Zweite Fall:

$y(x) = 0$

$y_A(x) = \vartheta(x)$ ist Lösung. $\vartheta(x)$ muss nicht $\emptyset$ sein und auch nicht $\lim_{x\to\infty} \vartheta(x) = 0$ erfüllen, daher nicht

asymptotisch stabil

Alternative kann man rechnen:

$$f(y) = y(1-y) = \emptyset \qquad f'(y) = 1-2y$$

$f'(y) = 1-2y \rightarrow$ aus Gleichung $y = 0 \rightarrow f'(0) = 1 \rightarrow$ instabil
$y = 1 \rightarrow f'(1) = -1 \rightarrow$ asym. stab.

Echte Lösung: Trennung der Variablen

$$\frac{-dy}{y(y-1)} = dx$$

Alternative: $$\frac{1}{y(y-1)} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}$$

$$-\int\left(-\frac{1}{y}\right)dy + \int \frac{1}{y-1}\,dy = \int dx$$

$$\ln|y| + \ln|y-1| = x + \ln|C| \qquad C \neq \emptyset,\ C \in \mathbb{R}$$

$$\ln\left|\frac{y}{y-1}\right| = x + C \qquad y = \frac{1}{1-C^{-1}e^{-x}}$$ echte Lösung

35) $\frac{dD}{dt} = \alpha Y(t)$ $\qquad$ $Y(0) = Y_0$, $D(0) = D_0$

Entwicklung von $\boxed{\frac{D(t)}{Y(t)}}$

a) $Y(t)$ konstant:

$$\frac{dD}{dt} = \alpha Y_0 \Rightarrow D = \alpha Y_0 t + C$$

$$D(0) = \alpha \cdot 0 + D_0 \rightarrow C = D_0$$

$$\underline{D(t) = \alpha Y_0 t + D_0}$$

$$\frac{D(t)}{Y(t)} = \frac{\alpha Y_0 t + D_0}{Y_0} = \alpha t + \frac{D_0}{Y_0}$$

$\frac{D(t)}{Y(t)}$ wächst beliebig mit der Steigung α.

b) $Y(t) = a + bt$

$$\frac{dD}{dt} = \alpha(a+bt) \overset{\text{Integration}}{\Rightarrow} D(t) = \alpha a t + \alpha \frac{b}{2} t^2 + \underset{\overset{\parallel}{D_0}}{C}$$

$$\frac{D(t)}{Y(t)} = \frac{D_0}{a+bt} + \frac{\frac{1}{2}\alpha t(a+bt) + \frac{1}{2}\alpha a t}{a+bt} = \qquad \hat{=} \boxed{\alpha a t + \alpha \frac{b}{2} t^2}$$

$$= \underline{\frac{D_0 + \frac{1}{2}\alpha a t}{a+bt} + \frac{1}{2}\alpha t}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{D_0+\frac{1}{2}\alpha a t}{a+bt}+\frac{1}{2}\alpha t\right)=\infty$$

wächst unendlich

c) $\frac{dY}{dt}=\underline{rY} \Rightarrow Y(t)=Ce^{rt}$, $C=Y_0$

↳ ausführlich: $\int\frac{dY}{Y}=\int r\,dt \Rightarrow \ln|Y|=rt+C$

$\underline{Y=Ce^{rt}}$

$Y(t)=Ce^{rt}$ $\quad Y(0)=Y_0=C\cdot 1$

einsetzen in Gleichg:

$$\frac{dD}{dt}=\alpha\underbrace{Y_0e^{rt}}_{Y(t)} \xrightarrow[\text{nach } dt]{\text{Integrieren}} D(t)=\frac{\alpha}{r}Y_0e^{rt}+C_1$$

$$D(0)=D_0=\frac{\alpha}{r}Y_0+C_1 \Rightarrow C_1=\underline{D_0-\frac{\alpha}{r}Y_0}$$

