Grundlagen

Logik

Negation

p	$\sim p$
T	F
F	T

Konjunktion

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Disjunktion

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Äquivalenz

p	q	$p \equiv q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

De Morgan

$\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$

$\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$

Tautologie

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

Kontradiktion

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	F
F	T	F

		conclusion		hypothesis	
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$p \vee \sim q \to \sim p$
T	T	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

Implikation

$p \to q$

$\equiv$

Konverse

$q \to p$

Inverse

$\sim p \to \sim q$

Kontraposition

$\sim q \to \sim p$

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

Inferenz

Modus Ponens	$p \to q$ p $\therefore q$	**Elimination**	a. $p \vee q$ $\sim q$ $\therefore p$ b. $p \vee q$ $\sim p$ $\therefore q$
Modus Tollens	$p \to q$ $\sim q$ $\therefore \sim p$	**Transitivity**	$p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$
Generalization	a. p $\therefore p \vee q$ b. q $\therefore p \vee q$	**Proof by Division into Cases**	$p \vee q$ $p \to r$ $q \to r$ $\therefore r$
Specialization	a. $p \wedge q$ $\therefore p$ b. $p \wedge q$ $\therefore q$		
Conjunction	p q $\therefore p \wedge q$	**Contradiction Rule**	$\sim p \to c$ $\therefore p$

Prädikatenlogik

$\forall x \in D, Q(x) \rightarrow$ Negation $\exists x \in D, \sim Q(x)$

$\exists x \in D, Q(x) \rightarrow$ Negation $\forall x \in D, \sim Q(x)$

Implikation: $\forall x \in D$, wenn $P(x)$, dann $Q(x)$

Kontraposition: $\forall x \in D$, wenn $\sim Q(x)$, dann $\sim P(x)$

Konverse: $\forall x \in D$, wenn $Q(x)$, dann $P(x)$

Inverse: $\forall x \in D$, wenn $\sim P(x)$, dann $\sim Q(x)$

Mengen

Teilmenge: $A \subseteq B \iff \forall x$, wenn $x \in A$, dann $x \in B$

$A \not\subseteq B \iff \exists x$, wenn $x \in A$, dann $x \notin B$

$A \subset B \iff A \subseteq B$, mindestens $1\ x \in B$ ist nicht in A

$A = B \iff A \subseteq B$ und $B \subseteq A$

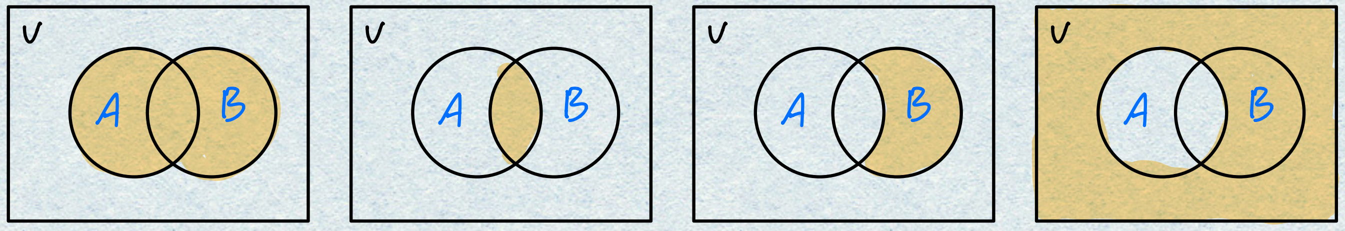
Mengenoperationen:

<u>Vereinigung</u>, die Menge aller Elemente die zumindest in der Menge A oder B liegen. $A \cup B$

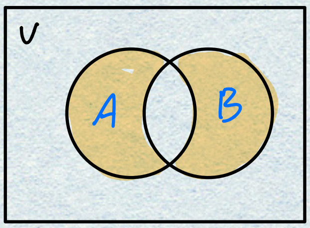
<u>Schnitt</u>, die Menge aller Elemente die in A und B liegen/die A und B gemeinsam haben $A \cap B$

<u>Differenz</u>, die Menge aller Elemente die in A sind, aber nicht in B $A - B$ oder $A \setminus B$

<u>Komplement</u>, die Menge aller Elemente, die nicht in A liegen A^C



$A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $B - A$ $\quad$ A^c



$A \Delta B$

symmetrische Differenz, die Menge aller Elemente aus A und B, welche in ihrer Vereinigung, aber nicht ihrem Durchschnitt sind. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Kardinalität $|A|$ → die Anzahl an Elementen in A

Potenzmenge

Sei A eine Menge, dann ist $P(A)$ die Menge aller Teilmengen von A

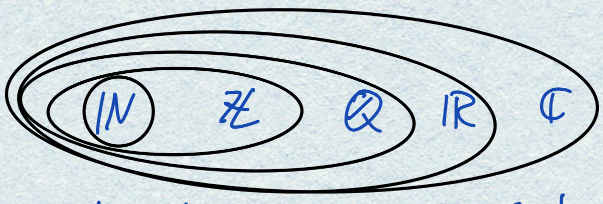
$$P(\{x,y\}) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}\}$$

Kartesisches Produkt

Seien $A_1, A_2, \dots, A_n$ Mengen, dann ist das kart. Produkt $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ die Menge aller geordneten n-Tupel $(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots$ .. $a_n \in A_n$.

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$$

Zahlentheorie



rationale Zahlen ($\mathbb{Q}$)

r ist rational $\iff \exists\, a, b \in \mathbb{Z} \mid r = \frac{a}{b}, b \neq 0$

Reele Zahlen
($\mathbb{R}$)

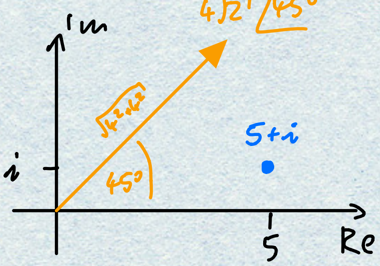
Die Menge positiven und negativen Dezimalentwicklungen ohne Periode 999... wird als die Menge $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Komplexe Zahlen
($\mathbb{C}$)

$i^2 = -1$

haben die Form $z = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}$

a = Realteil, b = Imaginärteil von z



Kartesische Form $\quad z = a + ib$

polar Form $\quad [r, \varphi] \quad r \angle \varphi$

$a = r \cdot \cos(\varphi) \qquad b = r \cdot \sin(\varphi)$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Rechenregeln

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) =$

$= r_1 \cdot r_2 \ \angle \varphi_1 + \varphi_2 \bmod 2\pi$

$\bar{z} = a - ib$ (konjugiert komplexe Zahl)

$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} =$

$= \frac{|z_1|}{|z_2|} \ \angle \varphi_1 - \varphi_2 \bmod 2\pi$

Satz von Moivre $\quad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n \cdot \varphi)$

$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

n-te Wurzel $w^n = z$

$$w_j = \left[\sqrt[n]{R}, \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} j\right] \quad j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

---

quadratische Gleichung $z^2 + pz + q = 0 = (z - z_1)(z - z_2)$

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$p = -(z_1 + z_2) \quad q = z_1 \cdot z_2$$

Fundamentalsatz d. Algebra

Sei $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k$ ein Polynom $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$
$a_k \in \mathbb{C}$

dann hat das Polynom eine komplexe Nullstelle

Beweistechniken

direkt, sonst Gegenbeispiel, sonst indirekt

---

direkter Beweis

Wenn $A \rightarrow B$
Annahme A
zeige B

Bsp. Summe zwei gerader Zahlen ist gerade

Fallunterscheidung

Wenn A oder $B \rightarrow C$
Annahme A
zeige C
Annahme B
zeige C

Bsp. nachfolgende natürliche Zahlen haben umgekehrte Parität.

