1. Übungsblatt (mit Lösungen)

3.0 VU Formale Modellierung SS2022

Marion Scholz, Gernot Salzer

11. Mai 2022

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Schlussfolgerungen die zugrundeliegende Inferenzregel an und stellen Sie fest, ob diese gültig ist. Geben Sie unter Verwendung von Alltagsbegriffen eine weitere Schlussfolgerung nach demselben Muster an, wobei die Schlussfolgerung aber im Fall einer gültigen Inferenzregel falsch und im Fall einer ungültigen Inferenzregel wahr sein soll.

(a) Siehe Abbildung.

(b) Alle Bälle sind rund. Kein Würfel ist rund. Kein Ball ist ein Würfel.

(c) Mel bloppt nicht. Alle Blap bloppen. Daher ist Mel kein Blap.

Lösung

(a)

$$\begin{array}{l} \text{Alle Vögel haben zwei Beine.} \\ \text{Meier hat zwei Beine.} \\ \hline \text{Meier ist ein Vogel.} \end{array} \qquad \text{Inferenzregel: } \begin{array}{l} \text{Alle } x \text{ haben die Eigenschaft } y. \\ z \text{ hat die Eigenschaft } y. \\ \hline z \text{ ist ein } x. \end{array}$$

Diese Inferenzregel ist **nicht gültig**. Das angegebene Beispiel ist ein Gegenbeispiel: Die Prämissen sind beide erfüllt, die Konklusion ist aber falsch.

Eine Inferenz nach demselben Muster, bei der die Konklusion aber wahr ist:

$$\begin{array}{l} \text{Alle Vögel können fliegen.} \\ \text{Tweety (ein Pinguin) kann fliegen.} \\ \hline \text{Tweety ist ein Vogel.} \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{l}\text{Alle Bälle sind rund.}\\ \text{Kein Würfel ist rund.}\\ \hline \text{Kein Ball ist ein Würfel.}\end{array} \qquad \text{Inferenzregel: } \begin{array}{l}\text{Alle } x \text{ sind } y.\\ \text{Kein } z \text{ ist } y.\\ \hline \text{Kein } x \text{ ist ein } z.\end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l}\text{Alle } x \text{ sind } y.\\ \text{Alle } z \text{ sind nicht } y.\\ \hline \text{Alle } x \text{ sind kein } z.\end{array}$$

Diese Inferenzregel ist **gültig**. Wenn ein Schluss einer gültigen Regel folgt, aber zu einer falschen Konklusion führt, muss mindestens eine der Prämissen falsch sein, beispielsweise:

$$\begin{array}{l}\text{Alle Tiere fliegen.}\\ \text{Keine Katze fliegt.}\\ \hline \text{Kein Tier ist eine Katze.}\end{array}$$

(c) Auch ohne die Bedeutung der Worte „Mel“, „bloppen“ oder „Blap“ zu kennen, lässt sich die Inferenzregel und ihre Gültigkeit analysieren.

$$\begin{array}{l}\text{Mel bloppt nicht.}\\ \text{Alle Blap bloppen.}\\ \hline \text{Mel ist kein Blap.}\end{array} \qquad \text{Inferenzregel: } \begin{array}{l}x \text{ macht nicht } y.\\ \text{Alle } z \text{ machen } y.\\ \hline x \text{ ist kein } z.\end{array}$$

Diese Inferenzregel ist **gültig**. Daher muss jeder Schluss, der dieser Regel folgt und zu einer falschen Konklusion führt, bereits eine falsche Prämisse haben.

$$\begin{array}{l}\text{Tom (ein Kater) bellt nicht.}\\ \text{Alle Katzen bellen.}\\ \hline \text{Tom ist keine Katze.}\end{array}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Analysieren Sie den folgenden Text und identifizieren Sie die logische Struktur sowie die Elementaraussagen. Betrachten Sie dabei jeden Satz einzeln.

> Liebe Eltern!
> Ich bin die neue Klassenlehrerin Ihres Kindes. Es folgen nun ein paar Hinweise für eine gute Zusammenarbeit. Geben Sie Ihrem Kind immer eine Jause mit oder melden Sie es für die Schuljause an. Wenn das Kind für die Schuljause angemeldet ist, geben Sie ihm den Essensbetrag abgezählt in die Schule mit oder überweisen Sie diesen auf das Klassenkonto. Erst dann kann die Schuljause ausgeteilt werden. Nur wenn Sie regelmäßig mit Ihrem Kind zu Hause lesen, dann wird es das Lesen erlernen. Ich freue mich auf ein Kennenlernen beim Elternabend!
> Lehrerin Nicole

Lösung

(a) *Liebe Eltern!*

Hierbei handelt es sich um keine Aussage, da diese Wortfolge weder wahr noch falsch sein kann.

(b) *Ich bin die neue Klassenlehrerin Ihres Kindes.*

A … Ich bin die neue Klassenlehrerin Ihres Kindes.

Struktur: A
Formel: A

(c) *Es folgen nun ein paar Hinweise für eine gute Zusammenarbeit.*

A … Es folgen nun ein paar Hinweise für eine gute Zusammenarbeit.

Struktur: A
Formel: A

(d) *Geben Sie Ihrem Kind immer eine Jause mit oder melden Sie es für die Schuljause an.*

A … Sie geben eine Jause mit.
B … Sie melden es für die Schuljause an.

Struktur: A oder B
Formel: $A \vee B$

(e) *Wenn das Kind für die Schuljause angemeldet ist, geben Sie ihm den Essensbetrag abgezählt in die Schule mit oder überweisen Sie diesen auf das Klassenkonto.*

A … Das Kind ist für die Schuljause angemeldet.
B … Sie geben den Essensbetrag abgezählt in die Schule mit.
C … Sie überweisen den Essensbetrag auf das Klassenkonto.

Struktur: Wenn A dann B oder C
Formel: $A \supset (B \vee C)$ oder $A \supset (B \not\equiv C)$

Bezieht sich die Aussage auf eine einzige Zahlung oder müssen alle Zahlungen nach derselben Methode erfolgen, ist das exklusive Oder zutreffend. Geht es um mehrere Zahlungen und haben die Eltern bei jeder Zahlung die Wahl zwischen den beiden Bezahlmethoden, ist das inklusive Oder richtiger (kann dann aber Doppelzahlungen nicht ausschließen).

(f) *Erst dann kann die Schuljause ausgeteilt werden.*

Diese Aussage ergibt nur im Kontext des vorigen Satzes Sinn, etwa so:

B … Sie geben den Essensbetrag abgezählt in die Schule mit.
C … Sie überweisen den Essensbetrag auf das Klassenkonto.
D … Die Schuljause kann ausgeteilt werden.

Struktur: D genau dann wenn A oder B
Formel: $D \equiv (B \vee C)$ oder $D \equiv (B \not\equiv C)$

(g) *Nur wenn Sie regelmäßig mit Ihrem Kind zu Hause lesen, dann wird es das Lesen erlernen.*

A … Sie lesen regelmäßig mit Ihrem Kind zu Hause.
B … Es wird das Lesen erlernen.