$$\frac{D(t)}{Y(t)}=\frac{\frac{\alpha}{r}Y_0e^{rt}+D_0-\frac{\alpha}{r}Y_0}{Y_0e^{rt}}=\frac{\frac{\alpha}{r}Y_0\left(e^{rt}+1\right)+D_0}{Y_0e^{rt}}=$$

$$=\frac{\alpha}{r}-\frac{\alpha}{re^{rt}}+\frac{D_0}{Y_0e^{rt}}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\alpha}{r}-\underbrace{\frac{\alpha}{re^{rt}}}_{(\to 0)}+\underbrace{\frac{D_0}{Y_0e^{rt}}}_{(\to 0)}\right)=\boxed{\frac{\alpha}{r}}$$

wächst ~~[illegible]~~ bis ~~[illegible]~~ zu $\underline{\underline{\frac{\alpha}{r}}}$.

(3b) $\frac{dx}{dw} = a(b-x)$

$x < b$

$a, b > 0$

$x(0) = x_0$

Trennung:

$$\frac{dx}{b-x} = a \cdot dw$$

$$\int \frac{dx}{b-x} = \int a\, dw \qquad \ln|C(b-x)| = -aw$$

$$C(b-x) = e^{-aw}$$

abh. von w

$x(0) = x_0$

$$C(b-x_0) = e^{-a \cdot 0} \Rightarrow C = \frac{1}{b-x_0} \Rightarrow \frac{1}{b-x_0}(b-x) = e^{-aw} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = b - (b-x_0) \cdot e^{-aw}$$

$$\lim_{w \to \infty} x(w) = b$$

=> Bei b findet eine Sättigung statt.
Mehr kann auch durch x fache
Werbung nicht abgesetzt werden

37

$y' - 2y = e^x$

homogene Gleichung: $y' - 2y = \varnothing$

$y(x) = \varnothing$

$y_h = Ce^{2x} \qquad C \neq \varnothing$

Variation der Konstanten führt auf die partikuläre Lösung:

$y_p = C(x)\, e^{2x}$

$y'_p = C'(x) e^{2x} + C(x) e^{2x} \cdot \frac{1}{2}$

$C'(x) e^{2x} + \underbrace{C(x) e^{2x} \cdot 2 - 2\, C(x) e^{2x}}_{=\varnothing} = e^x$

$C'(x) = e^{-x} \Rightarrow \underline{\underline{C(x) = -e^{-x}}}$

$y(x) = y_p(x) + y_h(x) \Rightarrow \cancel{y(x) = -e^{-x} \cdot e^{2x}}$

$y(x) = Ce^{2x} + e^{2x}(-e^{-x}) = Ce^{2x} - \frac{e^{2x}}{e^x} =$

$= \underline{\underline{Ce^{2x} - e^x}}$

(38)

$x y' - y = x^2 + 2x - 3$ Trennung der Variable $y' - \frac{y}{x} = x + 2 - \frac{3}{x}$

homogen:

$y' = \frac{y}{x}$] $y = \frac{y^2}{2x} + C \rightarrow 2x = y + C$

$y_h = Cx$

Variation der Konstante:

$y_p = C(x) \cdot x$ $y_p' = C'(x) \cdot x + C(x) \cdot 1$

$C'(x) \cdot x + C(x) - \frac{C(x) \cdot x}{x} = x + 2 - \frac{3}{\cancel{x}}$ $| \cdot x$

$C'(x) = 1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \rightarrow C(x) = x + 2\ln|x| + \frac{3}{x}$