---

indirekter Beweis
(Widerspruch)

A ist wahr
Annahme $\sim A$
zeige $B \wedge \sim B$ ↯
behaupte $\sim(\sim A)$
$= A$

Bsp. es gibt keine größte natürliche Zahl

$\sqrt{p}$ ist rational, $p \in \mathbb{P}$

Kontrapositiver Beweis
(≈ direkter Beweis)

Wenn $A \to B$
Annahme $\sim B$
zeige $\sim A$

Bsp. Wenn n gerade ist, ist n^2 auch gerade, $n \in \mathbb{Z}$

Zahleneigenschaften

Parität

nachfolgende nat. Zahlen haben umgekehrte Parität

n ist gerade $\to$ $n = 2k$

n ist ungerade $\to$ $n = 2k+1$

n ist eine Prim. $\to$ $\forall\, r,s \in \mathbb{N}$, wenn $n = rs$, dann

muss entweder $r = n$, $s = 1$
oder $s = n$, $r = 1$ gelten

Teilbarkeit

$n, d \in \mathbb{Z}$ und $d \neq 0$: $d \mid n$, wenn n ein Vielfaches von d ist.

$a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a \mid b$: $a \leq b$

$a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \mid b$, $b \mid c$: $a \mid c$

$\forall\, n \in \mathbb{Z}, n > 1$: $p \mid n$, $p \in \mathbb{P}$

Grundsatz d. Arithmetik

jede natürliche Zahl $n > 1$ ist als Produkt endlich vieler Primzahlen darstellbar

Werden die Primz. d. Größe nach geordnet ist die Darstellung eindeutig.

$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ $e_i \in \mathbb{N}$
$p_n \in \mathbb{P} \mid p_i < p_{i+1}$

euklidischer Algorithmus

$n = d \cdot q + r \quad , n,q,r \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N} , 0 \le r \le d$

$n \text{ div } d = q \qquad n \bmod d = r$

Kongruenz Modulo

1 $\quad n \mid (a-b)$
2 $\quad a \equiv b \bmod n$
3 $\quad a = b + kn, \quad k \in \mathbb{Z}$
4 $\quad a$ und b haben nach Division durch n denselben Rest
5 $\quad a \bmod n = b \bmod n$

Kongr. modulo n ist eine Äquivalenz Relation

$a \equiv c \bmod n$ und $b \equiv d \bmod n \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z}$

1 $\quad (a+b) \equiv (c+d) \bmod n$
2 $\quad (a-b) \equiv (c-d) \bmod n$
3 $\quad a \cdot b \equiv c d \bmod n$
4 $\quad a^m \equiv c^m \bmod n \quad , m \in \mathbb{Z}$

---

größte gemeinsame Teiler

$d \in \mathbb{Z}$, d ist eine Linearkombination von a und b wenn es s und t gibt sodass:

$$a \cdot s + b \cdot t = d$$

wenn $a, b \neq 0$

$$ggT(a,b) = d$$

zB. $\quad ggT(330, 156)$

$330 = 2 \cdot 156 + 18 \qquad 6 = 18 - 12$
$156 = 8 \cdot 18 + 12 \qquad 6 = 18 - (156 - 8 \cdot 18)$
$18 = 1 \cdot 12 + 6 \qquad 6 = 9 \cdot 18 - 156$
$12 = 2 \cdot 6 + 0 \qquad 6 = 9(330 - 2 \cdot 156) - 156$
$\qquad 6 = 9 \cdot 330 - 19 \cdot 156$

$\rightarrow ggT(330, 156) = 9 \cdot 330 - 19 \cdot 156$

---

inverse Modulo n

$\forall \; a,n \in \mathbb{N}$, wenn $ggT(a,n) = 1$, dann $\exists \, s \in \mathbb{N}$

sodass: $\quad a \cdot s \equiv 1 \bmod n$

$a x \equiv c \bmod m$ ist lösbar für x wenn

$ggT(a,m) \mid c$

$\rightarrow ggT(a,m) = a \cdot s + m \cdot t$

$x_1 = \frac{s \cdot c}{ggT(a,m)}$, $\bar{X} = x_1 \cdot \frac{m}{ggT} \cdot k$

Euklids Satz — $\forall a,b,c,n \in \mathbb{N}$, wenn $ggT(a,c) = 1$ und $a \mid bc$ dann $a \mid b$

Induktion

Summen & Produkte

1 $\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} a_k + b_k$

2 $c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k$

3 $\left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right) = \prod_{k=m}^{n} a_k b_k$

Indexverschiebung

$\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k+1}$ $\quad j = k+1 \quad k = j-1$

$k = 0$, $j = 0+1 = 1$

$k = 6$, $j = 6+1 = 7$

$\sum_{j=1}^{7} \frac{1}{(j-1)+1} = \sum_{j=1}^{7} \frac{1}{j} = \sum_{k=1}^{7} \frac{1}{k}$

Beweis durch Induktion

1 Induktionsanfang
zeige $P(a)$

2 Induktionsvoraussetzung
Annahme $P(n)$ für $n \geq a$

3 Induktionsbehauptung
behaupte $P(n+1)$

4 Induktionsschritt

zeige $P(n) \rightarrow P(n+1)$

Funktionen

$f: X \rightarrow Y$ ist eine Relation von X nach Y

1 jedes $x \in X$ steht mit einem $y \in Y$ in Relation
2 kein $x \in X$ steht mit mehr als 1 $y \in Y$ in Relation

---

injektiv

$F: X \rightarrow Y$

$F(x_1) = F(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

$x_1 \neq x_2 \rightarrow F(x_1) \neq F(x_2)$

jedes $y \in Y$ hat höchstens 1 Urbild

---

surjektiv

$F: X \rightarrow Y$

$\forall y \in Y, \exists x \in X: F(x) = y$

jedes $y \in Y$ hat mindestens 1 Urbild

---

bijektiv

$F: X \rightarrow Y$

F ist injektiv und surjektiv

jedes $y \in Y$ hat genau 1 Urbild

Relationen

---

binäre Relation

$R \subseteq A \times B$

$A \times B$ kart. Prod. $= \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

