Zur VO Pruefung kommt eine Auswahl aus den folgenden Fragen.

1 Definition von Konvergenz

Welche der folgenden Eigenschaften einer Folge a_n sind äquivalent zu "a_n ist konvergent" (in $\mathbb{R}$)?

Dazu können Eigenschaften der Form "Q l R r" abgefragt werden, wobei es folgende Möglichkeiten gibt:

Q	$(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M)$, $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon \geq 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M)$, $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon \neq 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M)$, $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 1)\,(\exists M)\,(\forall n > M)$, $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M^2)$, $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M+1)$, $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\exists M)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall n > M)$, $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\exists n > M)$,
l	$\lvert a_n - a\rvert$, $\lvert a - a_n\rvert$, $a_n - a$, $a - a_n$
R	$<$, $\leq$, $>$
r	ε, $\varepsilon + 1$, ε^2, $\frac{\varepsilon}{2}$, $\sqrt{\varepsilon}$;

Ebenfalls gefragt werden können Cauchyfolgen-Varianten, d.h., "Q l R r" mit R und r wie oben, und:

Q	$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n, m > M)$ $(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall M)\,(\exists n, m > M)$ $(\exists M)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall n, m > M)$
l	$\lvert a_n - a_m\rvert$, $\lvert a_m - a_n\rvert$, $a_n - a_m$, $a_m - a_n$

Beispiel: Q sei $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M^2)$ und l sei $a_n - a$ und R sei $>$ und r sei ε^2; dann ergibt sich die Frage:

> Ist folgende Aussage äquivalent zu "a_n ist konvergent:" $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M^2)\; a_n - a > \varepsilon^2$.

Formal sind das also 660 “verschiedene” Fragen.

Hinweise: Das sollte alles offensichtlich sein; beachte allerdings folgende möglicherweise überraschende Kombinationen:
$\dots(\forall\varepsilon \neq 0)\cdots < \varepsilon^2$
$\dots(\forall n, m > M)\dots a_n - a_m < \varepsilon$ (ohne Betrag-Striche!)

2 Logik

Welche der folgenden Aussagen sind allgemein gültig (d.h. für beliebige mathematische Aussagen φ, ψ, für beliebige Menge A)

Zur Erinnerung: $\varphi \to \psi$ heißt “wenn dann” bzw “impliziert”; $\leftrightarrow$ heißt “gdw”, $\wedge$ heißt “und”, $\vee$ “oder” und $\neg$ “nicht”.

(a) $\neg(\forall x \in A)\varphi(x)$ impliziert $(\exists x \notin A)\varphi(x)$.

(b) $\neg(\forall x \in A)\varphi(x)$ impliziert $(\exists x \in A)\neg\varphi(x)$.

(c) $\neg(\forall x \in A)\varphi(x)$ impliziert $(\forall x \notin A)\neg\varphi(x)$.

(d) $\varphi \to \psi$ impliziert $\neg\varphi \to \neg\psi$.

(e) $\varphi \to \psi$ impliziert $\neg\psi \to \neg\varphi$.

(f) $\varphi \leftrightarrow \psi$ impliziert $\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$.

Und dieselben Fragen nochmals für “gdw” statt “impliziert”.

3 Ordnungen, Vollständigkeit

Welche der folgenden Aussagen gilt in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$:

(a) Jede nicht-leere Teilmenge hat ein Minimum.

(b) Jede nicht-leere Teilmenge hat ein Maximum.

(c) Jede beschränkte nicht-leere Teilmenge hat ein Minimum.

(d) Jede beschränkte nicht-leere Teilmenge hat ein Maximum.

(e) Jede nicht-leere Teilmenge hat ein Infimum.

(f) Jede nicht-leere Teilmenge hat ein Supremum.

(g) Jede beschränkte nicht-leere Teilmenge hat ein Infimum.

(h) Jede beschränkte nicht-leere Teilmenge hat ein Supremum.