$y_p(x) = \left(x + 2\ln|x| + \frac{3}{x}\right) \cdot x$

$y = y_h + y_p = Cx + x^2 + 2\ln|x| + 3$

(38) $\frac{dk}{dx} + ak = b + Cx$ $\quad a, b, c > 0$, $\quad k(0) = 0$

homogene Gleichung:

$$\boxed{\ln|k| = -ax}$$

$$k' + ak = 0 \rightarrow k_h(x) = Ce^{-ax}$$

Variation der Konstanten:

$$K_p(x) = C(x)\, e^{-ax}$$

$$K_p'(x) = C'(x) e^{-ax} + C(x) e^{-ax}(-a)$$ einsetzen

$$C'(x) e^{-ax} + \underbrace{C(x) e^{-ax}(-a) + a C(x) e^{-ax}}_{=0} = b + cx$$

$$C(x) = \frac{c}{a} x e^{ax} - \frac{c}{a^2} e^{ax} + \frac{b}{a} e^{ax}$$ evtl. Fehler

partielle Integration

$$K_p = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}x - \frac{c}{a^2} = \underbrace{\frac{ab - c}{a^2}}_{\alpha} + \underbrace{\frac{c}{a}}_{\beta} x$$

$$k = k_h + k_p = Ce^{-ax} + \alpha + \beta x$$

$$k(0) = 0 \Rightarrow 0 = C + \alpha \rightarrow C = -\alpha$$

$$k(x) = \alpha\left(1 - e^{-ax}\right) + \beta x$$

direkte Werte

[illegible]

(40) $x(t), y(t)$ $w1, w2$ Wechselzufuhr

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k_1 w_1 y - k_2 w_2 x}{w1 + w2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k_2 w_2 x - k_1 w_1 y}{w_1 + w_2}$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = \emptyset \rightarrow y(t) + x(t) = C$$

$$y_0 + x_0 = 1 \rightarrow C = 1$$

$$y(t) = 1 - x(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{\frac{k_1 w_1}{w_1 + w_2}}_{a} (1 - x) - \underbrace{\frac{k_2 w_2}{w_1 + w_2}}_{b} \cdot x$$

$$\frac{dx}{dt} + (a + b)x = a$$

Zunächst homogene Lösung ermitteln

$$x^{[h]}(t) = Ce^{-(a+b)t}$$

Ansatz $x^{[p]}(t) = A$ als Polynom vom Grad $\emptyset$

$$x'^{[p]} = \emptyset \rightarrow 0 + (a+b)A = a \rightarrow A = \frac{a}{a+b} \rightarrow x^{[p]}(t) = \frac{a}{a+b}$$

$$x(t) = x^{[p]}(t) + x^{[h]}(t) \Rightarrow x(0) = x_0 \rightarrow x_0 = C + \frac{a}{a+b} \Rightarrow C = x_0 - \frac{a}{a+b}$$

$$x(t) = \frac{a}{a+b} + \left(x_0 - \frac{a}{a+b}\right) e^{-(a+b)t}$$

41 (1) $I = K'(t)$

(2) $I'(t) = -b\left(K(t) - K^*\right)$

$$K''(t) = -b\left(K(t) - K^*\right)$$

$$K''(t) + bK(t) = bK^*$$

Exponentialansatz:

$$\lambda^2 + b = 0$$

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{b}$ 2 konjugiert komplexe Lösungen.

Realteil $= \underline{\underline{\emptyset}}$ → e^{0x} wird $\underline{\underline{1}}$

Ansatz:

$$K^{[h]}(t) = A\cos\sqrt{b}\,t + B\sin\sqrt{b}\,t$$

$$K'(0) = I(0)$$

$$\hookrightarrow I_0 = B\sqrt{b} \Rightarrow B = \frac{I_0}{\sqrt{b}}$$

$$K_t^{[h]} = A\cos\sqrt{b}\,t + \frac{I_0}{\sqrt{b}}\sin\sqrt{b}\,t$$

(42) $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 3$

$y_h(t) = (A + Bx)\, e^{3x} = Ae^{3x} + Bxe^{3x} \Rightarrow y_1(x) = e^{3x}$

$y_2(x) = e^{3x} \cdot x$

Partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten
die Formelsammlung

$y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{6x}$

$C_1(x) = \int \frac{-y_2 e^{3x}}{x^2 e^{6x}}\, dx = \int -\frac{dx}{x} = \ln|x| + \overset{=0}{C_1} = A(x)$