---

inverse Relation

$R^{-1} = \{(b,a) \mid a \in A, b \in B\}$

---

homogene Relation

$R \subseteq A \times A$

Reflexivität	$\forall x \in A, (x,x) \in R$
Symmetrie	$\forall x,y \in A$, wenn $(x,y) \in R$, dann $(y,x) \in R$
Transitivität	$\forall x,y,z \in A$, wenn $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$, dann $(x,z) \in R$
Äquivalenzrelation	R ist reflexiv, symmetrisch & transitiv eine Äquiv.-Relation teilt eine Menge in disjunkte Untermengen (Äquivalenzklassen)
Halbordnung	eine Relation R auf M, mit $x,y,z \in M$ • reflexiv xRx • antisymmetrisch $(xRy \wedge yRx) \rightarrow x=y$ • transitiv $(xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$
Totalordnung	Halbordnung mit $xRy \vee yRx$ (zB $x < y$)

diskrete Mathematik

Kombinatorik

Multiplikationsregel

Wenn ein Vorgang aus k Schritten besteht,

der erste Schritt aus n_1 Möglichkeiten besteht

$\vdots$

der k-te Schritt aus n_k Möglichkeiten besteht. (unabhängig vom Schritt davor)

dann hat der gesamte Vorgang:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k \text{ Möglichkeiten}$$

Additionsregel

Sei A eine endliche Menge aus k disjunkten Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_k$, so ist

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_k$$

Fakultät

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 \quad , \; 0! = 1$$

---

bin. Koeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \;, \quad 0 \leq k \leq n,$$

$$\binom{n}{0} = 1, \; \binom{0}{k} = 0, \; \binom{0}{0} = 1, \; \binom{n}{n} = 1, \; \binom{n}{n-1} = n,$$

Permutation

- $k = n$, alle Elemente werden betrachtet
- jedes Element ist unterscheidbar

---

ohne Wdh.

die Anzahl an Permutationen einer n-elementigen Menge ist

$$n! \;, \quad n \geq 1$$

zB. 10 Personen

Möglichkeiten auf 10 Plätze zu verteilen?

$10! = 3\,628\,800$

mit Wdh

Es gibt ein Anordnung von n-Objekten.
k_1 ist vom selben Typ & nicht unterscheidbar
⋮
k_i ist vom selben Typ & nicht unterscheidbar

falls $n = k_1 + \ldots + k_i$, dann ist die Anz. d. möglichen Permutationen:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_i!} = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_i)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_i!}$$

Bsp Perm von WETTER
WEETTR
1 2 2 1

$n = 1+2+2+1 = 6$

$$\frac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{720}{4} = 180$$

Variation

- $k < n$ (Stichprobe von n)
- Reihenfolge wichtig

---

ohne Wdh.

Die möglichen Permutation einer geordneten Auswahl von k aus n Elementen ist:

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

zB. 10 Plätze, Möglichkeiten 1., 2. & 3. Platz zu belegen?

$$\frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$$

---

mit Wdh.

Die Auswahl von k-Objekten bei dem jedes Objekt n Möglichkeiten hat ist:

$$n^k$$

zB. Anordnung A, B, C in 2 Stellen

$n = 3$ (A, B oder C)
$k = 2$ (1, 2. Stelle)
$3^2 = 9$

Kombination

- $k < n$ (Stichprobe)
- Reihenfolge egal

---

ohne Wdh

Es werden k aus n Objekten gewählt. Jedes Objekt darf nur 1mal vorkommen.

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

zB. 2 Buchstaben aus $\{A, B, C\}$
$n = 3$ Buchstaben $k = 2$ Stellen

$$\frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} = 3$$

mit Wdh

z.B. 2 Buchstaben aus $\{A, B, C\}$

$n = 3 \quad k = 2$

$$\frac{(2+3-1)!}{(3-1)! \cdot 2!} = \frac{4!}{4} = 6$$

Die Anzahl an möglichen Kombination von k Objekten aus n Kategorien

1. Kat	2. Kat	....	n. Kategorie

$\times \mid \times\times \mid \cdots \mid \times$

$\mid \quad //$

k – Objekte

$$\to \binom{n'}{k'} \qquad n' = \underbrace{k}_{\times} + \underbrace{(n-1)}_{|}$$

$$\frac{(k+n-1)!}{(n-1)! \cdot k!} = \binom{k+n-1}{k}$$

	Order Matters	Order Does Not Matter
Repetition Is Allowed	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$
Repetition Is Not Allowed	$P(n,k)$	$\binom{n}{k}$

Binomialsatz

Pascals Formel

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Binomialsatz

Sind $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Anwendung

$$(a+b)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^{5-k} \cdot b^k =$$

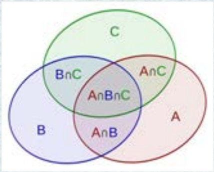
$$= \binom{5}{0} a^5 + \binom{5}{1} a^4 b + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a^1 b^4 + \binom{5}{5} b^5 =$$

$$= a^5 + 5a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5$$

Summe vereinfachen

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 9^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 9^k = (1+9)^n = 10^n$$

Inklusions/Exklusions Prinzip



2 Mengen $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

3 Mengen $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$

Allgemein

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| =$$

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \pm \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k|$$

Schubfachprinzip

Definition Für eine Funktion $F: X \to Y$, $|X| = n$, $|Y| = m > 0$

wenn $n > m$, dann landet min. in 1 Menge mehr als 1 Element

wenn $n < m$, dann hat min 1 Menge kein Element

$$\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$$

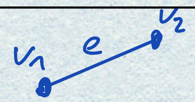
Graphentheorie

Graph V = end. Menge d. Knoten, E = end. Menge d. Kanten

$$G = \langle V, E \rangle$$

gerichtet alle Kanten sind geordnete Paare $e = (v_1, v_2)$ $v_1 \xrightarrow{e} v_2$

gerichtete Graphen haben den Anfangsknoten v_1 und Endknoten v_2 von e

ungerichtet	alle Kanten sind ungeordnete Paare $e = \{v_1, v_2\} = \{v_2, v_1\}$
Schlinge	Eine Kante e der Form $e = (v, v)$ (adjazent zu sich selbst)
adjazent	Zwei Knoten sind adjazent wenn sie durch eine Kante verbunden sind.
inzident	e inzident mit v_1, v_2 wenn 
isoliert	Ein Knoten ist isoliert wenn er zu keinem Knoten adjazent ist.
parallel (Mehrfachkante)	Kanten die zu den gleichen Knoten adjazent sind  e_1 ist paral. zu e_2
schlichten Graph	Ein Graph ohne Schlingen und parallelen Kanten
Nachbar	Ein Knoten der zu einem gewissen Knoten adjazent ist
Knotengrad	Die Anzahl von Kanten die mit $v \in V$ inzidieren heißen Knotengrad: $\deg(v)$
Nachfolger	Ein Knoten der nach einem gewissen Knoten in einem gerichteten Kantenfolge kommt.
Vorgänger	Ein Knoten der vor einem gewissen Knoten in einem gericht. Kantenfolge kommt.
Weggrad	Die Anzahl wegführender Kanten von einem gewissen Knoten v in einem gerichteten Graphen
Hingrad	Die Anzahl hinführender Kanten von einem gewissen Knoten v in einem gerichteten Graphen
Handschlag-Theorem	In einem schlichten Graph G gilt:

totale Knotengrad von G $= \sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot E$

→ der gesamte Knotengrad ist immer gerade

In einem ungerichteten Graph G gilt:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$$

Weggrad + Hingrad

Teilgraph

G' ist ein Teilgraph von G, wenn $E' \subseteq E$ und $V' \subseteq V$
Der Teilgraph G' ist ein Graph der durch Teilmengen der Kanten und Knoten von G gebildet wird.