4 Wachtumsraten

Ordne die folgenden Folgen nach Ihrer Wachstumsrate ($\ll$), wobei $k > 2$ und $1 < \ell < 2$

(a) $\log n$

(b) $\sqrt[k]{n}$

(c) $\sqrt{n}$

(d) $\sqrt[l]{n}$

(e) n

(f) $n\log(n)$

(g) n^ℓ

(h) n^2

(i) n^k

(j) 2^n

(Allenfalls gefragt in der Form: Gilt $\log(n) \ll n^k$ etc, das sind dann 56 "verschiedene" Fragen.)

5 Arithmetik mit Limiten

Wir setzen voraus dass die Folge a_n konvergiert und die dazugehörige Reihe konvergiert, und dasselbe für b_n. Was gilt dann allgemein:

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$

(c) $\lim_{n\to\infty}(a_n) - \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert

(e) a_n hat einen Häufungspunkt

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n) + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n) \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot b_n)$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n) - \sum_{n=1}^{\infty}(b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$

6 Konvergenzkriterien

Sei a_n eine Folge. Was gilt allgemein: (Alternierend heißt dass a_n abwechselnd ≥ 0 und ≤ 0 ist.)

(a) Wenn a_n beschränkt ist, dann konvergiert a_n.

(b) Wenn a_n beschränkt ist, dann hat a_n einen Häufungspunkt.

(c) Wenn a_n beschränkt und monoton ist, dann konvergiert a_n.

(d) Wenn a_n beschränkt und monoton ist, dann hat a_n einen Häufungspunkt.

(e) Wenn a_n einen Häufungspunkt hat, dann konvergiert a_n.

(f) Wenn a_n konvergiert, dann hat a_n einen Häufungspunkt.

(g) Wenn a_n genau einen Häufungspunkt hat, dann konvergiert a_n.

(h) Wenn a_n konvergiert, dann hat a_n genau einen Häufungspunkt.

(i) Wenn a_n konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(j) Wenn a_n eine Nullfolge ist, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(k) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert a_n.

(l) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann is a_n eine Nullfolge.

(m) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(n) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(o) Wenn a_n alternierend ist, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(p) Wenn a_n alternierend und eine Nullfolge ist, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(q) Wenn a_n alternierend ist und $|a_n|$ eine monotone Nullfolge, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

7 Mehr Konvergenz

Angenommen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Was gilt dann allgemein:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 100 \cdot a_n$ konvergiert.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot a_n$ konvergiert.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ konvergiert.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert.

8 Mengenschreibweise

Welche der Folgenden Aussagen gilt: Dabei bezeichnen wir hier mit (a, b) etc reelle Intervalle, und $\langle a, b\rangle$ das geordnete Paar.

(a) $\langle 2, 3\rangle = \langle 3, 2\rangle$

(b) $\{2, 3\} = \{3, 2\}$

(c) $[1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3)$

(d) $[1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3]$

(e) $[1, 2) \cup (2, 3) = [1, 3)$

(f) $[1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3) \setminus \{2\}$

(g) $[1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3] \setminus \{2\}$

(h) $[1, 2) \cup (2, 3) = [1, 3) \setminus \{2\}$

9 Topologie metrischer Räume

Welche der folgenden Aussagen gelten allgemein in jedem metrischen Raum (X, d):

- $\emptyset$ ist offen.
- X ist offen.
- Die Vereinigung offener Mengen ist offen.
- Die Vereinigung endlich vieler offener Mengen ist offen.
- Die Vereinigung zweier offener Mengen ist offen.
- Der Schnitt offener Mengen ist offen.
- Der Schnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.
- Der Schnitt zweier offener Mengen ist offen.
- Der Ball $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ ist offen.
- $\{y \in X : d(x, y) > \varepsilon\}$ ist offen.
- $\{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ ist offen.
- $\{y \in X : d(x, y) \geq \varepsilon\}$ ist offen.
- $\emptyset$ ist abgeschlossen.
- X ist abgeschlossen.
- Die Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- Die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- Der Schnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- Der Schnitt endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- Der Schnitt zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- Der Ball $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.
- $\{y \in X : d(x, y) > \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.
- $\{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.
- $\{y \in X : d(x, y) \geq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.

