Potenzreihen-Ansatz

Annahme/Ansatz: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Bsp: $y' = y^2 + \sin(x)$.
Koeffizientenvergleich:

	x^0	x^1	x^2	x^3	$\dots$
y	a_0	a_1	a_2	a_3	
y^2	a_0	$2a_1a_0$	$2a_2a_0 + a_1^2$	$2a_3a_0 + 2a_2a_1$	
$\sin(x)$	0	1	0	$-\frac{1}{3!}$	
$y^2 + \sin(x)$	a_0	$1 + 2a_1a_0$	$2a_2a_0 + a_1^2$	$-\frac{1}{3!} + 2a_3a_0 + 2a_2a_1$	
y'	a_1	$2a_2$	$3a_3$	$4a_4$	

Bei Randbedingung $y(0) = 1$ ergibt sich: $a_0 = 1$, $a_1 = a_0 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}(1 + 2a_1a_0) = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}(2a_2a_0 + a_1^2) = \frac{4}{3}$, etc.

Daher: $y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{11}{6}x^4 + O(x^5)$.

Allgemeiner Differentialgleichungen

- Diffgleichungen wichtig und allgegenwärtig (vA in Physik).
- I.A. hoffnungslos, eine in der Anwendung gegebene Diffgleichung exakt zu lösen.
- Einige wichtige Ausnahmen:
  Newtonsche Physik: 2-Körper-Problem (scheitert an 3),
  Schrödinger-Gleichung: Wasserstoffatom (scheitert 2. Elektron),
  Maxwell-Gleichungen: Lichtwellen im Vakuum (scheitert an geladenen Teilchen).
- Das heißt nicht dass nicht viel dazu zu sagen wäre:
  Löse einfache Approximation der Gleichnung exakt,
  Numerische Lösungen, Potenzreihenansatz, ...
  (Exakte) "qualitative" Aussagen ...

Harmonischer Oszillator

Eine der wichtigsten (und leicht lösbaren) Diffgleichungen:

- Punktteilchen in konstantem Kraftfeld $F(x)$:
  Kraft ist Masse mal Beschleunigung, d.h. $x''(t) = \frac{1}{m}F(x)$.
- Schreiben $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
- Wenn Teilchen um Gleichgewichtspunkt $x = 0$ schwingt:
  $F(0) = 0$ (d.h. $a_0 = 0$),
  $F(x) > 0$ wenn $x < 0$ und $F(x) < 0$ wenn $x > 0$ (d.h. $a_1 \leq 0$).
- Daher ist $F(x) = -bx + O(x^2)$ mit $b > 0$.
- Kleine Schwingungen: $O(x^2)$ vernachlässigbar:
- $x''(t) = \frac{1}{m}F(t) = -\frac{b}{m}x(t)$, d.h. $x(t) = a\sin(\sqrt{\frac{b}{m}}t + d)$.
- Das ist die universelle "erste Approximation" aller kleinen Schwingungen: Stimmgabel, Pendel, Federpendel;
  im Wesentlichen auch: Photonen (Lichtemission aus Atomschwingungen), etc.

Bsp: Schrödingergleichung

- Grundlegende "Bewegungsgleichung" der Quantenmechanik.
- $\psi(x,t)$ (komplexe!) Wellenfunktion eines Teilchens, abh. von Ort x und Zeit t.
  $|\psi(x,t)|^2$ ist Wahrscheinlichkeit bei Messung das Teilchen zur Zeit t in x zu finden.
- Teilchen in Potential $V(x,t)$:
  $\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + V(x,t)\cdot\psi(x,t)$ (Schrödingergl.)
- Lösbar für: Freies Teilchen (V konstant), $V(x) = x^2$ (harmon. Oszillator), Treppen und δ-Potentiale,
  (3dim:) Elektron in H-Atom ($V(\vec{x}) = -\frac{c}{|\vec{x}|}$).
- Wichtig: Diffgleichung ist linear, d.h.: Wenn ψ_1 und ψ_2 Lösungen sind, dann auch $c\cdot\psi_1$ und $\psi_1+\psi_2$.
  ($\rightarrow$ Superposition, Schrödingers Katze).
- Einige andere wichtige Gleichungen in der Physik sind linear, z.B. Maxwellgleichungen.
  ($\rightarrow$ Lichtwellen (im Vakuum) überlagern einander störungsfrei.)