Vollständiger Graph

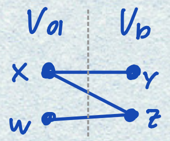
Ein Graph K_n in dem alle n-Knoten verbunden sind

---

bipartiter Graph
(2 Partitionen)

G ist bipartite wenn die Kanten V in die Komponenten V_A und V_B eingeteilt werden können, wobei jedes $e \in E$ die Form hat:

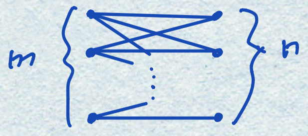
$$\{ v \in V_a, v \in V_b \}$$



---

vollst. bipart. Graph

$K_{m,n}$:



$E = m \cdot n$

- alle V_m sind mit allen V_n verbunden
- Es gibt m viele Knoten die nicht verbunden sind und n viele Knoten die nicht verbunden sind.

Kantenfolge
offen

Ein Sequenz aus Knoten und Kanten die 2 Knoten verbindet.

$v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_{n-1} v_n$

geschlossen

Wenn Anfangs & Endknoten gleich sind

Kantenzug

Kantenfolge bei der keine Kante wiederholt wird
(Start & Endpkt können gleich sein)

Weg/Bahn

Kantenfolge bei der kein Knoten wiederholt wird

Kreis

Eine Kantenfolge in einem ungerichteten Graph, mit gleichem Anfangs- & Endknoten bei der keine anderen Knoten und keine Kanten wiederholt werden.

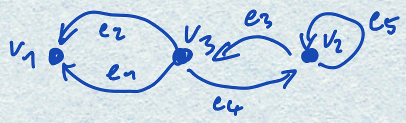
Zyklus

Ein geschlossenen Kantenzug

Adjazenzmatrix

Für den (gerichteten) Graph G mit geordneten Kanten $v_1, v_2 \dots v_n$ ist die Ad. Matrix eine $n \times n$ Matrix $A = a_{ij}$ sodass:

$$a_{ij} = \text{Anz. d. Pfeile von } v_i \text{ nach } v_j \quad , i,j \in 1,2,\dots,n$$



$$\begin{array}{c|ccc} & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline v_1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & 1 \\ v_3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Anzahl der Kantenfolgen der Länge n

$$A^n = A A \dots A$$

---

zusammenhängend

Zwei Knoten v,w sind zusammenh. wenn es eine Kantenfolge von v nach w gibt.

Zusammenhangs-Komponent

H ist ein Zus.-Komp. von G wenn:

- H ein Teilgraph von G ist
- H zusammenhängend ist
- kein zusam. Teilgraph von G beinhaltet H als Teilgraph und hat Kanten oder Knoten die nicht in H sind

---

stark zusammenhängend

Wenn in einem gerichteten Graph jeder Knoten von jedem Knoten erreichbar ist.

---

schwach zusammenhängend

Wenn in einem gericht. Graph mindestens 1 Knoten nicht von allen Knoten erreicht werden kann

---

Wald

Ein schlichter, ungerichteter Graph der keine Kreise enthält

$$V = E + k \quad , k \dots \text{Komponenten}$$

Baum

Ein zusammenhängender Wald

$$V = E + 1$$

---

azyklischer Graph

Besitzt einen Knoten mit $\deg^+ = 0$ und einen Knoten mit $\deg^- = 0$. (zB. Hasse-Diagramm)

Eulersche Linie	Eine Kantenfolge die jeden Knoten und jede Kante enthält. (jede Kante genau ein Mal)
offen	Start-/End Knoten verschieden
geschlossen	Start-/End Knoten gleich

Hamiltonsche Linie	Eine Kantenfolge die jeden Knoten (außer Start/End) genau 1 Mal enthält

---

Hamiltonscher Graph

Graph der einen Hamiltonsche Linie besitzt. Ist G ein Ham. Graph, hat G ein Teilgraph H so:

- H enthält jeden Knoten von G
- H ist zusammenhängend
- Es gilt für H: $|E|=|V|$
- Jeder $v \in V$: $deg(v)=2$
- $deg(x)+deg(y) \geq |V|$, $x,y \in V$

---

planar/eben	Graph der auf eine Ebene dargestellt werden kann, ohne dass sich die Kanten schneiden. zB K_4

Eulers Polyederformel

In einem planaren, zusammenhängenden Graph gilt:

$$V - E + F = 2$$
$$(\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2)$$

---

spannender Baum	Ein schlichter, ungewichteter, zusammenh. Graph H der ein Teilgraph von G ist, jeden Knoten in G erreicht und ein Baum ist.

---

spannender Wald	W ist ein Wald des schlichten, ungew. Graphen H mit $V_W = V_G$ und $E_W \subseteq E_G$ und den Komponenten von G.

---

minimal spannend	Ein zusammenhänd., kantengewichteten, ungerichteten Graph, der alle Knoten erreicht, ohne Kreise und mit der minimalen Gesamtgewichtung.

Kruskals-Algorithmus Input: zusammenh., gewichtete Graph G, mit n>0 Knoten

1. Ordne die Kanten nach Gewicht $\{e_1 \dots e_m\}$
2. Setze $E' = 0$, $j = 1$
3. Ist der Graph $(V, E' \cup \{e_j\})$ kreisfrei, $E' = E' \cup \{e_j\}$
4. Ist $|E'| = |V| - 1$ oder $j = m$ beende, $W = (V, E')$ ist minimal
   sonst $j = j+1$, wiederhole Schritt 3

Output: minim., span. Wald von G

Dijkstra Algorithmus (kürzester Weg)

Input:
- G ein zusammenh., einfacher, pos.-gewichteter Graph
- ∞ eine Zahl größer der Sum aller Kantengewichte
- $w(u,v)$ Gewicht der Kante $\{u,v\}$
- a Start Knoten
- z End Knoten

1. T soll ein Graph ohne Kanten und mit Knoten a sein
   Sei $V(T)$ die Knoten und $E(T)$ die Kanten von T
2. Sei $L(a) = 0$, alle anderen Knoten $L(u) = \infty$
3. $v = a$ und d die zu betrachtenden Knoten $F = \{a\}$
4. solange $z \notin V(T)$
   a. $F = \{$ noch zu betrachtenden Knoten $\}$
   b. Vergleich jeden Knoten u mit adjazenten v, die nicht in $V(T)$
      wenn $L(v) + w(v,u) < L(u)$, $L(u) = L(v) + w(v,u)$
      $D(u) = v$
   c. Füge Knoten x aus F mit kleinsten $L(v)$ zu $V(T)$
      und füge $\{D(x), x\}$ zu $E(T)$
      $v = x$

Output: $L(z)$ ... kürzeste Weg von a nach z

Algebraische Strukturen

(abstrakte Algebra & Gruppentheorie)

binäre Operation $A \neq \{\emptyset\}$, bin. Op. $\circ$ auf A ein Abbildung $A \times A$

Gruppen

Operationstafel

$\circ$	e	a
e	e	a
a	a	e

$(A, \circ)$	Gruppoid	Halbgruppe	Monoid	Gruppe	abelsche Gruppe
• Abgeschlossenheit $(a \circ b) \in A$					
• Assoziativität $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$					
• neutrales Element $e \circ a = a \circ e = a$					
• inverses Element $a \circ a' = a' \circ a = e$					
• Kommutativgesetz $a \circ b = b \circ a$					