$C_2(x) = \int \frac{y_1 e^{3x}}{x^2 e^{6x}}\, dx = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + \overset{=0}{C_2} = B(x)$

$y^{[p]}(t) = \ln|x|\, e^{3x} + \left(-\frac{1}{x}\right) x\, e^{3x}$

$\Rightarrow y = e^{3x}\left(\underbrace{A + Bx}_{y^{[h]}} \underbrace{- \ln|x| - 1}_{y^{[p]}}\right)$

(43) $y'' + 3y' + 2y = 2x$

homogen: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$$\lambda_{12} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = -2$$

$$y^{[h]}(x) = C_1 \underbrace{e^{-x}}_{y_1} + C_2 \underbrace{e^{-2x}}_{y_2}$$

neurale so funktionieren.

Zum Üben andere Ansatz:

unterst. Ansatz: $s(x) = (a_0, a_1 x, \dots, a_n x^n)\, e^{tx} (b \cos ux + c \sin vx)$

Polynom $s(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ — linear: $n=1$, $a_0 = 0$, $a_1 = 2$

Ansatz:
$$y^{[p]}(x) = Ax + B$$
$$y'^{[p]}(x) = A$$
$$y''^{[p]}(x) = 0$$

einsetzen

$$0 + 3A + 2(Ax + B) = 2x$$
$$3A + B + 2Ax = 2x + 0$$

Koeffizientenvergleich:
(1) $3A + 2B = 0$
(2) $2A = 2 \rightarrow A = 1$
(1)+(2) $3 + 2B = 0 \rightarrow B = -\frac{3}{2}$

$y^{[p]}(x) = x - \frac{3}{2}$

Lösung: $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + x - \frac{3}{2}$

(44) $$x_{k+1} = \frac{5}{2}x_k - \frac{x_k^2}{100}$$

formal: $x_{k+1} = f(x_k)$

Gleichgewichtspunkt: x^*

$x^* = f(x^*)$ Fixpunkt von f

$$x^* = \frac{5}{2}x^* - \frac{(x^*)^2}{100} = \begin{cases} 0 \\ 150 \end{cases}$$

Stabilität prüfen:

$$f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{x^2}{100}$$
$$f'(x) = \frac{5}{2} - \frac{x}{50}$$

$|f'(0)| = \frac{5}{2} > 1 \rightarrow$ instabil

$|f'(150)| = \frac{1}{2} < 1 \rightarrow$ asymptotisch stabil

(45) N_t ... Anzahl an Individuen der n-ten Generation

$$N_{t+1} = e^{r(1-\frac{N_t}{K})} \cdot N_t$$

$$N^* = e^{r(1-\frac{N^*}{K})} \cdot N^* \quad \Big| : N^* \rightarrow N_1^* = \emptyset$$

$$1 = e^{r(1-\frac{N^*}{K})} \rightarrow \ln 1 = r\left(1 - \frac{N^*}{K}\right) \rightarrow N_2^* = K$$

$$f(x) = e^{r(1-\frac{x}{K})} x \rightarrow f'(x) = e^{r(1-\frac{x}{K})}\left(1 - \frac{r}{K} \cdot x\right)$$

$|f'(0)| = e^r \rightarrow$ instabil

$|f'(K)| = |1-r| \rightarrow$ $r > 2$ instabil

$r < 2$ asymptotisch stabil

$r = 2$ keine Aussage möglich

(46) $x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$

$$x^* = \sqrt{3+x^*}$$
$$x^{*2} = 3+x^*$$
$$x^{*2} - x^* - 3 = 0$$

$$x^*_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \approx 2{,}3 \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \approx -1{,}3 \end{cases}$$