10 De Morgan Regeln

Seien A, B und C_i (für $i \in I$) Teilmengen von X: Welche der folgenden Aussagen gilt für alle solche Mengen:

- $X \setminus \bigcup_{i\in I}(X \setminus C_i) = \bigcap_{i\in I} C_i$
- $X \setminus \bigcup_{i\in I}(X \setminus C_i) = \bigcap_{i\in I}(X \setminus C_i)$
- $X \setminus \bigcup_{i\in I}(X \setminus C_i) = \bigcup_{i\in I} C_i$
- $\bigcup_{i\in I}(X \setminus C_i) = X \setminus \bigcap_{i\in I} C_i$
- $X \setminus \bigcup_{i\in I}(X \setminus C_i) = X \setminus \bigcap_{i\in I}(X \setminus C_i)$
- $X \setminus \bigcup_{i\in I}(X \setminus C_i) = X \setminus \bigcup_{i\in I} C_i$
- $X \setminus \bigcap_{i\in I}(X \setminus C_i) = \bigcup_{i\in I} C_i$
- $X \setminus \bigcap_{i\in I}(X \setminus C_i) = \bigcup_{i\in I}(X \setminus C_i)$
- $X \setminus \bigcap_{i\in I}(X \setminus C_i) = \bigcap_{i\in I} C_i$
- $\bigcap_{i\in I}(X \setminus C_i) = X \setminus \bigcup_{i\in I} C_i$
- $X \setminus \bigcap_{i\in I}(X \setminus C_i) = X \setminus \bigcup_{i\in I}(X \setminus C_i)$
- $X \setminus \bigcap_{i\in I}(X \setminus C_i) = X \setminus \bigcap_{i\in I} C_i$
- $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
- $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$
- $X \setminus (A \cup B) = A \cap B$
- $X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) = A \cap B$
- $X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$
- $X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) = A \cap B$
- $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B)$
- $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B))$
- $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B)$

11 Bild und Urbild

Sei $f : X \to Y$ und A, B Teilmengen von X und C, D von Y. Welche Aussagen gelten allgemein:

- $f''A \cup f''B = f''(A \cup B)$
- $f''A \cap f''B = f''(A \cap B)$
- $f''(A) \setminus f''(B) = f''(A \setminus B)$
- $f''A \cup f''B \subseteq f''(A \cup B)$
- $f''A \cap f''B \subseteq f''(A \cap B)$
- $f''(A) \setminus f''(B) \subseteq f''(A \setminus B)$
- $f''A \cup f''B \supseteq f''(A \cup B)$
- $f''A \cap f''B \supseteq f''(A \cap B)$
- $f''(A) \setminus f''(B) \supseteq f''(A \setminus B)$
- $f^{-1}C \cup f^{-1}D = f^{-1}(C \cup D)$
- $f^{-1}C \cap f^{-1}D = f^{-1}(C \cap D)$
- $f^{-1}C \setminus f^{-1}D = f^{-1}(C \setminus D)$

12 Exponentiation und Logarithmus

Welche der folgenden Aussagen gilt für alle x, y in $\mathbb{R}$ und a, b in $\mathbb{R}^{>0}$:

- $e^{(x^y)} = e^{x\cdot y}$
- $(e^x)^y = e^{x\cdot y}$
- $e^{x\cdot y} = e^x \cdot e^y$
- $e^{x\cdot y} = e^x + e^y$
- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
- $a^x = e^{x\cdot \ln(a)}$
- $a^x = \ln(a) \cdot e^x$
- $e^x = a^{x\cdot \ln(a)}$
- $\ln_a(x) = \ln(x) \cdot \ln(a)$
- $\ln_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$
- $\ln_a(x) = \ln(x) + \ln(a)$
- $\ln(x\cdot y) = \ln(x)+\ln(y)$