Untergruppe

$(G, \circ)$ ist ein Gruppe, nichtleere Teilmenge $U \subseteq G$ ist eine Untergruppe, wenn $(U, \circ)$ eine Gruppe ist.

$$(U, \circ) \leq (G, \circ)$$

Linksnebenklasse

$(G, \circ)$ ist Gruppe, U ist Untergruppe

$$a \circ U = \{ a \circ u \mid u \in U \}$$

Rechtsnebenklasse

$$U \circ a = \{ u \circ a \mid u \in U \}$$

Index

Anz. Links/Rechtsnebenklassen von U in G $\quad |G : U|$

Ordnung

$|G|$ Anz d. Elemente in G

Satz von Langrange

G ist endliche Gruppe, U ein Untergruppe von G. Die Ordnung von G ist ein Vielfache der Ordnung von U

$$|G : U| = \frac{\text{Ordnung}(G)}{\text{Ordnung}(U)}$$

---

unendliche Ordnung

a^n, $n \in \mathbb{Z}$, alle Potenzen unterscheidbar, $a \in G$, $(G, \circ)$

endliche Ordnung $a^n = e, n > 0, n \in \mathbb{Z}, a \in G, (G, \circ)$

Normalteiler

= Kerne von Gruppenhomomorphismus

Eine Untergruppe N bei der Links/Rechtsnebenklassen von G übereinstimmen

$$N \trianglelefteq G$$

Faktorgruppe

N ist Normalteiler, G eine Gruppe, G/N Menge der Nebenklassen von G nach N. Damit ist

$$(a \circ N) \circ (b \circ N) = (a \circ b) \circ N$$

eine Gruppenoperation auf G/N. $(G/N, \circ)$ ist eine Faktorgruppe

---

Homomorphismus

G, H sind Gruppen, Funktion f bildet G auf H ab. F ist ein Homomorphismus, es gilt:

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

$$f(e_G) = e_H$$

$$f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}, \forall a \in G$$

Kern

Sei $f: G \to H$ ein Homomorphismus. Der Kern ist die Menge K die durch f auf das neutr. El. von H abgebildet wird.

$$K = \{x \in G \mid f(x) = e\}$$

Bild

$$B = \{b \in H \mid \exists x \in G : f(x) = b\}$$

Homomorphiesatz

$f: G \to H$ ein Homomorp., ist Faktorgruppe $G/\ker(f)$ zum Bild $f(G)$) isomorph:

$$G/\ker(f) \cong f(G)$$

Isomorphismus

$f: G \to H$ ist eine bijektive Funktion wo für alle $a, b \in G$ gilt:

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

$$G \cong H$$

Vorzeichen einer Permutation $\pi = (a\ b\ c\ \dots y\ z) = \underbrace{(ab)(bc)\dots(yz)}_{N(\sigma)}$

Signum $\quad \operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{N(\sigma)}$

Ringe und Körper

$(R, +, \cdot)$

Ring

- $(R, +)$ abelsche Gruppe

  $(a \circ b) \in A$

  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c$

  $e \circ a = a \circ e = a$

  $a \circ a' = a' \circ a = e$

  $a \circ b = b \circ a$

- $(R, \cdot)$ Halbgruppe

  $(a \circ b) \in A$

  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

- Distributivgesetze

  $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

  $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Ring mit Einselement	Ring, $(R, \cdot)$ $\quad e \circ a = a \circ e = 1$
kommutativer Ring	Ring, $(R, \cdot)$ $\quad a \circ b = b \circ a$
Körper	Ein kommutativer Ring mit Einselement in dem jedes Element außer 0 invertierbar ist. $(K, +, \cdot)$

Verband

Verband

$(M, \wedge, \vee)$ ist ein Verband wenn:

- $(M, \wedge)$ kommutative Halbgruppe
  $$(a \circ b) \in A$$
  $$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c$$
  $$a \circ b = b \circ a$$
- $(M, \vee)$ kommutative Halbgruppe
  $$(a \circ b) \in A$$
  $$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c$$
  $$a \circ b = b \circ a$$
- Verschmelzungsregeln
  $$a = a \wedge (a \vee b)$$
  $$a = a \vee (a \wedge b)$$

---

distributive Verband

Verband wo noch gilt:

- Distributivgesetze
  $$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
  $$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

---

boolsche Algebra

Ein distributiver Verband wo noch gilt:

- $(M, \wedge)$ und $(M, \vee)$ sind Monoide
  $$e \circ a = a \circ e = o$$
- jedes a hat ein Kompliment a'
  $$a \vee a' = 1 \quad \text{und} \quad a \wedge a' = 0$$

Lineare Algebra

Vektoren

Vektor x in n-dim Raum

Spaltenvektor	$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ; \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x_i \in \mathbb{R}$
Skalarkörper	K (= ℂ, = ℤ₂)
Addition	$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ \cdot x_n + yn \end{pmatrix}$
(Skalar)Multiplikation	$c \cdot x = c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & x_1 \\ c & x_2 \\ & \vdots \\ c & x_n \end{pmatrix}$
Nullvektor	$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (neutrales Element)
additiv inverse Vektor	$-x = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$ (inverses Element)

Vektorraum

Körper K, abl-Gruppe (V, +)
(V, +, K) Vektorraum / linearer Raum, es gilt:

- $c \cdot (x + y) = c \cdot x + c \cdot y$
- $(c + d) \cdot x = c \cdot x + d \cdot x$
- $(cd) \cdot x = c \cdot (d \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$

Unterraum / Teilraum

Ist $(V, +, K)$ Vektorraum, U nichtleere Teilmenge von V, ist $(U, +, K)$ Vektorraum $\rightarrow$ U Teilraum von V.

- $v + w$ liegt in U $\quad v, w \in U$
- cv liegt in U $\quad c \in K$

Nebenraum

Ist U Unterraum von V, x_0 Vektor aus V

$$N = x_0 + U = \{x_0 + u \mid u \in U\}$$

N ist Nebenraum (Nebenklasse)

Linearkombination

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot v_i \quad , v_i \in V, \; c_i \in K$$

z.B. $c \cdot v + d \cdot w$

---

trivial

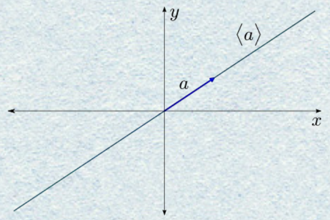
lin. Komb. mit $c_i = 0$, sonst nicht trivial

---

lineare Hülle (span)

lin. Hülle $[M]$ ist nicht leere Teilmenge M von V. Jeder Vektor in M kann durch eine Linearkomb. aus Vektoren von M gebildet werden

Bsp. Vektor a
lineare Hülle $\langle a \rangle$



Lineare Abhängigkeit

$\longrightarrow$ Bestimmung: $\begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, v, w sind Vektoren

---

linear unabhängig

Eine Menge an Vektoren deren lin. Komb. nur den 0-Vektor ergeben wenn alle $c_i = 0$ sind, ist unabhängig

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_n = 0$$

z.B. $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0{,}01\end{pmatrix}\right\}$

---

linear abhängig

Es gibt eine lin. Komb. die den 0-Vektor ergibt

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = 0$$

z.B. $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$

Basis

lin. unabhängige Vektoren die ein lin. Hülle $[M] = V$ bilden, also V aufspannen.