Struktur: Nur wenn A, dann B. Eventuell auch: A genau dann, wenn B.
Formel: $A \subset B$ oder $A \equiv B$.

(h) *Ich freue mich auf ein Kennenlernen beim Elternabend!*

A ... Ich freue mich auf ein Kennenlernen beim Elternabend.

Struktur: A
Formel: A

(i) *Lehrerin Nicole.*

Hierbei handelt es sich um keine Aussage, da „Lehrerin Nicole“ weder wahr noch falsch sein kann.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Layan möchte in ihrer Kräuterspirale Rosmarin, Salbei und Thymian pflanzen. Wie können die folgenden Sätze mit aussagenlogischen Formeln formalisiert werden?

(a) Layan pflanzt nur Salbei.

(b) Layan pflanzt vielleicht Thymian.

(c) Layan pflanzt nicht gemeinsam Salbei und Thymian.

(d) Wenn Layan Salbei pflanzt, dann pflanzt sie sicher keinen Thymian.

(e) Layan möchte nur dann Rosmarin pflanzen, wenn sie auch Thymian pflanzt.

(f) Layan möchte genau zwei Kräuter pflanzen.

(g) Layan möchte mindestens zwei Kräuter pflanzen.

(h) Wenn Layan Rosmarin pflanzt und Salbei nicht, dann pflanzt sie Thymian.

(i) Layan will nicht alle drei Kräuter pflanzen.

Lösung

R ... Layan pflanzt Rosmarin.
S ... Layan pflanzt Salbei.
T ... Layan pflanzt Thymian.

(a) $S \land \neg R \land \neg T$

(b) $T \not\equiv \neg T$ oder $T \lor \neg T$ oder $\top$
Diese Aussage definiert keine Einschränkung.

(c) $\neg(S \land T)$ oder $S \uparrow T$

(d) $S \supset \neg T$

(e) $R \supset T$

(f) $(R \wedge S \wedge \neg T) \vee (R \wedge \neg S \wedge T) \vee (\neg R \wedge S \wedge T)$

(g) $(R \wedge S) \vee (R \wedge T) \vee (S \wedge T)$

(h) $(R \wedge \neg S) \supset T$

(i) $\neg(R \wedge S \wedge T)$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\mathsf{xor}, \mathsf{true}, \mathsf{and}\}$ vollständig ist für die Klasse der aussagenlogischen Funktionen.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\mathsf{xor}, \mathsf{true}\}$ nicht vollständig ist.

Lösung

(a) Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Funktionsmenge $\{\mathsf{and}, \mathsf{not}\}$ vollständig ist. Es reicht daher zu zeigen, dass not durch die Funktionen in $\{\mathsf{and}, \mathsf{xor}, \mathsf{true}\}$ darstellbar ist. Tatsächlich gilt $\mathsf{not}(x) = \mathsf{xor}(x, \mathsf{true})$, wie sich durch Auswertung der beiden Seiten in den zwei möglichen Wahrheitsbelegungen überprüfen lässt:

x	$\mathsf{not}(x)$		=	$\mathsf{xor}(x,\mathsf{true})$		
0	**1**	0	✓	**1**	0	1
1	**0**	1	✓	**0**	1	1

(b) Wir überlegen uns, welche Funktionen durch xor und true darstellbar sind. xor ist nichts anderes als die Addition modulo 2, oft auch mit $\oplus$ bezeichnet, und true ist das Einselement, 1, bezüglich dieser Addition. Die Addition modulo 2 ist assoziativ, kommutativ und nilpotent. Nilpotent bedeutet hier, dass $x \oplus x = 0$ gilt, wobei x beliebig und 0 das Nullelement bzgl. der Addition ist. Mit diesen Rechenregeln lassen sich alle Ausdrücke zu einer der folgenden Normalformen vereinfachen:

$$
\begin{gathered}
0 \\
1 \\
x_1 \oplus \cdots \oplus x_n \\
x_1 \oplus \cdots \oplus x_n \oplus 1
\end{gathered}
$$

wobei $x_1, \ldots, x_n$ verschiedene Variablen sind. Diese Funktionen haben die Eigenschaft, dass sie entweder nur Null oder nur Eins als Ergebnis liefern (die oberen beiden Zeilen) oder aber die Anzahl der Argumenttupeln, die als Ergebnis null liefern, gleich groß wie die Anzahl der Argumenttupeln, die eins liefern, ist (die unteren beiden Zeilen). Wenn k die Stelligkeit der Funktion ist, dann ist somit die Anzahl der 0er bzw. 1er in der Ergebnisspalte der Funktionstabelle entweder 0, 2^{k-1} oder 2^k.

Daraus folgt aber, dass xor und true nicht die Funktion and darstellen können, da bei dieser die Anzahl der Einser eins und die Zahl der Nuller drei ist. Daher ist die Menge $\{\mathsf{xor}, \mathsf{true}\}$ nicht funktional vollständig.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Sei F die Formel $((A \supset (C \wedge \neg B)) \wedge ((C \supset (A \wedge B)) \wedge (A \vee C)))$.

(a) Zeigen Sie, dass F syntaktisch korrekt ist.

(b) Berechnen Sie schrittweise $\mathsf{val}_I(F)$ für $I(A) = 1$, $I(B) = 0$ und $I(C) = 1$.

(c) Verwenden Sie eine Wahrheitstafel um festzustellen, ob die Formel F gültig, erfüllbar, widerlegbar und/oder unerfüllbar ist.

Lösung

(a) Laut Vorlesung ist die Menge $\mathcal{A}$ der aussagenlogischen Formeln die kleinste Menge, für die gilt:

(a1) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$

(a2) $\{\top, \bot\} \subseteq \mathcal{A}$

(a3) $\neg F \in \mathcal{A}$, wenn $F \in \mathcal{A}$.

(a4) $(F * G) \in \mathcal{A}$, wenn $F, G \in \mathcal{A}$ und $* \in \{\wedge, \uparrow, \vee, \downarrow, \equiv, \not\equiv, \supset, \subset\}$.

wobei $\mathcal{V} = \{A, B, C, \dots\}$ die Menge der aussagenlogischen Variablen ist.

Wir zeigen, dass $((A \supset (C \wedge \neg B)) \wedge ((C \supset (A \wedge B)) \wedge (A \vee C)))$ eine aussagenlogische Formel gemäß dieser Definition ist.

(1) Die Variablen A, B und C sind Formeln (a1).

(2) Da B eine Formel ist (Punkt 1), ist auch $\neg B$ eine Formel (a3).

(3) Da C und $\neg B$ Formeln sind (Punkt 1 bzw. 2), ist auch $(C \wedge \neg B)$ eine Formel (a4).

(4) Da A und $(C \wedge \neg B)$ Formeln sind (Punkt 1 bzw. 3), ist auch $(A \supset (C \wedge \neg B))$ eine Formel (a4).

(5) Da A und B Formeln sind (Punkt 1), ist auch $(A \wedge B)$ eine Formel (a4).