- $\ln(x \cdot y) = \ln(x) \cdot \ln(y)$
- $\ln(x + y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(x+y) = \ln(x) \cdot \ln(y)$
- $\ln(x^r) = r \ln(x)$
- $\ln(x)^r = \ln(r \cdot x)$
- $\ln(x)^r = \ln(r) \cdot \ln(x)$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{-n} = \sqrt[n]{e}$
- $e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$
- $\ln(-x) = \frac{1}{\ln(x)}$
- $\ln(-x) = -\ln(x)$
- $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$
- $\ln(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\ln(x)}$

13 Beispiele für (Un)stetigkeit

An welchen Punkten ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig? An welchen $x \cdot f(x)$?

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x > 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{sonst} \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{sonst} \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 2022 & \text{wenn } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{sonst} \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $f(x) = |x|$

14 Eigenschaften stetiger Funktionen

Welche der folgenden Aussagen gelten für alle stetigen $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$:

- $f''A$ ist ein Intervall $[c, d]$ mit $c \leq d$ in $\mathbb{R}$.
- Wenn $A = [a, b]$, dann ist $f''A$ ein Intervall $[c, d]$ mit $c \leq d$ in $\mathbb{R}$.
- Wenn $A = [a, b]$, dann ist $f''A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt.
- Wenn $A = (a, b)$, dann ist $f''A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt.
- Wenn $x < y < z$ in $\mathbb{R}$ und x, z in $f''A$, dann ist $y \in f''A$.
- Wenn $A = [a, b]$ and $x < y < z$ in $\mathbb{R}$ und x, z in $f''A$, dann ist $y \in f''A$.
- Wenn $A = [a, b]$ und f injektiv, dann ist f streng monoton.
- Wenn f injektiv, dann ist f streng monoton.

15 Monotonie und Extrema

Welche der folgenden Aussagen gelten:

- Jede stetige Funktion ist differenzierbar.
- Jede differenzierbare Funktion ist stetig.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$. Wenn f differenzierbar ist und bei x_0 ein lokales Extremum hat, dann ist $f'(x_0) = 0$.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$. Wenn f differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0$, dann hat f bei x_0 ein lokales Extremum hat.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$. Wenn f' bei x_0 ein lokales Extremum hat, dann ist f bei x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = 0$.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist f streng monoton steigend.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ genau dann wenn f streng monoton steigend ist.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn f streng monoton steigend ist, dann ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist f monoton steigend.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ genau dann wenn f monoton steigend ist.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn f monoton steigend ist, dann ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton steigend. Dann ist f differenzierbar und $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$.

16 Konkrete Funktionen

Sind die folgenden Funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ (mit dem natürlichen Definitionsbereich A) injektiv, surjektiv, bijektiv, stetig, differenzierbar?

- $\frac{1}{x}$
- $\frac{1}{x^2}$
- $\frac{1}{x^{2022}}$
- $\frac{1}{x^{2023}}$
- x^{-2023}
- x^{-2022}
- x^{-2}
- x^{-1}
- $\ln(x)$
- $\ln(x^2)$
- $\ln(|x|)$
- $\ln(\frac{1}{x})$

- e^x
- $\frac{1}{e^x}$
- $|x|$
- $\sqrt{x}$
- $\sqrt[3]{x}$
- $\sqrt[2022]{x}$
- $\sqrt[2023]{x}$
- $\sqrt{|x|}$
- $\sqrt[3]{|x|}$
- $\sqrt[2022]{|x|}$
- $\sqrt[2023]{|x|}$
- $x^{\frac{1}{2}}$
- $x^{\frac{1}{3}}$
- $x^{\frac{1}{2022}}$
- $x^{\frac{1}{2023}}$
- $|x|^{\frac{1}{2}}$
- $|x|^{\frac{1}{3}}$
- $|x|^{\frac{1}{2022}}$
- $|x|^{\frac{1}{2023}}$
- $\frac{1}{\sqrt{x}}$
- $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
- $\frac{1}{\sqrt[2022]{x}}$
- $\frac{1}{\sqrt[2023]{x}}$
- $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$
- $\frac{1}{\sqrt[3]{|x|}}$
- $\frac{1}{\sqrt[2022]{|x|}}$
- $\frac{1}{\sqrt[2023]{|x|}}$
- $x^{-\frac{1}{2}}$
- $x^{-\frac{1}{3}}$
- $x^{-\frac{1}{2022}}$
- $x^{-\frac{1}{2023}}$
- $|x|^{-\frac{1}{2}}$
- $|x|^{-\frac{1}{3}}$
- $|x|^{-\frac{1}{2022}}$
- $|x|^{-\frac{1}{2023}}$
- $\sin(x)$
- $\sin(\cos(\sin(\cos(\sin(x)))))$
- $\sin(|x|)$
- $\cos(|x|)$