Jede Basis hat gleich viele Elemente

Austauschlemma (Steinitz)

damit kann eine Basis ersetzt werden, eine Basis mit bestimmten Vektoren konstruieren

Sei V Vektorraum über Körper K,
$B = \{b_1 \dots b_n\}$ Basis von V,
$w \in V$, w ein lin. Komb. $w = c_1 b_1 \cdot \dots c_i b_i$, $c_i \in K$
Ist $k \in \{1, \dots, n\}$ so dass $c_k \neq 0$ dann:

$B' = \{b_1, \dots b_{k-1}, w, b_{k+1}, \dots b_n\}$ auch eine Basis von V

Anwendung

$E = \{e_1, e_2, e_3\}$ Basis von $\mathbb{R}^3$, $w = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, zeige $\{w, e_2, e_3\}$ Basis

$$w = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \underset{c \neq 0}{1} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$\{e_1, e_2, w\}$ ist keine Basis weil $c_3 = 0 \rightarrow w = e_1 + e_2$

Dimension

Die Anzahl der Vektoren einer Basis

$$\dim V = |B|$$

Matrizen

Definition

eine $m \times n$ Matrix $A = (a_{ji})$:

$$A = \left. \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}}_{i/n} \right\} j/m$$

Transponierte Matrix

(diagonal gespiegelt)

Ist A eine Matrix, ist A^T eine Matrix die die Spalten und Zeilen von A vertauscht hat.

---

symmetrische

z.B. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Eine quadr. $n \times n$ Matrix bei der gilt:

$$A^T = A$$

Matrix Produkt

Um AB zu multipl.: Wenn A n Spalten hat, muss B n Zeilen haben

$$(m \times n)(n \times p) = (m \times p)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 11 & 13 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = [1\,2\,3]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = 1\cdot1 + 2\cdot2 + 3\cdot3 = 14$$
$$a_{21} = [2\,3\,1]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = 2\cdot1 + 3\cdot2 + 1\cdot3 = 11$$
$$a_{12} = [1\,2\,3]\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} = 1\cdot3 + 2\cdot2 + 3\cdot1 = 10$$
$$a_{22} = [2\,3\,1]\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} = 2\cdot3 + 3\cdot2 + 1\cdot1 = 13$$

$$\begin{bmatrix} & * & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & & a_{i5} \\ & * & & & \\ & * & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & b_{1j} & * & * & * \\ & & b_{2j} & & & \\ & & \vdots & & & \\ & & b_{5j} & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & * & & & \\ * & * & (AB)_{ij} & * & * & * \\ & & * & & & \\ & & * & & & \end{bmatrix}$$

A is 4 by 5 $\quad$ B is 5 by 6 $\quad$ AB is $(4 \times 5)(5 \times 6) = 4$ by 6

Einheitsmatrix

Sei $n \geq 1$:

$\{e_1, \dots, e_n\}$ bilden kanonische Basis

$$I_n = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & & e_{n-1} & e_n \end{array} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n} \end{array} \left.\vphantom{\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\\0\end{pmatrix}}\right\} n$$

Invertierbare Matrix

A muss quadratisch sein

Eine quadr. Matrix ist invertierbar wenn:

inverse Matrix

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$
$$\det A \neq 0$$

Spaltenrang

Die Dimension der linearen Hülle der Spalten von A

$$rg(A)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad rg(R) = 1$$

Zeilenrang

Die Dimension der linearen Hülle der Spalten von A

$$rg(A^T)$$

Matrix Operationen

1 Spalten dürfen mit Skalar multipliziert werden
2 Vielfaches einer Spalte addieren
3 Spalten vertauschen

Gauß - Jordan Elimination

(A^{-1} finden)

$$[K \; e_1 \, e_2 \, e_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A $\quad$ I

umformen zu: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right]$

A^{-1}

Lineare Abbildungen

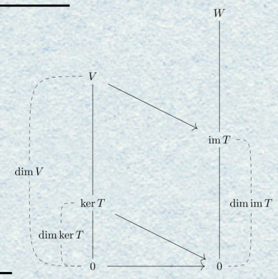
linear	Ist $f: V \to W$ eine Abbildung, V, W Vektorraum ist f linear wenn gilt: • $f(v+u) = f(v) + f(u) \quad v, u \in V$ • $f(c \cdot v) = c \cdot f(v) \quad c \in K$
Fortsetzungssatz lineare Fortsetzung	V, W Vektorräume über K, $\{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von V $w_1, \dots, w_n \in W$, dann gibt es genau eine lin. Abbildung: $f: V \to W$ mit $f(b_i) = w_i \quad , \forall i \in \{1, \dots, n\}$
Anwendung	• Bildung einer Abbildungsvorschrift z.B. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+3y \\ x+y \end{pmatrix}$ • andere Darstellung finden $f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1+v_2 \\ 3v_2 \end{pmatrix} \quad , b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
Kern	Ist $f: V \to W$ lin. Abbildung. Ist Kern die Menge $Ker(f) = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$
Bild	und Bild die Menge $f(V) = \{f(x) \mid x \in V\}$

Defekt — Dimension des Kerns

$$\mathrm{def}(f) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$$

Rang — Dimension des Bildes

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(f(V))$$



Rangformel

$$\dim V = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{def}(f)$$

Lineare Gleichungssysteme

Aufbau

$m, n \geq 1$ aus $\mathbb{Z}$, Körper K,
$a_{ij} \in K$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$,
$b_i \in K$ $(1 \leq i \leq m)$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad = Ax = b$$

- x_i sind Unbekannte
- homogen $b_1 = \dots = b_n = 0$, sonst
- inhomogen

Satz von Kronecker-Capelli
Lösbarkeit

Sei $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$, dann ist $Ax = b$ lösbar wenn:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(Ab)$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad Ab = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{rg}(A) = 2 \quad \mathrm{rg}(Ab) = 2$$

Gauß'sche Elimination

Prinzip

Für 4×4, analog mit $n \times n$

Spalte 1 erzeuge Nullen unter 1. Pivotelement
Spalte 2 erzeuge Nullen unter 2. Pivotel.
Spalte 3 erzeuge ...

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & b \\ & x & x & x & b \\ & & x & x & b \\ & & x & x & b \end{array}\right) \quad \text{Ziel:} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & b \\ & x & x & x & b \\ & & x & x & b \\ & & & x & b \end{array}\right) \xrightarrow{\text{zB.}} \begin{aligned} x + 2y + 3z + 4v &= b_1 \\ y + 2z + 4v &= b_2 \\ z + 3v &= b_3 \\ v &= 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow v = 0,\ z = b_3,\ y = b_2 - 2b_3,\ x = \ldots$

Lösungsfälle

1) $rg(A^* b^*) > rg(A^*)$

$Ax = b$, unlösbar

2) $r = m$

$Ax = b$, eindeutig lösbar

3) $r < m$, $rg(A^* b^*) = rg(A^*)$

$Ax = b$, mehrere Lösungen

Determinanten

Definition

Ist A eine quadr. Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$

Vorzeichen einer Perm.