(6) Da C und $(A \wedge B)$ Formeln sind (Punkt 1 bzw. 5), ist auch $(C \supset (A \wedge B))$ eine Formel (a4).

(7) Da A und C Formeln sind (Punkt 1), ist auch $(A \vee C)$ eine Formel (a4).

(8) Da $(C \supset (A \wedge B))$ und $(A \vee C)$ Formeln sind (Punkt 6 bzw. 7), ist auch $((C \supset (A \wedge B)) \wedge (A \vee C))$ eine Formel (a4).

(9) Da $(A \supset (C \wedge \neg B))$ und $((C \supset (A \wedge B)) \wedge (A \vee C))$ Formeln sind (Punkt 4 bzw. 8), ist auch $((A \supset (C \wedge \neg B)) \wedge ((C \supset (A \wedge B)) \wedge (A \vee C)))$ eine Formel (a4).

Dieselbe Argumentation in Form eines Baumes:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\in\mathcal{V}}{A\in\mathcal{A}}\,a1 \quad \dfrac{\dfrac{C\in\mathcal{V}}{C\in\mathcal{A}}\,a1 \quad \dfrac{\dfrac{B\in\mathcal{V}}{B\in\mathcal{A}}\,a1}{\neg B\in\mathcal{A}}\,a3}{(C\wedge\neg B)\in\mathcal{A}}\,a4}{(A\supset(C\wedge\neg B))\in\mathcal{A}}\,a4 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{C\in\mathcal{V}}{C\in\mathcal{A}}\,a1 \quad \dfrac{\dfrac{A\in\mathcal{V}}{A\in\mathcal{A}}\,a1 \quad \dfrac{B\in\mathcal{V}}{B\in\mathcal{A}}\,a1}{(A\wedge B)\in\mathcal{A}}\,a4}{(C\supset(A\wedge B))\in\mathcal{A}}\,a4 \quad \dfrac{\dfrac{A\in\mathcal{V}}{A\in\mathcal{A}}\,a1 \quad \dfrac{C\in\mathcal{V}}{C\in\mathcal{A}}\,a1}{(A\vee C)\in\mathcal{A}}\,a4}{((C\supset(A\wedge B))\wedge(A\vee C))\in\mathcal{A}}\,a4}{((A\supset(C\wedge\neg B))\wedge((C\supset(A\wedge B))\wedge(A\vee C)))\in\mathcal{A}}\,a4$$

Die horizontalen Linien sind als wenn-dann zu lesen, wobei die Prämissen des Schlusses oberhalb und die Konklusion unterhalb der Linie angegeben werden. Neben dem Strich steht die angewendete Regel.

(b)
$$\begin{aligned}
&\mathsf{val}_I\left((A \supset (C \wedge \neg B)) \wedge ((C \supset (A \wedge B)) \wedge (A \vee C))\right)\\
&= \mathsf{val}_I\left((A \supset (C \wedge \neg B))\right) \textsf{ and } \mathsf{val}_I\left((C \supset (A \wedge B)) \wedge (A \vee C)\right)\\
&= \mathsf{val}_I(A \supset (C \wedge \neg B)) \textsf{ and } \mathsf{val}_I(C \supset (A \wedge B)) \textsf{ and } \mathsf{val}_I(A \vee C)\\
&= (\mathsf{val}_I(A) \textsf{ implies } \mathsf{val}_I(C \wedge \neg B)) \textsf{ and } (\mathsf{val}_I(C) \textsf{ implies } \mathsf{val}_I(A \wedge B)) \textsf{ and } (\mathsf{val}_I(A) \textsf{ or } \mathsf{val}_I(C))\\
&= (1 \textsf{ implies } (\mathsf{val}_I(C) \textsf{ and } \mathsf{val}_I(\neg B))) \textsf{ and } (1 \textsf{ implies } (\mathsf{val}_I(A) \textsf{ and } \mathsf{val}_I(B))) \textsf{ and } (1 \textsf{ or } 1)\\
&= (1 \textsf{ implies } (1 \textsf{ and } (\textsf{not}\,\mathsf{val}_I(B)))) \textsf{ and } (1 \textsf{ implies } (1 \textsf{ and } 0)) \textsf{ and } 1\\
&= (1 \textsf{ implies } (1 \textsf{ and } (\textsf{not}\,0))) \textsf{ and } (1 \textsf{ implies } 0) \textsf{ and } 1\\
&= 0
\end{aligned}$$

(c) Wir berechnen den Wert der Formel für alle Interpretationen mittels einer Wahrheitstafel. An dieser lassen sich dann die Eigenschaften der Formel ablesen.

A	B	C	$(A\supset$	$(C\wedge$	$\neg B))$	$\wedge$	$((C\supset$	$(A\wedge B))$	$\wedge$	$(A\vee C))$
0	0	0	1	0	1	**0**	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	**0**	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	**0**	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	**0**	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	**0**	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	**0**	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	**0**	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	**0**	1	1	1	1

Die Formel ist somit unerfüllbar und widerlegbar, aber weder gültig noch erfüllbar.

Aufgabe 6 **(2 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die beiden Formeln

$$(A \uparrow B) \supset (B \supset \neg A) \quad \text{und} \quad ((B \equiv C) \supset A) \vee \neg A$$

äquivalent sind, und zwar

(a) mit Hilfe einer Wahrheitstafel.

(b) durch algebraische Umformungen.

Lösung

(a) Wahrheitstafel:

A	B	C	$(A \uparrow B)$	$\supset$	$(B \supset$	$\neg A)$	$=$	$((B \equiv C)$	$\supset A)$	$\vee$	$\neg A$
0	0	0	1	**1**	1	1	✓	1	0	**1**	1
0	0	1	1	**1**	1	1	✓	0	1	**1**	1
0	1	0	1	**1**	1	1	✓	0	1	**1**	1
0	1	1	1	**1**	1	1	✓	1	0	**1**	1
1	0	0	1	**1**	1	0	✓	1	1	**1**	0
1	0	1	1	**1**	1	0	✓	0	1	**1**	0
1	1	0	0	**1**	0	0	✓	0	1	**1**	0
1	1	1	0	**1**	0	0	✓	1	1	**1**	0

Da beide Formeln in sämtlichen Wahrheitsbelegungen denselben Wert liefern, sind sie äquivalent.

Tatsächlich ist es gar nicht notwendig, die Wahrheitstabelle vollständig zu befüllen. Wir wissen zum Beispiel, dass $\supset$ den Wert 1 liefert, wenn das rechte Argument den Wert 1 besitzt. Damit ist das Ergebnis der ersten Formel für jene Interpretationen, in denen $(B \supset \neg A)$ den Wert 1 besitzt, bereits mit 1 festgelegt. Außerdem wissen wir, dass $\vee$ den Wert 1 liefert, wenn ein Argument den Wert 1 besitzt. Damit ist das Ergebnis der zweiten Formel für jene Interpretationen, in denen $\neg A$ den Wert 1 besitzt, bereits mit 1 festgelegt.

