .....	154