Hinweis: Differenzierbar heißt "auf dem gesamten Definitionsbereich differenzierbar." $\frac{1}{x}$ ist z.B. differenzierbar (0 ist ja nicht im Definitionsbereich). Dagegen sind die Wurzeln $\sqrt[n]{x}$ nicht differenzierbar (sie sind bei 0 definiert, aber nicht differenzierbar. Bei $x \neq 0$ sind sie natürlich schon differenzierbar). Achtung: $\sin(|x|)$ und $\cos(|x|)$ sind überall (auch bei 0) stetig. Sind sie bei 0 auch differenzierbar?

17 Limiten

Ist $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$ für ein $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, oder undefiniert? (Wenn definiert, gib c an.) Dabei wird $f : A \to \mathbb{R}$ angenommen für das natürliche A.

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$
- $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x}$
- $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2}$
- $\lim_{x\to \infty} \frac{\sin(x)}{x}$
- $\lim_{x\to \infty} \frac{\sin(|x|)}{x^2}$
- $\lim_{x\to \infty} \sin(x)$
- $\lim_{x\to \infty} e^x$
- $\lim_{x\to \infty} e^{-x}$
- $\lim_{x\to -\infty} e^x$
- $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$
- $\lim_{x\to \infty} x^2 e^{-x}$
- $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\ln(x)}$
- $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x)}{x}$
- $\lim_{x\to \infty} e^{-\frac{1}{x^2}}$
- $\lim_{x\to \infty} e^{-x^2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(x)}$

Achtung: Der Definitionsbereich von $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{x^2}$ ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (und der von $\frac{\ln(x)}{x}$ etc nur $\mathbb{R}^{>0}$).

18 Partielle Ableitungen

Berechne $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, wobei $f(x,y)$ Summe und/oder Produkt und/oder Komposition ist aus: x, y, $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x, $\ln(x)$. Also z.B.

(a) $f(x,y) = \sin(x)\cos(y) - x^2 y$

(b) $f(x,y) = y^2 \sin(x) + y\cos(y)$

(c) $f(x,y) = e^{xy^2} + \sin(\cos(x+y))$

19 De l'Hospital (oder auch nicht)

Berechne $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, wobei f und g aus den folgenden Funktionen gewählt sind:

(a) $\cos(x) - 1$

(b) $1 - \sin(x)$

(c) $x + \sin(x)$

(d) $x - \sin(x)$

(e) $x + \cos(x)$

(f) $\cos(x) - x$

(g) $x \sin(x)$

(h) $x \cos(x)$

(i) $\sin(x)\cos(x)$

(j) $\sin(x)e^x$

(k) $\cos(x)e^x$

(l) $\cos(x) + e^x$

(m) $e^x - \cos(x)$

(n) $x^2 + 2x$

(o) $x^3 + x$

(p) $x^3 + 1$

(q) $e^x - 1$

(r) $e^x - x - 1$

(s) $e^x + 1$

(t) xe^x

20 Konkav und Konvex 1

$f(x)$ ist strikt konvex wenn $f(\theta x+(1-\theta)y) < \theta f(x)+(1-\theta)f(y)$ für alle $\theta \in [0,1]$, konvex wenn $\leq$ gilt, analog für (strikt) konkav. Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein:

(a) Wenn f konkav ist, dann existiert f'' und $f''(x) \geq 0$ für alle x.

