Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 1 (WS 2011)
Lösungen

Aufgabe 1.1 Sind folgende Gleichungen für beliebige Sprachen L_1, L_2 gültig? Falls ja, begründen Sie warum, falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel.

a)	$(L_1^*)^* = L_1$	*b)*	$L_1^+ = (L_1^*)^* L_1$
c)	$L_1^* L_2^* \cap L_2^* L_1^* = L_1^* \cup L_2^*$	*d)*	$(L_1 L_2)^* = L_1^* L_2^*$
e)	$\{\,\} L_1^* = L_1^+ \cup \{\varepsilon\}$	*f)*	$(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$

Lösung

a) Diese Gleichung gilt, wenn $L_1 = \{\varepsilon\}$ bzw. $L_1 = L^*$ für eine beliebige Sprache L. Sie gilt aber z.B. nicht für $L_1 = \{\underline{\mathtt{a}}\}$, denn $\{\underline{\mathtt{a}}\}^* \neq \{\underline{\mathtt{a}}\}$.

b) Das ist natürlich richtig, siehe z.B. Skriptum, Seite 4, Tabelle 1.1.

c) Diese Gleichung gilt jedenfalls für $L_1 = L_2$, sowie für $L_1 = \{\varepsilon\}$ oder $L_1 = \{\}$ (bzw. $L_2 = \{\varepsilon\}$ oder $L_2 = \{\}$). Sie gilt aber nicht notwendigerweise für $L_1 \neq L_2$: z.B. für $L_1 = \{\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\}$, $L_2 = \{\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\}$ ist die Gleichung nicht gültig, denn $\underline{\mathtt{a}}^5 \in L_1^* L_2^* \cap L_2^* L_1^*$, aber $\underline{\mathtt{a}}^5 \notin L_1^* \cup L_2^*$.

d) Gegenbeispiel: $L_1 = L_2 = \{\underline{\mathtt{a}}\}$. Dann gilt: $(\{\underline{\mathtt{a}}\}\{\underline{\mathtt{a}}\})^* = \{\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\}^* \neq \{\underline{\mathtt{a}}\}^* = \{\underline{\mathtt{a}}\}^*\{\underline{\mathtt{a}}\}^*$.

e) Diese Gleichung gilt nie.

f) $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$ ist nicht für alle Sprachen L_1, L_2 gültig, was z.B. durch folgendes Gegenbeispiel veranschaulicht werden kann: Sei $L_1 = \{\underline{\mathtt{a}}\}$, $L_1 = \{\underline{\mathtt{b}}\}$. Dann ist ja $(L_1 \cup L_2)^* = \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^* = \{\varepsilon, \underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}, \ldots\}$, was aber sicher nicht gleich $\{\underline{\mathtt{a}}\}^* \cup \{\underline{\mathtt{b}}\}^* = \{\varepsilon, \underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}, \ldots\}$ ist.

Aufgabe 1.2

a) Geben Sie die durch folgende induktive Definition spezifizierte Sprache (Menge) an:

1.) A ist die kleinste Menge für die gilt:

- $\underline{\mathtt{b}} \in A$
- $\underline{\mathtt{a}} w \underline{\mathtt{a}} \in A$ für $w \in A$

2.) Sei B eine beliebige (endliche) Menge. X ist die kleinste Menge für die gilt:

- $\varepsilon \in X$, $a \in X$ für jedes $a \in B$
- $wa \in X$ für $w \in X$, $a \in B$

b) Geben Sie jeweils eine induktive Definition für folgende Mengen an:

1.) $C = \{\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\}^*\{\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\}^+$

2.) $D = \{(\underline{\mathtt{0}}\underline{\mathtt{1}}\underline{\mathtt{0}})^n \mid n \geq 0\}$

Lösung

a) 1.) $A = \{\underline{\mathtt{a}}^n \underline{\mathtt{b}} \underline{\mathtt{a}}^n \mid n \geq 0\}$

2.) $X = B^*$

b) 1.) C ist die kleinste Menge für die gilt:

- $\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}} \in C$

- ist $w \in C$, dann ist auch $\underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{b}}w \in C$ und $w\underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{a}} \in C$.

2.) D ist die kleinste Menge für die gilt:

- $\varepsilon \in D$,
- ist $w \in D$, so ist auch $w\underline{\mathtt{0}}\,\underline{\mathtt{1}}\,\underline{\mathtt{0}} \in D$.