Lineare (gew.) Diffgleichungen

- $y' + a(x)y = g(x)$ heißt Lineare Diffgleichung erster Ordnung; $a(x)$ Koeffizient, $g(x)$ Störfunktion bzw Inhomogenität.
  Wenn $g = 0$ heißt Diffgleichung homogen. (Gdw $y = 0$ Lösung ist.)
- Analog: $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)y^{(k)} = g(x)$ lineare Diffgleichung n-ter Ordnung mit Inhomogenität g.
- Superpositionsprinzip: Wenn y_1 Lösung zu Inhomogenität g_1 ist und y_2 zu g_2 (d.h. bei erster Ordnung: $y_i' + a(x)y_i = g_i(x)$ für $i = 1, 2$), dann ist $\alpha y_1 + \beta y_2$ (α, β konstant) Lösung zur Inhomogenität $\alpha g_1 + \beta g_2$.
  (Bew: Ableitung ist linearer Operator)
- Insbesondere: Sei y Lösung zur Inhomogenität g. Dann ist z ebenfalls solche Lösung gdw $z = y + w$ mit w Lösung der homogenen Gleichung.
  (Bew: Gegeben $y =: y_1$ und $z =: y_2$, verwende $\alpha := -1$, $\beta := 1$ und $g_1 := g_2 := g$; bzw gegeben $y =: y_1$ und $w =: y_2$ verwende $\alpha := \beta := 1$ und $g_1 := g$, $g_2 := 0$.)

Lineare Diffgleichungen erster Ordnung

- Lösung der hom. Gl. $y' + a(x)y = 0$ ist $e^{-A(x)}$, wobei $A' = a$ (oder konstant 0).
  Äquivalent: Allgemeine Lösung ist $Ce^{-A(x)}$, mit C konstant und A "fixer" Stammfunktion von A.
- Beweis: $y' = (e^{-A(x)})' = -a(x)e^{A(x)} = -a(x)y$.
  (Ohne Beweis: alle Lösungen sehen so aus.)
- Finden einer "partikulären" Lösung zur Störfunktion g:
  "Variation der Konstanten" (der Konstante C der hom. Lösung).
  Ansatz: $y_h(x) = e^{-A(x)}$; $y_p = C(x)y_h$.
  Das ergibt (Produktregel): $y_p' + a(x)y_p = c'(x)y_h$, was g sein soll.
  D.h. $c'(x) = e^{A(x)}g(x)$, bzw $c(x) = \int_{x_0}^{x} e^{A(t)}g(t)dt$.
- Zusammenfassung: Die Lösungen von $y' + a(x)y = g$ sind $y = e^{-A(x)}(C + B(x))$ mit C konstant, $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt$ und $B(x) = \int_{x_0}^{x} e^{A(t)}g(t)dt$ (x_0 beliebig).

Nachtrag zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Anfangswertproblem: $y'(x) = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$

- Wir wissen: Wenn f stetig, dann gibt es lokal eine Lösung. Es muss aber keine globale Lösung geben! Bsp: ("Blow-Up"):
  - $y' = y^2$, $y(0) = 1$.
  - Trennung d. Var: $\frac{dy}{y^2} = dx$, $-\frac{1}{y} = x + C$, d.h. $y = \frac{1}{C-x}$
  - $y(0) = 1$, d.h. $C = 1$. Lösung ist also $y = \frac{1}{1-x}$.
  - Lösunge geht für $x = 1$ nach unendlich! (Keine stetige Lösung über $x = 1$ hinaus möglich.)
  - Andere Intuition: x Zeit, y Position. "Teilchen" bewegt sich in endlicher Zeit $x = 1$ gegen unendlich.
- Wir wissen: Wenn f zusätzlich Lipschitz-Bedingung erfüllt, dann Lösung lokal eindeutig. Gilt ohne Lipschitz-Bedingung nicht. Bsp: $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$ hat Lösungen (für $-\infty \leq a \leq 0 \leq b \leq \infty$)

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-b)^2 & \text{wenn } x > b \\ 0 & \text{wenn } a \leq x \leq b \\ -\frac{1}{4}(x-a)^2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analysis in höheren Dimensionen

