Analysis für Informatik

Panholzer Alois

30. September 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Beispiel [8 Punkte] - Konvergenz von Reihen

Die sogenannte '"Baumfunktion'"(da n^{n-1} die Anzahl der markierten Wurzelbäume mit n Knoten angibt) sei definiert also Potenzreihe

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \qquad mit \qquad a_n = \frac{n^{n-1}}{n!}.$$

(a) Man bestimme den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Hinweis: Man kann beispielsweise einen Zusammenhang mit der Definition der Eulerschen Zahl herstellen.

(b) Mit dem Ergebnis von (a) bestimme man den Konvergenzradius R von $T(x)$.

(c) Unter Benützung der Stirling'schen Formel für die Faktoriellen:

$$n! \approx \frac{n^n}{e^n} \cdot \sqrt{2\pi n}$$

und Anwenden des Majorantenkriteriums bei Verwendung einer hyperharmonischen Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ als Vergleichsreihe zeige man, dass die Reihe $T(x)$ auch für $x = R$ konvergiert.

2 Beispiel [8 Punkte] - Bestimmtes Integral

Die Lösung des klassischen Sammelbilderproblems (Wenn es insgesamt n verschiedene Sammelbilder gibt, wie viele Bilder E_n muss ich im Mittel sammeln, um eine vollständige Sammlung aller Bilder zu erhalten?) lässt sich durch folgendes uneigentliche Integral angeben ($n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$):

$$E_n = \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-\frac{t}{n}})^n] dt.$$

Man führe die Substitution $u = 1 - e^{-\frac{t}{n}}$ durch (Substitution der Grenzen berücksichtigen!) und werte das entstehende Integral aus, um die Lösung E_n in der üblichen Darstellung zu erhalten:

$$E_n = nH_n, \text{ mit } H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \text{ die n-te harmonische Zahl.}$$

Hinweis: Die endliche geometrische Reihe ist hierfür von Nutzen:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \qquad q \neq 1.$$

3 Aufgabe [8 Punkte] - Reelle Funktionen in mehreren reellen Variablen

Man bestimme das Maximum der reellen Funktion

$$f(x, y, z) = 2xy + 2xz + yz$$

unter der Nebenbedingung

$$x + y + z = 7,$$

indem man eine Variable der Nebenbedinung durch die anderen beiden ausdrückt und diese Variable in der zu maximierenden Funktion f substituiert (= Reduktionsmethode). Damit erhält man eine Funktion in zwei Variablen und das Problem der Bestimmung des Maximums ist in eine Extremwertaufgabe ohne Nebenbedingung übergeführt worden, welches sich mit den kennengelernten Methoden lösen lässt.

4 Aufgabe [8 Punkte] - Zur Konvergenz von Folgen

(a) Man definiere allgemein den Begriff **Häufungspunkt einer Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Man definiere allgemein den Begriff **Grenzwert einer Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Man formuliere den **Hauptsatz über monotone Folgen**.

(d) Man gebe **zwei Nullfolgen** $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an (es muss also gelten: $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$), für die die **Quotientenfolge** $\frac{b_n}{c_n}$ **divergiert**.

5 Aufgabe [8 Punkte] - Multiple Choice

Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen zu den Themen der Vorlesung (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein; für jede vollständig richtige Antwort gibt es einen Punkt; es werden für falsche Antworten KEIN Punkte abgezogen).

Sie können allenfalls notwendige Rechnungen zur Beantwortung der Fragen z.B. unten am Blatt durchführen, es zählen aber ausschließlich die hier gekreuzten Antworten!