A	B	C	$(A \uparrow B)$	$\supset$	$(B \supset$	$\neg A)$	$=$	$((B \equiv C)$	$\supset A)$	$\vee$	$\neg A$
0	0	0		**1**	1	1	✓			**1**	1
0	0	1		**1**	1	1	✓			**1**	1
0	1	0		**1**	1	1	✓			**1**	1
0	1	1		**1**	1	1	✓			**1**	1
1	0	0		**1**	1	0	✓		1	**1**	0
1	0	1		**1**	1	0	✓		1	**1**	0
1	1	0	0	**1**	0	0	✓		1	**1**	0
1	1	1	0	**1**	0	0	✓		1	**1**	0

(b) Wir vereinfachen beide Formeln. Da wir dabei idente Formeln erhalten, sind die ursprünglichen Formeln äquivalent.

$$\begin{aligned}
&(A \uparrow B) \supset (B \supset \neg A) && F \uparrow G = \neg F \vee \neg G\\
&= (\neg A \vee \neg B) \supset (B \supset \neg A) && F \supset G = \neg F \vee G\\
&= \neg(\neg A \vee \neg B) \vee (B \supset \neg A) && F \supset G = \neg F \vee G\\
&= \neg(\neg A \vee \neg B) \vee \neg B \vee \neg A && \neg(F \vee G) = \neg F \wedge \neg G\\
&= (\neg\neg A \wedge \neg\neg B) \vee \neg B \vee \neg A && \neg\neg F = F\\
&= (A \wedge B) \vee \neg B \vee \neg A && (F \wedge G) \vee H = (F \vee H) \wedge (G \vee H)\\
&= (A \vee \neg B \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B \vee \neg A) && F \vee \neg F = \top \text{ (zweimal)}\\
&= \top \wedge \top\\
&= \top
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&((B \equiv C) \supset A) \vee \neg A && F \supset G = \neg F \vee G\\
&= \neg(B \equiv C) \vee A \vee \neg A && F \vee \neg F = \top\\
&= \neg(B \equiv C) \vee \top && F \vee \top = \top\\
&= \top
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Gegeben seien folgende zwei Sachverhalte:

(a) „Wenn Max den Wettbewerb gewonnen hat, dann wurde Emil Zweiter und Livia Dritte. Emil wurde nicht Zweiter."

Kann man daraus schließen, dass Max den Wettbewerb nicht gewonnen hat?

(b) „Wenn Max den Wettbewerb gewonnen hat, dann wurde entweder Emil Zweiter oder Livia Dritte. Emil wurde nicht Zweiter."

Kann man daraus schließen, dass Livia nicht Dritte wurde, falls Max den Wettbewerb gewonnen hat?

Verwenden Sie für Ihre Überlegungen die Aussagenlogik.
Wie sieht jeweils die Formel aus, deren Gültigkeit/Nichtgültigkeit zeigen würde, dass die Konsequenzbeziehung gilt/nicht gilt?

Lösung

Zur aussagenlogischen Modellierung führen wir Variablen mit folgender Bedeutung ein.
M ... Max hat den Wettbewerb gewonnen.
E ... Emil wurde Zweiter.
L ... Livia wurde Dritte.

(a) Wir übersetzen die Aussagen in logische Formeln:

- $F_1 = M \supset (E \wedge L)$ ... Wenn Max den Wettbewerb gewonnen hat, dann wurde Emil Zweiter und Livia Dritte.
- $F_2 = \neg E$ ... Emil wurde nicht Zweiter.

Daraus wollen wir schließen:

- $F_3 = \neg M$ ... Max hat den Wettbewerb nicht gewonnen.

Wir müssen nun die Gültigkeit der Konsequenzbeziehung $F_1, F_2 \models F_3$ überprüfen.

$I(M)$	$I(E)$	$I(L)$	$F_1,$	F_2	$\models_I$	F_3
1	1	1	1	0	✓	0
1	1	0	0	0	✓	0
1	0	1	0	1	✓	0
1	0	0	0	1	✓	0
0	1	1	1	0	✓	1
0	1	0	1	0	✓	1
0	0	1	1	1	✓	1
0	0	0	1	1	✓	1

Man kann also aus den gegebenen Argumenten schließen, dass Max den Wettbewerb nicht gewonnen hat. Oder anders formuliert: Die Formel $\neg M$ ist eine logische Konsequenz der Prämissen $M \supset (E \wedge L)$ und $\neg E$.

Auch bei dieser Aufgabe kann man sich einen Teil der Arbeit ersparen, wenn man berücksichtigt, dass eine Zeile in der Tabelle nur dann ein Gegenbeispiel zur Konsequenzbeziehung sein kann, wenn die Prämissen wahr und die Konklusion falsch ist. Da F_3 eine einfache Formel ist, beginnen wir bei ihr. Danach sehen wir uns F_2 an (ebenfalls einfach) und setzen nur mit jenen Zeilen fort, in denen F_2 wahr ist.

$I(M)$	$I(E)$	$I(L)$	$F_1,$	F_2	$\models_I$	F_3
1	1	1		0	✓	0
1	1	0		0	✓	0
1	0	1	0	1	✓	0
1	0	0	0	1	✓	0
0	1	1			✓	1
0	1	0			✓	1
0	0	1			✓	1
0	0	0			✓	1

Formel zur Konsequenzbeziehung: F_3 ist genau dann eine logische Konsequenz der Formeln F_1 und F_2, in Zeichen $F_1, F_2 \models F_3$, wenn die Formel $(F_1 \wedge F_2) \supset F_3$ gültig ist.

(b) Wir übersetzen die Aussagen in logische Formeln:

- $F_1 = M \supset (E \not\equiv L)$ oder $F_1 = M \supset (E \vee L)$ ... Wenn Max den Wettbewerb gewonnen hat, dann wurde entweder Emil Zweiter oder Livia Dritte (exklusives oder inklusives Oder).
- $F_2 = \neg E$ ... Emil wurde nicht Zweiter.

Daraus wollen wir schließen:

- $F_3 = M \supset \neg L$ ... Wenn Max den Wettbewerb gewonnen hat, dann wurde Livia nicht Dritte.

Wir müssen nun die Gültigkeit der Konsequenzbeziehung $F_1, F_2 \models F_3$ überprüfen.

$I(M)$	$I(E)$	$I(L)$	$F_1,$	F_2	$\models_I$	F_3
1	1	1	0/1	0	✓	0
1	1	0	1	0	✓	1
1	0	1	1	1	↯	0
1	0	0	0	1	✓	1
0	1	1	1	0	✓	1
0	1	0	1	0	✓	1
0	0	1	1	1	✓	1
0	0	0	1	1	✓	1

In der gegebenen Ausgangsituation ist es also nicht logisch schlüssig anzunehmen, dass Livia nicht Dritte wurde, wenn Max den Wettbewerb gewonnen hat. Formal: Die Formel $M \supset \neg L$ ist keine logische Konsequenz der Prämissen $M \supset (E \not\equiv L)$ (bzw. $M \supset (E \vee L)$ und $\neg E$. Die dritte Zeile liefert ein Gegenbeispiel zur ursprünglichen Behauptung. Wenn Max Erster, Emil nicht Zweiter und Livia Dritte wurde, dann ist die Ausgangssituation erfüllt, aber daraus, dass Max Erster wurde, folgt nicht, dass Livia nicht Dritte wurde (sie ist ja Dritte).