Wenn man eine Wertetabelle bildet, kommt man auf ca. 2,3 → daher Auswahl dieser Lösung

$$f(x) = \sqrt{3+x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3+x}}$$

$|f'(2{,}3)| = 0{,}21 \quad < 1 \quad \rightarrow$ asymptotisch stabil

(47) $\Delta x_k - x_k = 3$

$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ erste Differenz von x_k

$x_{k+1} - x_k - x_k = 3$

$x_{k+1} = 2x_k + 3$

$\qquad\quad a \qquad b$

b konstant

$a \neq 1 \rightarrow$ Ansatz: $x_k = a^k x_0 + \frac{1-a^k}{1-a} b$

$$x_k = 2^k \cdot 0 + \frac{1-2^k}{1-2} \cdot 3$$

$$x_k = (-1 + 2^k) \cdot 3 = \underline{3 \cdot 2^k - 3}$$

(48) Allgemeine Lösung von $x_{k+1} = -x_k - (k+1)$

$$x_n = x_n^{[h]} + x_n^{[p]} \qquad x_{k+1} + x_k = 0 \quad \text{homogene Gleichung}$$

$$x_k^{[h]} = C \prod_{k=0}^{n-1} (-1) = C(-1)^n \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$x_n^{[p]} = C_n \prod_{k=0}^{n-1} (-1) = C_n (-1)^n$$ einsetzen

$$C_{k+1}(-1)^{k+1} = -C_k(-1)^k - k - 1$$

$$-C_{k+1}(-1)^k = -C_k(-1)^k - k - 1$$

$$(-C_{k+1} + C_k)(-1)^k = -k - 1$$

$$C_{k+1} - C_k = \frac{k+1}{(-1)^k} = h_k$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (C_{k+1} - C_k) = \sum_{k=0}^{n-1} h_k$$

$$C_0 = \emptyset \rightarrow C_n = \sum_{k=0}^{n-1} h_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{(-1)^k}$$ Verhalten abbilden

$$x_n = C(-1)^n + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{(-1)^k}\right)(-1)^n$$

$$x_n = (-1)^n \left(C + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{(-1)^k}\right)\right)$$

könnte man noch
weiter analysieren.
Reicht aber als Lösung

(48) Anmerkung: am besten gelöst im dazugeh. Buch (Mathematik für Informatiker), Seite 275 ff.

Vorgerechnet in der VO von Lange:

Quicksort von Sedgewick.
Liste mit verschiedenen Zahlen wird der ~~Länge~~ Größe nach geordnet.
v_n ... durchschnittliche Anzahl der notwendigen Vergleiche beim Algorithmus Quicksort.
Liste $a_1, \dots, a_n$
Durch $n+1$ Vergleiche kann man die erste Sortierung (den 1. Schritt) durchführen. Dann wird mit den Teilfolgen links und rechts des Pivotelements weitergemacht.

<u>Mathematische Formulierung:</u>
$n+1$ Vergleiche um a_n an die richtige, k-te Stelle zu bringen. Falls a_n bereits in die richtige Position gebracht ist, d.h. an die k-te Stelle, d. heißt die links von a_n stehenden $k-1$ Listenelemente sind kleiner und die rechts stehenden $n-k$ Elemente sind größer als a_n.

Man braucht dann nur mehr die $k-1$ links von dem an die richtige Stelle gebrachten a_n und die $n-k$ rechts stehenden Elemente (2 Teillisten) der Größe nach ordnen.

