Runde 1, Beispiel 5

LVA 118.181, Übungsrunde 1, 20.10.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 12.02.2007

1 Angabe

Zeige, dass $\cos x \cdot \cos y - (\sin x \cdot \sin y + y^2) \cdot y' = 0$ eine exakte Differentialgleichung ist und löse das AWP $y(0) = 1$.

2 Theoretische Grundlagen: Exakte Differentialgleichungen

Exakte Differentalgleichungen stellen eine spezielle Form der Differentialgleichungen 1. Ordnung dar und entstehen durch Differentiation nach der Kettenregel aus $U(x, y) = const.$. Ihre implizite Form lautet

$$U_x(x, y) + U_y(x, y)y' = 0,$$

und die explizite für $U_y \neq 0$:

$$y' = -\frac{U_x(x, y)}{U_y(x, y}$$

Normalerweise ist die Exaktheit einer Differentialgleichung nicht auf den ersten Blick ersichtlich. Eine Differentialgleichung der Form

$$A(x, y) + B(x, y)y' = 0$$

ist dann exakt, wenn es eine Funktion U gibt, so dass gilt:

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x} = A, \qquad U_y = \frac{\partial U}{\partial y} = B$$

$\mathbf{U}$ ist dann die **Stammfunktion von** $\mathbf{A(x, y) + B(x, y)y' = 0}$ (und ist nichts anderes als die Stammfunktion des Vektorfeldes

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} A(x, y) \\ B(x, y) \end{pmatrix}$$

Der **Exaktheitstest** ergibt für $A(x, y)+B(x, y)y' = 0$ genau dann ein positives Resultat, wenn folgende **Integrabilitätsbedingung** erfüllt ist:

$$\frac{\partial}{y}A(x, y) = \frac{\partial}{x}B(x, y)$$

Allgemein lautet die **Lösungsmethode für exakte Differentialgleichung der Form A(x,y) + B(x,y)y' = 0**:

1. Bestätigen von
$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$
2. Bestimmung einer Stammfunktion über den Ansatz $u_x = A$, $U_y = B$:
   a) A unbestimmt nach x integrieren
   $$U(x,y) = \int A(x,y)\,dx + c(y)$$
   b) y partiell nach y differenzieren, mit B gleichsetzen:
   $$U_y(x,y) = (\int A(x,y)\,dx)_y + c'(y) = B$$
   c) $c(y)$ durch Integration nach y bestimmen

   Allgemeine implizite Lösung: $U(x,y) = const.$
3. Implizite Lösung ist $U(x,y) = U(x_0, y_0)$ - wenn möglich nach y auflösen und Definitionsbereich bestimmen.

3 Lösung des Beispiels

3.1 Exaktheitstest

$$\begin{aligned}
\cos x \cdot \cos y - (\sin \cdot \sin y + y^2) \cdot y' = 0 \\
A(x,y) = \cos x \cdot \cos y \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = \cos x \cdot (-\sin y) \\
B(x,y) = (-1) \cdot (\sin x \cdot \sin y + y^2) \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = \cos x \cdot (-\sin y) \\
\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \qquad \Rightarrow \qquad \text{exakte DGL liegt vor}
\end{aligned}$$

3.2 Bestimmung einer Stammfunktion ($U_x = A$, $U_y = B$)

1.
$$U_x(x,y) = \int A(x,y)\,dx + c(y) = \int \cos x \cdot \cos y\,dx + c(y) = \sin x \cdot \cos y + c(y)$$

2.

$$
\begin{aligned}
U_y(x,y) = (\int A(x,y)\,dx)_y + c'(y) = B(x,y) \\
(\sin x \cdot \cos y)_y + c'(y) = -\sin x \cdot \sin y + y^2 \\
-\sin x \cdot \sin y + c'(y) = -\sin x \cdot \sin y + y^2 \\
c'(y) = y^2
\end{aligned}
$$

3.

$$
c(y)' = y^2 \mid \int \qquad \Rightarrow \qquad c(y) = \frac{y^3}{3} + c
$$

Allgemeine Lösung somit:

$$
\mathbf{U(x,y) = \sin x \cdot \cos y + c(y) = \sin x \cdot \cos y + \frac{y^3}{3} + c}
$$

3.3 Lösung des AWPs

$$
\begin{aligned}
y(0) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sin 0 \cdot \\
cos 1 + \frac{1}{3} + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = -\frac{1}{3} \\
\mathbf{\sin x \cdot \cos y + \frac{y^3}{3} - \frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$