Will man Arbeit sparen, beginnt man beim Befüllen der Wahrheitstafel mit F_2 (weil einfach) und setzt nur mit jenen Zeilen fort, in denen F_2 wahr ergibt. Danach sehen wir uns F_3 an und betrachten zuletzt F_1 nur für jene Zeilen, in denen F_3 falsch war.

$I(M)$	$I(E)$	$I(L)$	$F_1,$	F_2	$\models_I$	F_3
1	1	1		0	✓	
1	1	0		0	✓	
1	0	1	1	1	↯	0
1	0	0		1	✓	1
0	1	1		0	✓	
0	1	0		0	✓	
0	0	1		1	✓	1
0	0	0		1	✓	1

Formel zur Konsequenzbeziehung: F_3 ist genau dann eine logische Konsequenz der Formeln F_1 und F_2, in Zeichen $F_1, F_2 \models F_3$, wenn die Formel $(F_1 \wedge F_2) \supset F_3$ gültig ist.

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Sei f folgende dreistellige Funktion.

x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

Stellen Sie f durch eine Formel in

(a) disjunktiver

(b) konjunktiver

Normalform dar.

Lösung

(a) $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3)$

(b) $(\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_1 \vee A_2 \vee A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3)$

Aufgabe 9 (2 Punkte)

Sei F die Formel $((A \vee \neg B) \supset C) \wedge (A \uparrow B) \wedge A$.

(a) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in konjunktiver Normalform. Verwenden Sie die algebraische Methode.

(b) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in disjunktiver Normalform. Verwenden Sie die semantische Methode.

Lösung

(a) KNF mittels algebraischer Methode:

$$\begin{aligned}
&((A \vee \neg B) \supset C) \wedge (A \uparrow B) \wedge A && \scriptstyle F \supset G = \neg F \vee G \\
&= ((\neg(A \vee \neg B) \vee C) \wedge (A \uparrow B) \wedge A && \scriptstyle \neg(F \vee G) = \neg F \wedge \neg G \\
&= ((\neg A \wedge \neg\neg B) \vee C) \wedge (A \uparrow B) \wedge A && \scriptstyle \neg\neg F = F \\
&= ((\neg A \wedge B) \vee C) \wedge (A \uparrow B) \wedge A && \scriptstyle (F \wedge G) \vee H = (F \vee H) \wedge (G \vee H) \\
&= (\neg A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (A \uparrow B) \wedge A && \scriptstyle (F \uparrow G) = \neg F \vee \neg G \\
&= (\neg A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge A
\end{aligned}$$

Diese Formel ist in konjunktiver Normalform und damit eine Lösung.

Die Formel lässt sich vereinfachen, wenn wir mehrmals das Distributivgesetz anwenden und $F \vee \neg F$ kürzen. Damit erhalten wir aus $(\neg A \vee \neg B) \wedge A$ die Formel $\neg B \wedge A$, aus $(\neg A \vee C) \wedge A$ die Formel $C \wedge A$, und zuletzt aus $(B \vee C) \wedge \neg B$ die Formel $C \wedge \neg B$ ($\neg B$ stammt aus dem ersten Vereinfachungsschritt). Insgesamt ergibt sich die konjunktive Normalform

$$A \wedge \neg B \wedge C \ .$$

(b) Wir erstellen zuerst die Wahrheitstafel. Da die Formel auf oberster Ebene aus Konjunktionen besteht, ergibt sich für die ersten vier Interpretationen der Wert 0, da A den Wert 0 besitzt. In den verbleibenden Interpretationen ist die Formel $A \uparrow B$ nur in zwei Fällen wahr. Für diese müssen wir die erste Formel der Konjunktion auswerten.

A	B	C	$((A \vee \neg B)$	$\supset C)$	$\wedge$	$(A \uparrow B)$	$\wedge A$
0	0	0			**0**		
0	0	1			**0**		
0	1	0			**0**		
0	1	1			**0**		
1	0	0	1	0	**0**	1	1
1	0	1	1	1	**1**	1	1
1	1	0			**0**		1
1	1	1			**0**		1

Aus dieser Tabelle erhalten wir die disjunktive Normalform

$$A \wedge \neg B \wedge C \ .$$

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Der König eines nicht näher bestimmten Landes hat zehn Gefangene, möchte aber aus Platzmangel einige davon loswerden. Es sollen aber nur die Schlauesten unter ihnen freikommen, auf dass sie ihm gewogen sind und ihm künftig mit ihrer List beiseite stehen.
Der König hat folgenden Plan. Jeder Gefangene soll zwischen einer von zwei Türen wählen. Hinter jeder Tür ist entweder ein Tiger oder eine Dame. Wählt der Gefangene eine Tür mit einem Tiger, dann ist das sein Ende. Wählt er aber eine Tür mit einer Dame dahinter, dann bekommt er die Freiheit und die Dame noch dazu. An jeder der beiden Türen ist ein Schild angebracht mit einer Aufschrift.

Schild auf Tür 1: In diesem Raum ist eine Dame, im anderen ist ein Tiger.
Schild auf Tür 2: In dem einen der beiden Räume ist eine Dame und in dem anderen ist ein Tiger.

Der erste Gefangene kommt zu den Türen. „Stimmt denn das, was auf den Schildern steht?“, fragt er. „Ein Schild ist richtig“, erwidert der König, „aber das andere ist falsch“. Der Gefangene wurde zu Unrecht vom König eingesperrt. Helfen Sie ihm dabei, die richtige Tür zu wählen, indem Sie die Hinweise mit Hilfe der Aussagenlogik formalisieren und die Formeln geeignet auswerten.

Lösung

Wir führen folgende Aussagenvariablen ein:

$D1$ ... In Raum 1 ist eine Dame.
$D2$ ... In Raum 2 ist eine Dame.

Nun formalisieren wir die vorhandenen Informationen.

- Türe 1: In diesem Raum ist eine Dame, im anderen Raum ist ein Tiger.
  $F_1 = D1 \land \neg D2$

- Türe 2: In einem dieser Räume ist eine Dame und in einem dieser Räume ist ein Tiger.
  $F_2 = (D1 \land \neg D2) \lor (\neg D1 \land D2)$ bzw. $F_2 = D1 \not\equiv D2$

Ein Schild ist richtig, aber das andere ist falsch, d.h., die Wahrheitswerte der beiden Formeln sind verschieden.
$F_1 \not\equiv F_2 = (D1 \land \neg D2) \not\equiv (D1 \not\equiv D2)$
Wir suchen nun alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen $D1$ und $D2$, sodass diese Formeln wahr wird.