$\vartheta_0 = \vartheta_1 = \emptyset$ → erst ab $n \geq 2$ sinnvoll, d.h. alles unten Stehende gilt für $\forall n \geq 2$

$$\vartheta_n = n+1 + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n}}_{} \left(\vartheta_{k-1} + \vartheta_{n-k} \right)$$

arithmetisches Mittel, weil man die genauen Größen nicht kennt.

$$\sum_{k=1}^{N} \vartheta_{k-1} = \sum_{k=0}^{N-1} \vartheta_k$$

$$\sum_{k=1}^{N} \vartheta_{N-k} = \sum_{k=0}^{N-1} \vartheta_k$$

$$\vartheta_N = n+1 + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \vartheta_k$$

$$n \vartheta_N = n(n+1) + 2 \sum_{k=0}^{N-1} \vartheta_k$$

$$(n+1)\, \vartheta_{N+1} = (n+1)(n+2) + 2 \sum_{k=0}^{N} \vartheta_k \qquad \forall n \geq 1$$

$$(n+1)\, \vartheta_{N+1} - n \vartheta_N = 2(n+1) + 2\vartheta_N \quad \Big| : n+1$$

$\vartheta_{N+1} = \frac{n+2}{n+1} \vartheta_N + 2$ lineare Differenzengleichung

$\vartheta_2 = 3$ Anfangsbedingung

Homogene Gleichung:

$$v_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} v_n$$

System: $v_3 = \frac{4}{3} v_2$

$v_4 = \frac{5}{4} v_3 = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} v_2 = \frac{5}{3} v_2$

$v_5 = \frac{6}{5} v_4 = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} v_2 = \frac{6}{3} v_2$

usw.

$$v_n^{[h]} = C'(n+1) \qquad C' \in \mathbb{R}, \; n \geq 2$$

Partikuläre Lösung:

Variation der Konstanten:

$$v_n^{[p]} = C_n(n+1)$$

$$C_{n+1}(n+2) = \frac{n+2}{n+1} C_n (n+1) + 2$$

$$C_{n+1} = C_n + \frac{2}{n+2}$$

$C_3 = C_2 + \frac{2}{4}$

$C_4 = C_3 + \frac{2}{5} = C_2 + \frac{2}{4} + \frac{2}{5}$

$C_5 = C_4 + \frac{2}{6} = C_2 + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{6}$

$C_n = C_2 + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \dots + \frac{2}{n+1}$

Hier kann für die partikuläre Lösung beliebig gewählt werden. Wir wählen $C_2 = \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3}$

$C_n = \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \dots + \frac{2}{n+1} \qquad \forall n \geq 2$

$C_n = 2 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$ $\longrightarrow$ einsetzen:

P inh. $v_n^{[p]} = 2(n+1)\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k}$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzengleichung

$$v_N = v_N^{[p]} + v_N^{[h]} = C'(n+1) + 2(n+1)\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k}$$

$$2(n+1)\left(\sum_{k=1}^{N+1}\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{C'}{2}\right) = 2(n+1)\left(\sum_{k=1}^{N+1}\left(\frac{1}{k}\right)+C\right) \qquad C \in \mathbb{R}$$

Bestimmung von C:

$v_2 = 3$ gegeben

$3 = 2\cdot 3\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+C\right)$

$1 = 2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+C$

$\underline{C = -\frac{4}{3}}$

$$v_N = 2(n+1)\cdot\sum_{k=1}^{N+1}\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{4}{3} \qquad n \geq 2$$

(50) $4x_{n+2} + 12x_{n+1} - 7x_n = 18$

$x_{n+2} = 3x_{n+1} - \frac{7}{4} = \frac{9}{2}$ ← diese Form, da sonst keine char. Gleichung

Homogener Fall: $\lambda^2 + 3\lambda + \frac{7}{4} = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm 4}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = -\frac{7}{2} \\ \searrow \lambda_2 = +\frac{1}{2} \end{matrix}$$

Ansatz: $x_n^{[h]} = C_1\left(-\frac{7}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$x^* = \frac{a}{1+a+b}$ a... Störfunktion, auch $s(n)$

$x^* = \frac{\frac{9}{2}}{1+3-\frac{7}{4}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{9}{4}} = \underline{\underline{2}}$