Kurven in Raum und Ebene

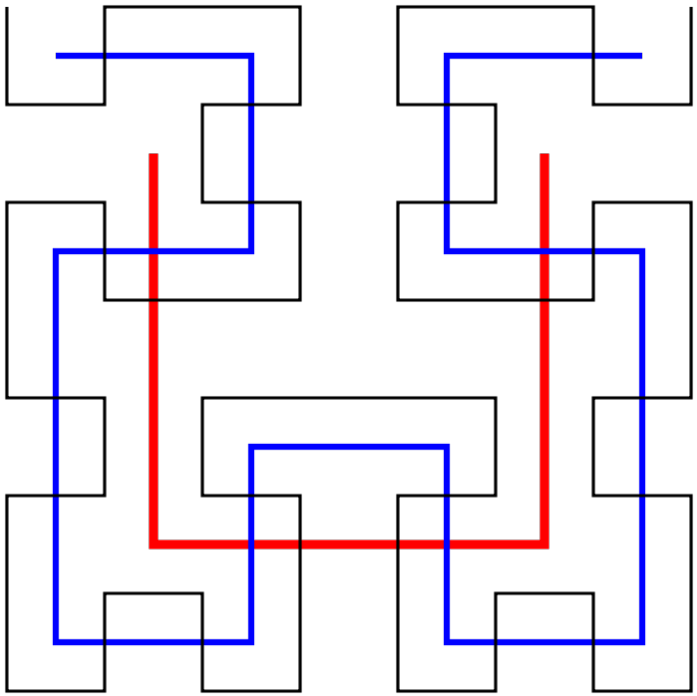
- Wir betrachten "parametrisierte Kurven" in $\mathbb{R}^n$, das sind: stetige Funktionen $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma(t)$, mit $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.
  Statt $\gamma(t)$ schreiben wir auch $(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$.
  Das Bild der Kurve ist $\gamma'' I \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Für $n = 1$ sind das einfach die bekannten reelle Funktionen.
  Allgemein haben wir n viele stetige Funktionen γ_i.
- Für $n = 2$: Kurven in der Ebene.
  Beispiel: $r(\sin(\omega t), \cos(\omega t))$ bewegt sich entlang einem Kreis mit Radius r mit Winkelgeschwindigkeit ω. Das Bild ist daselbe wenn man als Definitionsmenge z.B. $\mathbb{R}$ oder $[0, 2\pi]$ etc wählt.
- γ ist (n-mal|stetig) diffbar, wenn jede Komponente γ_i (n-mal|stetig) diffbar ist.
- Differenzierbare Kurven können Ecken haben. Bsp: (t^2, t^3)

Ableitung und Weglänge

- Die Ableitung $\gamma'(t)$ ist $(\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$.
- Bsp: für $\gamma(t) = r(\sin(\omega t), \cos(\omega t))$ ist $\gamma'(t) = r\omega(\cos(\omega t), -\sin(\omega t))$, und $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{r^2\omega^2\cos^2(\omega t) + r^2\omega^2\sin^2(\omega t)} = r\omega$.
- Wenn t als Zeit interpretiert wird, ist $\gamma'(t)$ die Geschwindigkeit (ein Vektor).
- Daher können wir die Weglänge (für $I = [a, b]$) definieren als $\int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$.
- Existiert jedenfalls wenn γ stetig diffbar.
- In obigem Beispiel, für $I = [0, \frac{2\pi}{\omega}]$, bekommen wir wenig überraschend die Weglänge $\int_a^b r\omega \, dt = 2r\pi$.

Perverse Kurven

Es gibt stetige "raumfüllende" Kurven, d.h.
$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ stetig so dass $\gamma''[a,b] = \mathbb{R}^2$.
Bsp.: Hilbert-Kurve



(Mit differenzierbaren Funktionen kann das nicht passieren.)

Integration in höheren Dimensionen

- Sei $f : R \to \mathbb{R}$ mit $R \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir wollen das Volumen $\int_R f(x,y)dA$, auch $\iint_R f(x,y)dA$ geschrieben, zwischen x-y-Ebene und dem Funktionsgraphen berechnen.
- Für $R = [a,b] \times [c,d]$ gilt:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

- Allgemeiner: Wenn $R = \{(x,y) : \ a \leq x \leq b, \ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$ für stetige Funktionen ϕ_1, ϕ_2, dann ist

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

Kugelvolumen

- $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = \frac{1}{2} a^2 \pi$ (die Fläche des Halbkreises mit Radius a).
- Sei $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ und $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.
  Dann ist $W := \iint_R f(x, y) dA$ das Volumen einer Halbkugel mit Radius r.
- Es gilt also: $W = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dy\, dx$.
  Dabei ist $\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dy$ die Fläche des Halbkreises mit Radius $\sqrt{r^2 - x^2}$, d.h. $\frac{\pi}{2}(r^2 - x^2)$.
  Es ist also
  $W = \frac{\pi}{2} \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx = \frac{\pi}{2}(2r^3) - \frac{\pi}{2} \int_{-r}^{r} x^2 dx = \frac{\pi}{2}(2r^3 - 2\frac{r^3}{3}) = \frac{2\pi r^3}{3}$.
- Das Kugelvolumen ist also $\frac{4\pi r^3}{3}$.