(b) Wenn f konkav ist und f'' existiert, dann ist $f''(x) \geq 0$ für alle x.

(c) Wenn f'' existiert und $f''(x) \geq 0$ für alle x, dann ist f konkav.

(d) Wenn f strikt konkav ist, dann existiert f'' und $f''(x) > 0$ für alle x.

(e) Wenn f strikt konkav ist und f'' existiert, dann ist $f''(x) > 0$ für alle x.

(f) Wenn f'' existiert und $f''(x) > 0$ für alle x, dann ist f strikt konkav.

21 Konkav und Konvex 2

Ist die Funktionen $f(x)$ auf ihrem natürlichen (oder dem explizit angegebenen) Definitionsbereich D strikt konvex, d.h. $f(\theta x+(1-\theta)y) < \theta f(x)+(1-\theta)f(y)$ für alle $\theta \in [0,1]$, oder ist sie konvex aber nicht strikt konvex (dh es gilt zumindest noch $\leq$), oder ist sie strikt konkav, oder konkav aber nicht strikt konkav, oder weder noch? Dabei kann f eine der folgenden Funktionen g, oder $-g$, sein:

(a) 12

(b) $2x$

(c) x^2

(d) x^3

(e) x^4

(f) $\frac{1}{x}$ auf $D = \mathbb{R}^{>0}$

(g) $\frac{1}{x}^2$ auf $D = \mathbb{R}^{>0}$

(h) $\frac{1}{x}^3$ auf $D = \mathbb{R}^{>0}$

(i) $\frac{1}{x}^4$ auf $D = \mathbb{R}^{>0}$

(j) $\frac{1}{x}$ auf $D = (-\infty, 0)$

(k) $\frac{1}{x}^2$ auf $D = (-\infty, 0)$

(l) $\frac{1}{x}^3$ auf $D = (-\infty, 0)$

(m) $\frac{1}{x}^4$ auf $D = (-\infty, 0)$

(n) e^x

(o) e^{-x}

(p) $\ln(x)$

(q) $\sin(x)$

(r) $\sin(x)$ auf $D = [0, 2\pi]$

(s) $\sin(x)$ auf $D = [0, \pi]$

(t) $\sin(x)$ auf $D = [-\pi, \pi]$

(u) $\sin(x)$ auf $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(v) $\cos(x)$

(w) $\cos(x)$ auf $D = [0, 2\pi]$

(x) $\cos(x)$ auf $D = [0, \pi]$

(y) $\cos(x)$ auf $D = [-\pi, \pi]$

(z) $\cos(x)$ auf $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

22 Taylorreihen

Berechne die ersten drei Terme (d.h., für x^0 bis x^2) der Taylorreihe (um 0) von

(a) $\sin(\pi \cos(x))$

(b) $\cos(\pi \sin(x))$

(c) $-\cos(\pi \cos(x))$

(d) $\sin(\sin(x))$

(e) $\sin(\pi e^{-x})$

(f) $\cos(\pi e^{x})$

(g) $\cos(\sin(x))$

(h) $\ln(1 + \sin(x))$

(i) $\ln(\cos(x))$

(j) $\ln(1 + \pi \sin(x))$

(k) $\sin(\ln(1 + x))$

(l) $\cos(\ln(1 + x))$

23 Uneigentliche Integrale

Berechne: (Es ist auch $\pm\infty$ oder “undefiniert” möglich)

(a) $\int_0^\infty e^{-x} dx$

(b) $\int_0^\infty e^{-2x} dx$

(c) $\int_0^\infty 2^{-x} dx$

(d) $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$

(e) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$

(f) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$

(g) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

(h) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

(i) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$

(j) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$

(k) $\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx$

(l) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

(m) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

(n) $\int_0^1 \ln(x) dx$

(o) $\int_0^\infty \sin(x) dx$

24 Uneigentliche Integrale

Welche der folgenden Integrale sind endlich; sind ∞, oder sind undefiniert? (Genauer Wert muss nicht berechnet werden.)