$D1$	$D2$	$(D1$	$\land$	$\neg D2)$	$\not\equiv$	$(D1$	$\not\equiv$	$D2)$	
0	0		0		0		0		
0	1		0		1		1		✓
1	0		1		0		1		
1	1		0		0		0		

Die Formel ist nur in einer Interpretation wahr. Der Gefangene sollte Tür 2 wählen.

Aufgabe 11 (4 Punkte)

Marie und Pierre haben zur Matura von ihrem (offensichtlich recht wohlhabenden) Onkel Round-the-World-Tickets geschenkt bekommen. Nach kurzer Zeit haben sie die meisten Stopps festgelegt, nur bei Südamerika sind die beiden noch unschlüssig. Sie dürfen noch höchstens drei weitere Stopps machen. Zur Auswahl stehen Peru, Brasilien, Argentinien, Chile und Uruguay. Sie stellen folgende Überlegungen an:
Marie: *„Wir müssen auf jeden Fall nach Peru zum Machu Picchu.“*
Pierre: *„Aber ich möchte auf jeden Fall auch noch in mindestens ein Land, von dem aus ich die Iguazu-Wasserfälle sehen kann!“* (Die Iguazu-Wasserfälle befinden sich an der Grenze zwischen Brasilien und Argentinien und können von beiden Ländern aus besucht bzw. besichtigt werden.)
Marie: *„In Brasilien und Uruguay ist der Regenwald sehr ähnlich, diese Länder müssen wir nicht beide besuchen.“*
Pierre: *„Ich will aber nur nach Brasilien, wenn wir auch nach Chile fahren!“*
Marie: *„Wenn wir nach Brasilien fahren, will ich auch nach Argentinien.“*

(a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.

(b) Welche Länder in Südamerika werden die beiden bereisen, welche Kombinationen sind möglich? Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Lösung

(a) Aussagenvariablen und ihre Bedeutung:

A ... Sie fahren nach Argentinien.
B ... Sie fahren nach Brasilien.
C ... Sie fahren nach Chile.
P ... Sie fahren nach Peru.
U ... Sie fahren nach Uruguay.

Aussagenlogische Formeln:

$F_0 := P$ Peru auf jeden Fall
$F_1 := \neg(A \wedge B \wedge C) \wedge \neg(A \wedge B \wedge U) \wedge \neg(A \wedge C \wedge U) \wedge \neg(B \wedge C \wedge U)$
höchstens zwei weitere Stopps ohne Peru (nicht drei oder mehr)
oder
$F_1 := \neg(A \wedge B \wedge C \wedge P) \wedge \neg(A \wedge B \wedge C \wedge U) \wedge \neg(A \wedge B \wedge P \wedge U) \wedge \neg(A \wedge C \wedge P \wedge U)$
$\wedge \neg(B \wedge C \wedge P \wedge U)$
höchstens drei Stopps (nicht vier oder mehr)
$F_2 := A \vee B$ mind. ein Iguazu-Land
$F_3 := B \uparrow U$ nicht Brasilien und Uruguay gleichzeitig
$F_4 := B \supset C$ Brasilien nur dann wenn Chile
$F_5 := B \supset A$ wenn Brasilien dann Argentinien

(b) Wir suchen alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen A, B, C, P und U, sodass die Formeln $F_0, \ldots, F_5$ wahr werden. Wegen Formel F_0 und F_1 genügt es jene Belegungen zu betrachten, in denen höchstens drei Variablen wahr sind, wovon eine P ist.

P	B	A	U	C	F_0	F_1	$A \vee B$	$B \uparrow U$	$B \supset C$	$B \supset A$	
1	0	0	0	0	1	1	0				
1	0	0	0	1	1	1	0				
1	0	0	1	0	1	1	0				
1	0	0	1	1	1	1	0				
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	✓
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	✓
1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	✓
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0		
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	
1	1	0	1	0	1	1	1	0			
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0		

Folgende Länderkombinationen erfüllen alle Bedingungen.

- Peru, Argentinien

- Peru, Argentinien, Chile
- Peru, Argentinien, Uruguay.

Wenn wir davon ausgehen, dass Marie und Pierre ihr Ticket maximal ausnützen wollen, bereisen die beiden Peru und Argentinien und zusätzlich entweder Chile oder Uruguay.

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Das Startup Fesla entwickelt die Steuerung für ein selbstfahrendes Auto. Diese ist durch eine aussagenlogische Formel F mit 100 000 Variablen spezifiziert. Bevor daraus Schaltkreise generiert werden, verifiziert das Team, dass die Steuerung gewisse Sicherheitsbedingungen erfüllt. Eine davon ist, dass die Variablen *Bremsen* und *Beschleunigen* (mit denen die Bremse bzw. das Gaspedal ausgelöst wird) nicht gleichzeitig wahr sein dürfen.

(a) Formulieren Sie die Verifikationsaufgabe als eine logische Aussage, die ausdrückt, dass Steuerungen, die die Spezifikation F erfüllen, nicht gleichzeitig bremsen und beschleunigen.

(b) Wie kann man zeigen, dass diese logische Aussage zutrifft? Die große Zahl an Variablen legt nahe, einen SAT-Solver zu verwenden.

(c) Welches Verhalten zeigt der SAT-Solver, wenn die Spezifikation F einen Fehler enthält, sodass die Sicherheitsbedingung nicht immer erfüllt ist?

(d) Die Konkurrenz schläft nicht: Das Team der Firma Dumbo hat eine ähnliche Spezifikation mit nur 10 000 Variablen entwickelt und testet dieselbe Sicherheitsbedingung. Da sie SAT-Solver nicht kennen, überprüfen sie die logische Aussage systematisch für alle Wahrheitsbelegungen. Ihr Supercomputer kann zehn Milliarden (10^{10}) Belegungen pro Sekunde testen. Schätzen Sie die erforderliche Laufzeit grob ab.
Hinweis: $2^{10} \approx 10^3$, 1 Jahr $\approx 3 \cdot 10^7$ Sekunden.

Lösung

(a) $F \models \mathit{Bremsen} \uparrow \mathit{Beschleunigen}$ oder
$F \models \neg(\mathit{Bremsen} \wedge \mathit{Beschleunigen})$ oder
$F \models \neg\mathit{Bremsen} \vee \neg\mathit{Beschleunigen}$ oder

(b) $F \models \mathit{Bremsen} \uparrow \mathit{Beschleunigen}$

$$\iff F \supset (\mathit{Bremsen} \uparrow \mathit{Beschleunigen}) \quad \text{gültig}$$
$$\iff F \wedge \neg(\mathit{Bremsen} \uparrow \mathit{Beschleunigen}) \quad \text{unerfüllbar}$$
$$\iff F \wedge \mathit{Bremsen} \wedge \mathit{Beschleunigen} \quad \text{unerfüllbar}$$

Liefert der SAT-Solver für die letzte Formel die Antwort ‘nein, ist nicht erfüllbar’, dann erfüllt die Spezifikation F die Sicherheitsbedingung.

