Lösung von Beispiel 1

Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen inhomogenen Differenzengleichung 2. Ordnung an:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n + 3^n \qquad (n \geq 0).$$

Lösung: Zur Berechnung der homogenen Lösung $x_n^{(h)}$ berechnen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

Daraus folgt $x_n^{(h)} = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 2^n$. Für die partikuläre Lösung wählen wir die Versuchslösung $x_n^{(p)} = A \cdot 3^n$ und berechnen

$$\begin{aligned} A3^{n+2} &= A3^{n+1} + 2A3^n + 3^n \mid : 3^n \\ A3^2 &= A3 + 2A + 1 \\ A &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 2^n + \frac{1}{4}3^n.$$

Lösung von Beispiel 2

Symmetrische Gruppe:

$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$

Von (132) erzeugte Untergruppe:

$U = \{(1), (132), (123)\}$, da $(132)(132) = (123)$ und

$(132)(132)(132) = (123)(132) = (1)$.

Wegen $(123)(123) = (132)$ und $(123)(123)(123) = (132)(123) = (1)$ ist U auch die von (123) erzeugte Untergruppe.

Linksnebenklassen von U in S_3:

$(1)U = U$, $(12)U = \{(12), (12)(132), (12)(123)\} = \{(12), (13), (23)\}$

Rechtsnebenklassen von U in S_3:

$U(1) = U$, $U(12) = \{(12), (132)(12), (123)(12)\} = \{(12), (23), (13)\}$,

also $U(1) = (1)U$ und $U(12) = (12)U$, d.h.

Linksnebenklassen = Rechtsnebenklassen

$\Longrightarrow$ U ist Normalteiler von S_3.

Faktorgruppe: $S_3/U = \{U, (12)U\}$

Operationstafel der Faktorgruppe:

$\bullet$	U	$(12)U$
U	U	$(12)U$
$(12)U$	$(12)U$	U

Lösung von Beispiel 3

Wegen $\dim \mathbb{R}^4 = 4 = \# B$ müssen wir nur überprüfen, ob B linear unabhängig ist.

Sei also $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

dann erhalten wir für die reellen Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 5\lambda_1 + 5\lambda_2 \qquad &= 0 \quad |:5 \\ 5\lambda_1 + 4\lambda_2 \qquad -\lambda_4 &= 0 \quad |\cdot(-1) \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_4 &= 0 \\ 2\lambda_3 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

Aus der 4. Gleichung folgt $\lambda_3 = 0$, und das verbleibende System für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4$ können wir in der folgenden Form schreiben und äquivalent umformen:

$$\begin{aligned} \lambda_4 - 5\lambda_1 - 4\lambda_2 &= 0 \quad |\cdot(-2) \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \quad | + \\ 2\lambda_4 + \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} \lambda_4 - 5\lambda_1 - 4\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \quad |\cdot(-11) \\ 11\lambda_1 + 10\lambda_2 &= 0 \quad | + \end{aligned}$$

$$\iff \begin{aligned} \lambda_4 - 5\lambda_1 - 4\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt sukzessive $\lambda_2 = 0$ (aus der 3. Gleichung), $\lambda_1 = 0$ (aus der 2. Gleichung) und $\lambda_4 = 0$ (aus der 1. Gleichung). Also sind die 4 Vektoren linear unabhängig, und somit ist B eine Basis des $\mathbb{R}^4$.