(a) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$

(b) $\int_{-\infty}^\infty e^{x} dx$

(c) $\int_0^\infty x dx$

(d) $\int_0^\infty x^2 dx$

(e) $\int_0^\infty x^3 dx$

(f) $\int_0^\infty x^4 dx$

(g) $\int_{-\infty}^\infty x dx$

(h) $\int_{-\infty}^\infty x^2 dx$

(i) $\int_{-\infty}^\infty x^3 dx$

(j) $\int_{-\infty}^\infty x^4 dx$

(k) $\int_0^\infty \sqrt{x} \sin(x) dx$

(l) $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx$

(m) $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{\ln x} dx$

25 Anfangswertprobleme

Welche der gegebenen Funktionen $f(x)$ sind Lösungen des Anfangswertproblems $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$?

(a) $f(x) = 0$

(b) $f(x) = 1$

(c) $f(x) = x^2$

(d) $f(x)$ is x^2 für $x \geq 0$ und $-x^2$ für $x < 0$

(e) $f(x)$ is x^2 für $x > 1$ und $-x^2$ für $x < -1$ und 0 sonst.

(f) $f(x)$ is $(x-1)^2$ für $x > 1$ und $-(x+1)^2$ für $x < -1$ und 0 sonst.

(g) $f(x)$ is x^2 für $x > 0$ und $-(x+1)^2$ für $x < -1$ und 0 sonst.

Welche der gegebenen Funktionen $f(x)$ sind Lösungen des Anfangswertproblems $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(1) = 1$?

(a) $f(x) = 0$

(b) $f(x) = 1$

(c) $f(x) = x^2$

(d) $f(x)$ is x^2 für $x \geq 0$ und $-x^2$ für $x < 0$

(e) $f(x)$ is x^2 für $x > 1$ und $-x^2$ für $x < -1$ und 0 sonst.

(f) $f(x)$ is $(x-1)^2$ für $x > 1$ und $-(x+1)^2$ für $x < -1$ und 0 sonst.

(g) $f(x)$ is x^2 für $x > 0$ und $-(x+1)^2$ für $x < -1$ und 0 sonst.

Welche der gegebenen Funktionen $f(x)$ sind Lösungen des Anfangswertproblems $y' = \frac{3}{x}y + x^5$ $(x > 0)$, $y(1) = 1$?

(a) x^3

(b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^6$

(c) $x^3 + \frac{1}{3}x^6$

(d) $\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^6$

Welche der gegebenen Funktionen $f(x)$ sind Lösungen des Anfangswertproblems $xy' + 2y = 4x^2$ $(x > 0)$, $y(1) = 2$?

(a) $\frac{1}{x^2} + x^2$

(b) $\frac{1}{x} + x$

(c) $\frac{1}{x^3} + x^3$

(d) $\frac{2}{x^2} + x^2$

26 Länge konkreter Kurven

Berechnen Sie die Länge der Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

(a) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ t \end{pmatrix}$

(b) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ t \end{pmatrix}$

(c) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 2t \end{pmatrix}$

(d) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ 2t \end{pmatrix}$

(e) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 2t \end{pmatrix}$

(f) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2(1-x)^{\frac{3}{2}} \\ 2x^{\frac{3}{2}} \\ 6x \end{pmatrix}$

(g) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$

27 Volumen

Berechnen Sie $\iint_R f(x,y)dA$ für $R = [0,1] \times [0,1]$ und das folgende $f(x,y)$:

(a) $x^2y - xy^2$

(b) $x^2 + y^2$

(c) $y^2 + 2xy^2$

(d) $x^2 + 2x^2y$

(e) $3x^2y^2 - x^2y$

(f) $x^2 - xy^2$

(g) $x^2 - x^2y$

(h) $x^2y + xy^2$

(i) $x - y^2x$

(j) $2x^2y^2 + \frac{1}{9}$

(k) $y^3x + \frac{1}{4}$

(l) $x^3 + y^3x$