(c) Der SAT-Solver liefert die Antwort 'ja, die Formel $F \wedge \mathit{Bremsen} \wedge \mathit{Beschleunigen}$ ist erfüllbar', sowie eine Wahrheitsbelegung, in der die Formel zu wahr evaluiert.

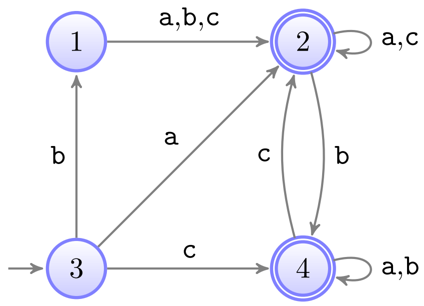
(d) Zahl der Variablenbelegungen: $2^{10\,000} = (2^{10})^{1000} \approx (10^3)^{1000} = 10^{3000}$. Bei 10^{10} Belegungen pro Sekunde benötigt der Superrechner $10^{3000}/10^{10} = 10^{2990}$ Sekunden, das sind etwa $10^{2990}/(3 \cdot 10^7) = 3.33 \cdot 10^{2982}$ Jahre.

Alternative Abschätzung mittels $2^3 \approx 10$*:* Zahl der Variablenbelegungen: $2^{10\,000} = (2^3)^{3333} \approx 10^{3333}$. Bei 10^{10} Belegungen pro Sekunde benötigt der Superrechner $10^{3333}/10^{10} = 10^{3323}$ Sekunde, das sind etwa $10^{3323}/(3 \cdot 10^7) = 3.33 \cdot 10^{3315}$ Jahre.

Zum Vergleich: Unsere Sonne ist etwa $5 \cdot 10^9$ Jahre alt und wird etwa nochmals so lange existieren, ehe sie explodiert und zu einem weißen Zwerg kollabiert. Der Superrechner hat zu diesem Zeitpunkt erst einen winzigen Bruchteil der Variablenbelegungen getestet, der verglichen mit der Gesamtzahl irrelevant ist.

Aufgabe 13 (3 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ der folgende endliche Automat.



(a) Geben Sie alle Wörter an, die aus maximal zwei Zeichen bestehen und von $\mathcal{A}$ akzeptiert werden. (Das sollten 11 Wörter sein.)

(b) Berechnen Sie schrittweise $\delta^*(3, \texttt{bcaabb})$.

(c) Spezifizieren Sie $\mathcal{A}$ in tabellarischer Form. Handelt es sich bei $\mathcal{A}$ um einen deterministischen oder indeterministischen Automaten?

Lösung

(a) Die von $\mathcal{A}$ akzeptierten Wörter mit einer Länge von maximal zwei Zeichen sind `a`, `c`, `aa`, `ab`, `ac`, `ba`, `bb`, `bc`, `ca`, `cb` und `cc`.

(b) $\delta^*(3, \texttt{bcaabb}) = \delta^*(\delta(3, \texttt{b}), \texttt{caabb})$
$= \delta^*(1, \texttt{caabb})$
$= \delta^*(\delta(1, \texttt{c}), \texttt{aabb})$
$= \delta^*(2, \texttt{aabb})$
$= \delta^*(\delta(2, \texttt{a}), \texttt{abb})$
$= \delta^*(2, \texttt{abb})$
$= \delta^*(\delta(2, \texttt{a}), \texttt{bb})$
$= \delta^*(2, \texttt{bb})$
$= \delta^*(\delta(2, \texttt{b}), \texttt{b})$
$= \delta^*(4, \texttt{b})$
$= \delta^*(\delta(4, \texttt{b}), \varepsilon)$
$= \delta^*(4, \varepsilon)$
$= 4$

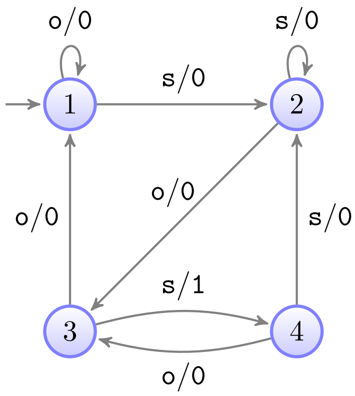
(c) $\mathcal{A} = \langle\{1, 2, 3, 4\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}, \delta, 3, \{2, 4\}\rangle$, wobei die Übergangsfunktion δ durch folgende Tabelle definiert ist:

δ	a	b	c
1	2	2	2
2	2	4	2
3	2	1	4
4	4	4	2

$\mathcal{A}$ ist ein deterministischer Automat, da der momentane Zustand und die nächste Eingabe immer eindeutig den Folgezustand bestimmen. Das äußert sich in der Tabelle dadurch, dass jeder Eintrag genau einen Zustand enthält.

Aufgabe 14 (3 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ der folgende Mealy-Automat.



(a) Geben Sie die Ausgabe zur Eingabe `osososs` an.

(b) Berechnen Sie schrittweise $\delta^*(1, \texttt{ssosso})$ und $\gamma^*(1, \texttt{ssosso})$.

(c) Beschreiben Sie die Übersetzungsfunktion $[\mathcal{A}]$.

Lösung

(a) $\gamma^*(1, \texttt{osososs}) = \texttt{0001010}$

(b)

$$\begin{aligned}
\delta^*(1, \texttt{ssosso}) &= \delta^*(\delta(1, \texttt{s}), \texttt{sosso}) \\
&= \delta^*(2, \texttt{sosso}) \\
&= \delta^*(\delta(2, \texttt{s}), \texttt{osso}) \\
&= \delta^*(2, \texttt{osso}) \\
&= \delta^*(\delta(2, \texttt{o}), \texttt{sso}) \\
&= \delta^*(3, \texttt{sso}) \\
&= \delta^*(\delta(3, \texttt{s}), \texttt{so}) \\
&= \delta^*(4, \texttt{so}) \\
&= \delta^*(\delta(4, \texttt{s}), \texttt{o}) \\
&= \delta^*(2, \texttt{o}) \\
&= \delta^*(\delta(2, \texttt{o}), \varepsilon) \\
&= \delta^*(3, \varepsilon) \\
&= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^*(1, \texttt{ssosso}) &= \gamma(1, \texttt{s}) \cdot \gamma^*(\delta(1, \texttt{s}), \texttt{sosso}) \\
&= \texttt{0} \cdot \gamma^*(2, \texttt{sosso}) \\
&= \texttt{0} \cdot \gamma(2, \texttt{s}) \cdot \gamma^*(\delta(2, \texttt{s}), \texttt{osso}) \\
&= \texttt{0} \cdot \texttt{0} \cdot \gamma^*(2, \texttt{osso}) \\
&= \texttt{00} \cdot \gamma(2, \texttt{o}) \cdot \gamma^*(\delta(2, \texttt{o}), \texttt{sso}) \\
&= \texttt{00} \cdot \texttt{0} \cdot \gamma^*(3, \texttt{sso}) \\
&= \texttt{000} \cdot \gamma(3, \texttt{s}) \cdot \gamma^*(\delta(3, \texttt{s}), \texttt{so}) \\
&= \texttt{000} \cdot \texttt{1} \cdot \gamma^*(4, \texttt{so}) \\
&= \texttt{0001} \cdot \gamma(4, \texttt{s}) \cdot \gamma^*(\delta(4, \texttt{s}), \texttt{o}) \\
&= \texttt{0001} \cdot \texttt{0} \cdot \gamma^*(2, \texttt{o}) \\
&= \texttt{00010} \cdot \gamma(2, \texttt{o}) \cdot \gamma^*(\delta(2, \texttt{o}), \varepsilon) \\
&= \texttt{00010} \cdot \texttt{0} \cdot \gamma^*(3, \varepsilon) \\
&= \texttt{000100} \cdot \varepsilon = \texttt{000100}
\end{aligned}$$