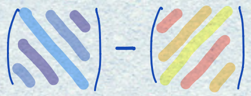
$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{\pi(1)1}\, a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)m}$$

Menge aller Perm. $(1, \ldots, n)$

die Det. gibt an um welchen Faktor die "Fläche" zwischen den kanonischen Basisvektoren durch die Matrixtransformation verändert wird.

Beispiel

$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $\det A = ad - cb$



$$B = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}, \det B = aei + dhc + gbf - gec - dbi - ahf$$

Eigenschaften

- Ist $\det A = 0$ ist A nicht invertiebar
- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
- Ist A invertierbar: $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
- $\det A^T = \det A$
- $\det\left(\begin{bmatrix} ta & tb \\ c & d \end{bmatrix}\right) = t \cdot \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ eine Reihe mit t multip. det wird um t multip.
- $\det\left(\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}\right) = -\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$ Tauschen von Spalten/Zeilen ändert das Vorzeichen
- $\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c-an & d-bn \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$ Addieren von Spalten/Zeilen ändert det nicht
- $\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$
- $\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}\right) = 0$
- $\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad$ A Umformen ist oft günstig!

Kofaktor

zur Bestimmung de det

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \det A = \underbrace{a_{11}}_{\text{Faktor}}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}\underbrace{(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})}_{\text{Kofaktoren}}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & a_{12} & \\ a_{21} & & a_{23} \\ a_{31} & & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & \end{vmatrix}$$

Formel

$$\det A = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \dots + a_{in} C_{in}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

Cramers Gesetz

$$Ax = b \quad , \det A \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\det B_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad , y = \frac{\det B_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{8-4}{4-6} = -2 \quad , y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2-6}{-2} = 2$$

$$-2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2 \\ 8-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \checkmark$$

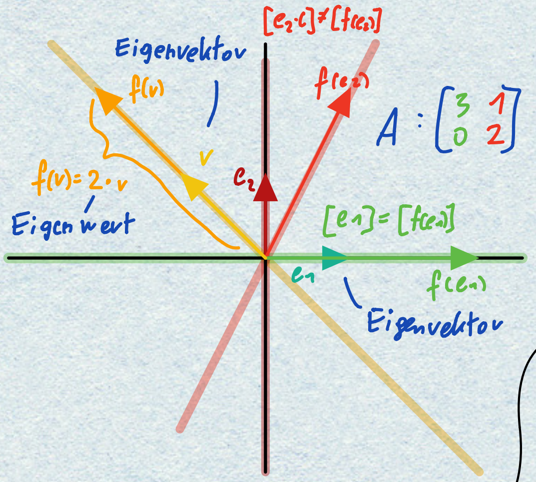
Eigenwerte & Eigenvektoren

Definition

Sei $f: V \to V$ lin. Abbildung, $c \in K, v \in V \setminus \{0\}$

$$f(v) = \underbrace{c}_{\text{Eigenwert}} \cdot \underbrace{v}_{\text{Eigenvektor}}$$

Eigenvektor	Ein Vektor der nach der lin. Abbildung f den gleichen Spann hat wie davor
Eigenwert	Der Faktor um den der Eigenvektor skaliert wird



Sei $A \in K^{n \times n}$, $c \in K$, $v \in K^n \setminus \{0\}$

$$\underbrace{A v}_{\text{Eigenvektor}} = \overbrace{c}^{\text{Eigenwert}} \cdot \underbrace{v}_{\text{Eigenvektor}}$$

Matrix · Vektor   Skalar · Vektor   → wandeln zu Matrix · Vektor

$$A v = c v \quad | \; c = c \cdot I = \begin{bmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & c \end{bmatrix}$$

$$A v = (c \cdot I) \cdot v \quad | \; -(c \cdot I) \cdot v \qquad \text{Vektor} = \text{Vektor}$$

$$A v - (cI) v = 0$$

z.B. $\begin{bmatrix} 3-c & 1 & 4 \\ 1 & 5-c & 9 \\ 2 & 6 & 5-c \end{bmatrix}$

Eigenwert finden

$(A - cI) v = 0$ gilt wenn

$$\det(A - cI) = 0$$

Beispiel

$$\det\left(\begin{bmatrix} 5-c & 7 \\ 2 & 3-c \end{bmatrix}\right) = (5-c)(3-c) - 14 =$$

$$= 15 - 3c - 5c + c^2 - 14 =$$

$$= c^2 - 8c + 1 = 0$$

$$c = -4 \pm \sqrt{16 - 1} = 0$$

$$= -4 \pm 3{,}87$$

$c_1 = -0{,}13$

$c_2 = -7{,}87$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad x^2 + px + q = 0$$

Eigenvektor finden

Sind alle Eigenwerte c_i gefunden, muss für jedes c:

$$(A - cI)v = 0$$

gelöst werden

Beispiel

$c = 2$

A^k berechnen -> Eigenbasis ändern

$B^{-1} \cdot A \cdot B$

$$\begin{bmatrix}3-2 & 1\\ 0 & 2-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right] \qquad \begin{aligned} v_1 + v_2 &= 0\\ v_1 &= -v_2\end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$1\begin{bmatrix}3-2\\ 0\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}1\\ 2-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot(3-2) + (-1)\cdot 1\\ 1\cdot 0 + (-1)\cdot(2-2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

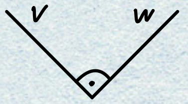
Probe:

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix} = 2\cdot v$$

Skalarprodukte

$K = \mathbb{R}$

v, w Vektoren



$\langle v, w\rangle = 0$

Def.

$$v = \begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ \vdots\\ w_n\end{bmatrix}$$

$$\langle v, w\rangle = v_1\cdot w_1 + v_2\cdot w_2 + \ldots + v_n\cdot w_n$$

Eigenschaften

- $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$
- $\langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle$
  $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$
- $\langle v, cw\rangle = c\cdot\langle v, w\rangle$
  $\langle cv, w\rangle = c\cdot\langle v, w\rangle$
- $\langle v, v\rangle \geq 0$ (nie negativ)
  $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Länge eines Vektors

(Norm von v)

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

$i = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}, j = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$

$\|v\| = 1 \rightarrow v$ ist normiert (Einheitsvektor)

Eigenschaften der Länge

- $\|v\| \geq 0$ immer positiv
- $\|v\| = 0$, $v = 0$
- $\|cv\| = |c| \cdot \|v\|$
- $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ Dreiecksungleichung
- $u = \frac{v}{\|v\|}$, u ist d. Einheitsvektor von v

Schwarz Ungleichung

$v, w \neq 0$

$$\frac{\langle v \cdot w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \cos \theta$$

der Ausdruck wird nie größer als 1, oder:

$$|v \cdot w| < \|v\| \cdot \|w\|$$

Satz des Pythagoras

v, w sind orthogonal, $\langle v, w \rangle = 0$

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

Orthogonalbasis

Vektoren $q_1, \dots, q_n$ sind orthonormal wenn

z.B. in $\mathbb{R}^2$ $i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & \text{wenn } i \neq j \text{ (orthogonal Vektor)} \\ 1 & \text{wenn } i = j \text{ (Einheitsvektor)} \end{cases}$$