Aufgabe 1.3 Geben Sie jeweils eine reguläre Darstellung folgender Sprachen an:

a) $L = \{w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^* \mid w \text{ endet nicht mit } \underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{b}}\}$

b) $L = \{w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^* \mid |w|_{\underline{\mathtt{b}}} \leq 1\}$

c) $A \cap B$, $A \cup B$, und $\overline{A}$ (das Komplement von A, also $\{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}^* - A$), wobei
$A = \{w \in \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}^* \mid |w|_{\underline{\mathtt{0}}} = 2n, n \geq 0\}$,
$B = \{w \in \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}^* \mid |w|_{\underline{\mathtt{0}}} = 2n+1, n \geq 0\}$.

Lösung

a) $(\underline{\mathtt{a}} + \underline{\mathtt{b}})^*(\underline{\mathtt{a}} + \underline{\mathtt{b}}\,\underline{\mathtt{b}}) + (\underline{\mathtt{b}} + \varepsilon)$

b) $\underline{\mathtt{a}}^*\underline{\mathtt{b}}\,\underline{\mathtt{a}}^* + \underline{\mathtt{a}}^*$ (oder auch $\underline{\mathtt{a}}^*(\underline{\mathtt{b}} + \varepsilon)\underline{\mathtt{a}}^*$)

c) A enthält also Wörter, die eine gerade Anzahl von Symbolen $\underline{\mathtt{0}}$ enthalten (und somit auch alle, die kein Symbol $\underline{\mathtt{0}}$ enthalten, d.h., nur aus einer beliebigen Anzahl von Symbolen $\underline{\mathtt{1}}$ bestehen.)
B enthält Wörter, die eine ungerade Anzahl von Symbolen $\underline{\mathtt{0}}$ enthalten (und damit keine, die nur aus Symbolen $\underline{\mathtt{1}}$ bestehen).

Demnach erhalten wir folgende Lösung:

$$\begin{array}{ll} A \cap B = \{\} & \\ A \cup B = \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}^* & \\ \overline{A} = B & \overline{B} = A \end{array}$$

wobei als reguläre Menge $A = \{\underline{\mathtt{1}}\}^*(\{\underline{\mathtt{0}}\}\{\underline{\mathtt{1}}\}^*\{\underline{\mathtt{0}}\}\{\underline{\mathtt{1}}\}^*)^*$ und $B = \{\underline{\mathtt{1}}\}^*\{\underline{\mathtt{0}}\}\{\underline{\mathtt{1}}\}^*(\{\underline{\mathtt{0}}\}\{\underline{\mathtt{1}}\}^*\{\underline{\mathtt{0}}\}\{\underline{\mathtt{1}}\}^*)^*$

Aufgabe 1.4 Sind folgende Aussagen korrekt? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Sei $L_1 = \{\underline{\mathtt{a}}^n \mid n \geq 0\}$ und $L_2 = \{\underline{\mathtt{b}}^{2n} \mid n \geq 0\}$. Dann gilt: $L_1 L_2 = \{\underline{\mathtt{a}}^n \underline{\mathtt{b}}^{2n} \mid n \geq 0\}$.

b) Es gibt keine Sprache L, für die gilt: $L^* = L^+$.

c) Ist R eine reguläre und F eine endliche Menge, so ist $R \cup F$ eine reguläre Menge.

Lösung

a) Das ist sicher nicht korrekt, da z.B. $\underline{\mathtt{a}}^2 \in L_1$ und $\underline{\mathtt{b}}^2 \in L_2$, aber $\underline{\mathtt{a}}^2\underline{\mathtt{b}}^2 \notin \{\underline{\mathtt{a}}^n \underline{\mathtt{b}}^{2n} \mid n \geq 0\}$.
(Richtig wäre in diesem Fall: $\{\underline{\mathtt{a}}^n \mid n \geq 0\}\{\underline{\mathtt{b}}^{2n} \mid n \geq 0\} = \{\underline{\mathtt{a}}^n \underline{\mathtt{b}}^{2m} \mid n, m \geq 0\}$)

b) Diese Aussage ist nicht korrekt: Gilt nämlich $\varepsilon \in L$, so gilt auch $L^* = L^+$.

c) Diese Aussage ist korrekt: reguläre Mengen sind unter Vereinigung abgeschlossen, und jede endlich Menge ist laut Definition regulär, da sie ja mittels Vereinigung aus einelementigen Mengen gebildet werden kann.