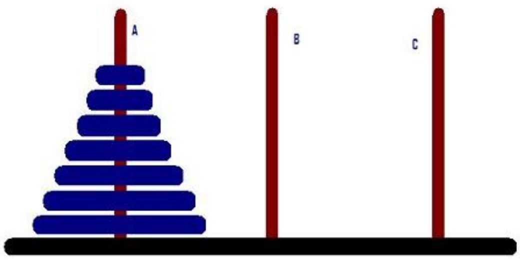
(c) Der Automat erkennt `sos` in der Eingabe: Wird `sos` eingelesen, so ist die Ausgabe `1`, sonst `0`.

Aufgabe 15 **(4 Punkte)**

Die *Türme von Hanoi* sind ein Rätsel, das aus drei senkrechten Stäben (A, B, C) und n gelochten, unterschiedlich großen Scheiben besteht. Zu Beginn befinden sich alle Scheiben nach Größe sortiert auf Stab A, mit der größten zuunterst. Ziel des Spieles ist es, den gesamten Turm auf Stab C zu verschieben.

Dabei sind folgende Regeln zu beachten:

- In jedem Zug wird die oberste Scheibe von einem der Stäbe entfernt und bei einem der anderen Stäbe zuoberst abgelegt.
- Es dürfen nur kleinere auf größere Scheiben gelegt werden.



(a) Was macht einen Zustand in diesem System aus? Welche Informationen sind notwendig, um einen Zustand eindeutig zu beschreiben? Wieviele verschiedene Zustände gibt es bei n Scheiben? Wie kann man die Zustände eindeutig, aber kompakt bezeichnen?

(b) Was sind die Übergänge in diesem System? Welche und wieviele gibt es? Wie kann man sie eindeutig, aber kompakt bezeichnen?

(c) Geben Sie einen endlichen Automaten an, der dieses System für $n = 2$ vollständig beschreibt.

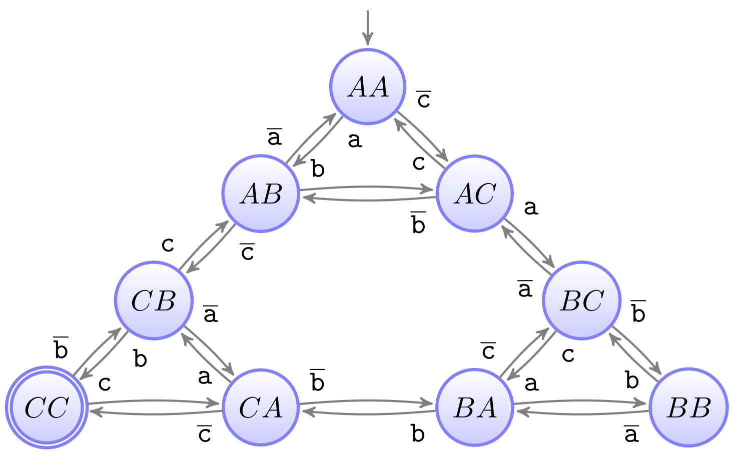
Lösung

(a) Der Systemzustand wird durch die Position der Scheiben bestimmt. Um ihn eindeutig zu beschreiben, genügt es, zu jeder Scheibe den Stab festzuhalten, auf dem sie sich befindet; die Position der Scheibe auf dem Stab hingegen ergibt sich automatisch, da die Scheiben nach Größe sortiert sind. Für jede Scheibe gibt es drei mögliche Stäbe; bei n Scheiben ergeben sich 3^n verschiedene Aufteilungen der Scheiben, d.h., 3^n verschiedene Zustände. Ein Zustand wird eindeutig durch eine Zeichenkette $s_1 \cdots s_n$ mit $s_i \in \{A, B, C\}$ beschrieben, wobei $s_i = x$ bedeutet, dass sich Scheibe i auf dem Stab x befindet.

(b) Zustandsübergänge kommen durch das Verschieben einer Scheibe von einem Stab auf einen anderen zustande. Es gibt sechs verschiedene Aktionen: Verschieben der Scheibe von Stab A nach B ($\mathtt{a}$), von B nach C ($\mathtt{b}$), von C nach A ($\mathtt{c}$), und die umgekehrten Verschiebungen ($\overline{\mathtt{a}}$, $\overline{\mathtt{b}}$, $\overline{\mathtt{c}}$).

Weniger abstrakt kann man auch jeden Übergang mit einem eigenen Symbol beschriften; dieses steht dann für den Übergang von einem konkreten Zustand zum anderen. Für $n = 2$ besteht dann das Eingabealphabet aus 24 Symbolen. Diese Variante ist aber "weniger richtig", da sie das System schlechter modelliert. Der Unterschied wird z.B. sichtbar, wenn man die Wörter der Sprache als Handlungsanweisungen zur Lösung des Rätsels verwenden möchte, oder wenn man die Zahl der Scheiben erhöht.

(c) Graphische Darstellung des Automaten, wobei wir den Fehlerzustand (die Falle) für unzulässige Übergänge weglassen.



Tabellarische Darstellung (F bezeichnet den Fehlerzustand):

	δ	$\mathtt{a}$	$\mathtt{b}$	$\mathtt{c}$	$\overline{\mathtt{a}}$	$\overline{\mathtt{b}}$	$\overline{\mathtt{c}}$
Startzustand	AA	AB	F	F	F	F	AC
	AB	F	AC	F	AA	F	CB
	AC	BC	F	AA	F	AB	F
	BA	BB	CA	F	F	F	BC
	BB	F	BC	F	BA	F	F
	BC	F	F	BA	AC	BB	F
	CA	CB	F	F	F	BA	CC
	CB	F	CC	AB	CA	F	F
Endzustand	CC	F	F	CA	F	CB	F
	F	F	F	F	F	F	F

Der Automat als ein 5-Tupel:

$$\langle \{AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC, F\},\ \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \overline{\mathtt{a}}, \overline{\mathtt{b}}, \overline{\mathtt{c}}\},\ \delta,\ AA,\ \{CC\} \rangle$$

wobei die Übergangsfunktion δ durch die Tabelle oben festgelegt ist.