Runde 3, Beispiel 15

LVA 118.181, Übungsrunde 3, 03.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 01.11.2006

1 Angabe

Man löse das AWP

$$yy'' + y'^2 = 1, \qquad y(0) = 1, y'(0) = -1$$

2 Theoretische Grundlagen: Autonome Differentialgleichungen

Konkretes Anwendungsbeispiel: Nichtlineare Schwingungen Die untenstehende, autonome (= von der Zeit t unabhängige) Differentialgleichung tritt z.B. immer dann auf, wenn die Zustandsänderung x'' einer skalaren Grösse x nur vom Zustand (x, x') und nicht von der Zeit t abhängt.
Lösungsverfahren für die autonome Differentialgleichung: $'' = f(x, x'), x(t_0) = x_0, x'(t_0) = v_0$:

1. Sämtliche Nullstellen η von $f(\eta, 0) = 0$ bestimmen. $x(t) = \eta$ ist jeweils partikuläre Lösung (Ruhelage)

2. Substitution $x' = v$, $x'' = v \cdot v'$ ergibt für $v(x)$ die Differentialgleichung

$$v \cdot v' = f(x, v)$$

3. Allgemeine Lösung $v(x) = v(x, c_1)$, $c_1 \in \mathbb{R}$ bestimmen

4. Anfangswertproblem c_1 aus $v_0 = v(x_0, c_1)$ berechnen

5. Allgemeine implizite Lösung ist

$$t + c_2 = \int \frac{d\xi}{v(\xi, c_1)}$$

6. Implizite Lösung des Anfangswertproblems:

$$t + c_0 = \int \frac{d\xi}{v(\xi, c_1)}$$

3 Lösung des Beispiels

Zunächst Umformung auf

$$y'' + \frac{y'^2}{y} = \frac{1}{y},$$

danach Substitution

$$y' = v(y), y'' = v(y) \cdot v'(y),$$

Weiters Einsetzen:

$$v' \cdot v' + \frac{v^2}{y} = \frac{1}{y}$$
$$v' \cdot v = \frac{1 - v^2}{y}$$
$$\frac{v'}{v} = \frac{1 - v^2}{y}$$
$$\frac{v'}{v} = \frac{1 - v^2}{y} \cdot \frac{1}{v^2} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1 - v^2}{v^2}$$
$$\frac{v'}{1 - v^2} = \frac{1}{y} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v}{1 - v^2}\ dv = \frac{1}{y}\ dy$$

Partialbruchzerlegung der linken Seite:

$$\frac{v}{1 - v^2} = \frac{A}{1 - v} + \frac{B}{1 + v} \qquad | \ : (1 - v^2)$$
$$v = A(1 - v(+B(1 + v)$$
$$v = A - Av + B + Bv$$
$$I: \qquad 0 = A + b \qquad \Rightarrow \qquad A = -B$$
$$II: v = Bv - Av \qquad \Rightarrow \qquad 1 = b - A \qquad \text{Einsetzen } A = -B \Rightarrow \qquad B = \frac{1}{2}, A = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{v}{1 - v^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 - v} - \frac{1}{1 + v}\right)$$
$$\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1 - v} - \frac{1}{1 + v}\right)\ dv = \int \frac{1}{y}\ dy$$
$$\frac{1}{2}(-\ln(1 - v) - \ln(1 + v)) = \ln y + c$$

Erhalten dann $C_1 = 0$. Kontrolle: $v^2 = 1 - y^{-2} \cdot C_1$ ergibt $v^2 = 1$ $\surd$
Dann mit y' integrieren, um C_2 zu erhalten. Y' von $y'(0) = -1$ - $y = \int -1\ dx = -x + C_2$ - $y(0) = 0 + C_2$, daher $C_2 = 1$, da laut Angabe $y(0) = 1$ ist. Somit gilt: $\mathbf{y = -x + 1}$