---

orthogonale Matrix

eine Matrix Q mit orthonormalen Spalten

$$Q^T Q = I$$

$$Q^{-1} = Q$$

Beispiele

- Rotation

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$ (jeden Vektor um θ drehen)

- Permutation

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$ (ändert Reihenfolge von (x, y))

Spektralsatz

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A^T = A$ (symmetrisch) dann

- alle Eigenwerte reel
- $\exists$ Orthonormalbasis aus Eigenvektoren

$$A = Q^{-1} A Q$$

---

positiv definit

eine symmetrische Matrix mit pos. Eigenwerten

$\rightarrow$ alle Eigenwerte > 0

Matrix G aus $\mathbb{R}^{n \times n}$, $G^T = G$,
G ist positiv definit wenn:

$$v^T \cdot G \cdot v > 0, \quad v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

---

negativ definit

$\rightarrow$ alle Eigenwerte < 0

$$v^T \cdot G \cdot v < 0, \quad v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Hauptminorkriterium

sym. Matrix auf pos. Eigenw. testen

$S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gilt $c_1 > 0$, $c_2 > 0$?

Test:
- $a > 0$
- $ac - b^2 > 0$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ nicht pos. definit

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ pos. definit

$\rightarrow$ pos. definit (alle Minoren > 0)

- $a < 0$
- $ac - b^2 > 0$

$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ neg. definit

$\rightarrow$ neg. definit (abwechselnd pos/neg)

Bsp. M ... Hauptminoren

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$M_1 = a$

$M_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$

$$M_3 = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = acf + bed + dbe - dcd - bbf - aee$$

$\uparrow$ det A

Allgemein

Ist G eine pos. definite (auch symmetrische) Matrix

$$\langle x, y \rangle_G = x^T G y$$

Lineare Differenzengleichungen

(unvollständig)

Beispiele

Türme von Hanoi

Anzahl d. Zügen für $k \geq 2$ Scheiben

$$m_k = 2m_{k-1} + 1$$
$$m_1 = 1$$

Babylonisches Wurzelziehen

(Heron-Verfahren)

Annäherung an $\sqrt{a}$ durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \text{ für } n \geq 0$$
$$x_0 = \frac{a+1}{2}$$

Fibonacci Folge

(Hasenproblem)

Für alle $k \geq 2$:

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$$
$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1$$

Rekursion

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, die Summe von $i=1$ bis n von a_i ist dann:

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) + a_n, \quad n > 1$$

Das Produkt von $i=1$ bis n von a_i ist dann:

$$\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1, \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) \cdot a_n, \quad n > 1$$

---

partikuläre Lösung

Jede Folge (x_n), bei der jeweils $k+1$ aufeinander folgende Glieder die Gleichung:

$$F(n, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}) = 0 \text{ erfüllen}$$

zB Türm v. Hanoi $x_n = 2x_{n-1} + 1 \longrightarrow x_n = 2^n - 1$

$\longrightarrow x_n = 2^n C - 1, C \in \mathbb{R}$

allgemeine Lösung	Jede Folge die für alle reelen Zahlen stimmt (Anfangswert x_0 frei wählbar)
Gleichgewichtslage	Wie stabil eine Funktion auf Eingaben reagiert.
(recurrence relation) **Differenzengleichungen 1. Ordnung**	Wie findet man eine explizite Formel zur Berechnung einer rekursiven?
Iteration	1. Die Rekursion wird durch iteriert und es wird nach einem Muster gesucht 2. Eine explizite Formel wird erraten und überprüft 3. Beweis durch Induktion
arithmetische Folge	Eine Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ mit Konstante d: $$a_k = a_{k-1} + d, \quad k \geq 1$$ dann gilt auch: $$a_n = a_0 + d \cdot n, \quad n \geq 0$$
geometrische Folge	Eine Folge $a_0, a_1, a_2 \ldots$ mit Konstante r: $$a_k = r \cdot a_{k-1}, \quad k \geq 1$$ dann gilt auch: $$a_n = a_0 \cdot r^n, \quad n \geq 0$$
allgemeine lin. Diff. Glg	Eine Folge mit Koeffizienten a, b:
(inhomogene Gleichung)	$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \quad n \geq 0$$ a_n, b_n ... reele Folgen b_n ... Störfunktion / inhomogener Anteil

homogene Gleichung — Eine lin. Diff. Glg. mit $b_n = 0$

$$x_{n+1} = a_n x_n \quad , n \geq 0$$

Lösungsgesamtheit — Ist für $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$ gegeben durch:

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$$

$x_n^{(h)}$ ... allg. Lösung d. homogenen Glg.

$$x_{n+1} = a_n \cdot x_n$$

$x_n^{(p)}$ ... eine partik. Lösung der inhomog. Glg.

Variation der Konstanten — die Glg. $x_{n+1} = (n+1) x_n$ hat die allg. Lösung:

$$x_n = C \prod_{i=0}^{n-1} (i+1) = C n! \quad , C \in \mathbb{R}$$

die Konstante C wird nun variiert

$$x_n^{(p)} = C_n \prod_{i=0}^{n-1} a_i$$

Methode des unbestimmten Ansatzes — Es wird ein Ansatz abhängig von der Störfunktion b_n gewählt.

Beispiel

$$\underline{x_{n+1}} = (n+1) \underline{x_n} + 3(n+1)! \, , n \geq 0$$

$$x_n^{(h)} = C n! \quad | \text{Var. d. Konstanten}$$

$$x_n^{(p)} = C_n n!$$

$$C_{n+1} (n+1)! = C_n n! (n+1) + 3(n+1)! \quad | : (n+1)!$$

$$C_{n+1} = C_n + 3 \rightarrow \text{arith. Folge}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{C_n = 3n}}$$

Differenzengleichungen 2. Ordnung

2. Ordnung, weil "2 Vorgänger" x_{n+1}, x_n
linear, weil $(x_{n+1})^1, (x_n)^1$ und sie stehen seperat

Form

$a, b \ldots$ Konstanten, $b \neq 0$ $a, b \in \mathbb{R}$

$s_n \ldots$ (möglicherweise) von n abhängige (Stör) Fkt.

$$x_{n+2} + a x_{n+1} + b x_n = s_n, \; n \geq 0$$

$s_n = 0, \forall n \rightarrow$ homogene Gleichung

sonst: inhomogene Gleichung

Lösungsgesamtheit

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$$

$x_n^{(h)} \ldots$ allg. Lösung d. homog. Glg.

$x_n^{(p)} \ldots$ partik. Lösung d. inhomog. Glg.

$$L = (x_n^{(p)} + L_0$$

$$= \{(x_n) \mid x_{n+2} + a x_{n+1} + b x_n = s_n\}$$

$$L_0 = \{(x_n)_{n \geq 0} \mid x_{n+2} + a x_{n+1} + b x_n = 0\}$$

Lösungsweg

1. allg. Lsg $x_n^{(h)}$ d. homog. Glg bestimmen
2. eine partik Lsg $x_n^{(p)}$ bestimmen
3. Lösungsgesamtheit nach $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$ ermitteln