$x_n = C_1\left(-\frac{7}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$

$3 = C_1 + C_2 + 2 \rightarrow 1 = C_1 + C_2 \rightarrow C_1 = 1 - C_2$

$6 = C_1\left(-\frac{7}{2}\right) + \frac{C_2}{2} + 2$

$4 = -\frac{7}{2} + \frac{7C_2}{2} + \frac{C_2}{2}$

$\underline{\underline{\frac{15}{8}}} = \underline{C_2} \qquad \underline{C_1} = 1 - \frac{15}{8} = \underline{\underline{-\frac{7}{8}}}$

$$\underline{\underline{x_n = -\frac{7}{8}\left(-\frac{7}{2}\right)^n + \frac{15}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}}$$

(57) $Y_t = C_t + I_t + G_t$

$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta(C_t - C_{t-1}) + 1$

$Y_t = Y_{t-1} \cdot 0,5 + 1(0,5\,Y_{t-1} - 0,5\,Y_{t-2}) + 1$

$Y_t = Y_{t-1} - 0,5\,Y_{t-2} + 1$

$Y_{t+2} = Y_{t+1} - 0,5\,Y_t + 1$

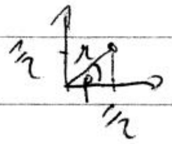
$\boxed{Y_{t+2} - Y_{t+1} + 0,5\,Y_t = 1}$

Homogener Teil mittels charakteristischer Gleichung.

$\lambda^2 - \lambda + 0,5 = 0$ komplexe Lösung

$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-2}}{2}$ → $\lambda_1 = \frac{1+i}{2} = 0,5 + 0,5i$ → $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$\lambda_2 = \frac{1-i}{2} = 0,5 - 0,5i$ → $r = \sqrt{\frac{1}{2}}$



$y_n^{[h]} = 0,5^n \left(C_1 \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + C_2 \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$y^* = \frac{1}{1+0,5-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 = y_n^{[P]}$ Gleichgewichtslösung als Partikulärlösung

$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(C_1 \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + C_2 \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right) + 2$

$2 = 1(\cos(0) \cdot C_1) + (\sin(0) \cdot C_2) + 2$ → $C_1 = \emptyset$

$3 = \frac{1}{2} C_2 \sin\frac{\pi}{4} + 2$ → $C_2 = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$

$\underline{y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(2\sqrt{2} \cdot \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right) + 2}$

52 $\Delta^2 x_k + \Delta x_k - 2x_k = k^2$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

$$\Delta^2 x_k = \Delta(\Delta x_k) = \Delta(x_{k+1} - x_k) = (x_{k+2} - x_{k+1}) - (x_{k+1} - x_k)$$

$$= x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k$$

$$x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k + x_{k+1} - x_k - 2x_k = k^2$$

$$x_{k+2} - x_{k+1} - 2x_k = k^2$$

Homogene Gleichung durch charakteristische Gleichung lösen:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \rightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1$$

$$x_k^{[h]} = C_1 2^k + C_2 (-1)^k$$

Ansatz versuchen: Allgemeines Polynom in $\mathbb{R}^2$

$$x_k^{[p]} = Ak^2 + Bk + C$$

offensichtlich keine Lösung der homogenen Gleichung → kann verwendet werden.

Ansatz in die inhomogene Gleichung einsetzen.

$$A(k+2)^2+B(k+2)+C-A(k+1)^2-B(k+1)-$$
$$-C-2Ak^2-2B(k-2)-C=k^2$$

Koeffizientenvergleich

k^2: $A-A-2A=1 \rightarrow A=-\frac{1}{2}$

k^1: $4A+B-2A-B-2B=\emptyset \rightarrow B=A=-\frac{1}{2}$

k^0: $4A+2B+C-A-B-C-2C=\emptyset \rightarrow C=-1$

$$x_k^{[p]}=-\frac{k^2}{2}-\frac{k}{2}-1$$

Allgemeine Lösung:

$$x_k=x_k^{[p]}+x_k^{[h]}=C_1(2)^k+C_2(-1)^k-\frac{k^2}{2}-\frac{k}{2}-1$$