Wenn eine Funktion $f(x)$ auf $[a,b]$ differenzierbar ist, was gilt dann für $f(x)$ auf jeden Fall noch? ◯ $f(x)$ ist auf $[a,b]$ integrierbar ◯ $f(x)$ ist auf $[a,b]$ monoton ◯ $f(x)$ ist auf $[a,b]$ stetig
Welche der folgenden Funktionen ist/sind differenzierbar an der Stelle 0? ($\lvert x\rvert$: Betrag von x) ◯ $\lvert x\rvert$ ◯ $\lvert x\rvert^2$ ◯ $x \cdot \lvert x\rvert$
Für welche der nachfolgend angegebenen reellen Funktionen $f(x)$ existiert das bestimmte Integral $\int_{-5}^{5} f(x)dx$? (Der Ganzteil $\lfloor x \rfloor$ von x:$\lfloor x \rfloor$:=max$\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$) ◯ $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ◯ $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$ ◯ $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$
Wenn eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, was gilt dann für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf jeden Fall noch? ◯ a_n ist konvergent ◯ a_n besitzt eine konvergente Teilfolge ◯ a_n ist monoton
Gibt es eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_n \in \mathbb{N}$, welche als Menge der Häufungspunkte genau die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ besitzt? ◯ ja ◯ nein
Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{\sin n}{n}$. Was gilt? ◯ a_n ist eine Nullfolge ◯ a_n ist monoton ◯ a_n ist beschränkt
Welche der folgenden alternierenden Reihen ist/sind konvergent? ◯ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n$ ◯ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ ◯ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
Die Potenzreihe $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ besitzt den Konvergenzradius $R = 1$. Für welche der folgenden komplexen Zahlen konvergiert somit die Reihe? ◯ $z = 1 + i$ ◯ $z = \frac{1}{1+i}$ ◯ $z = i - 1$

6 Lösungsvorschläge

6.1 Aufgabe 1 - Konvergenz von Reihen

(a)

$$a_n = \frac{n^{n-1}}{n!}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^n}{(n+1)!}}{\frac{n^{n-1}}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n \cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!} n^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^{n-1} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1+\frac{1}{n}}{1})^{n-1} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{n}})^n = \frac{e}{1+0} = e$$

(b)

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|} = \frac{1}{e}$$

(c)

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$T(\frac{1}{e}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (\frac{1}{e})^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} \cdot (\frac{1}{e})^n \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{n^n} \cdot n^{-1}}{\frac{\cancel{n^n}}{\cancel{e^n}}\sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{1}{\cancel{e^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{2\pi n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 \cdot 2\pi}} \leq \sum \frac{1}{n^\alpha}$$

Da die hyperharmonische Reihe für $\alpha > 1$ konvergiert, konvergiert somit auch die angegebene Baumfunktion.

6.2 Aufgabe 2 - Kombinatorik

Zunächst berechnen wir das unbestimmte Integral, um anschließend im Sinne des bestimmten Integrals den Hauptsatz über Differential- und Integralrechnung anzuwenden.

$$\int_0^\infty [1-(1-e^{-\frac{t}{n}})^n]dt$$

Gemäß Hinweis substituieren wir nun $u = 1 - e^{-\frac{t}{n}}$. Durch $\frac{du}{dx} = \frac{1}{n} \cdot e^{-\frac{t}{n}}$ und $dt = \frac{du \cdot n}{e^{-\frac{t}{n}}}$ erhalten wir:

$$\int (1-u^n) \cdot \frac{n}{e^{-\frac{t}{n}}} du = n \cdot \int \frac{1-u^n}{\underbrace{e^{-\frac{t}{n}}-1}_{-u}+1} = n \cdot \int \frac{1-u^n}{1-u} du = n \cdot \int \sum_{k=0}^{n-1} u^k du$$

Wir können nun die Linearität des Integrierens nutzen, um das Integral zu lösen - es wird jeder Teil der Summe separat integriert.

$$n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{u^k}{k}$$

Nun schauen wir uns auch das bestimmte Integral an und berechnen $\lim_{c\to\infty} F(c) - F(0)$:

$$n \cdot (\lim_{c\to\infty} \sum_{n=1}^{n} \frac{(1-\overbrace{e^{-\frac{c}{n}}}^{\to 0})^k}{k} - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-\frac{0}{n}})^k}{k}}_{0}) = n \cdot \sum_{n=1}^{n} \frac{1^k}{k} = n \cdot H_n$$

6.3 Aufgabe 3 - Reelle Funktionen in mehreren reellen Variablen

Zunächst lösen wir die Nebenbedingung nach z auf, und erhalten $z = 7 - x - y$. Dies setzen wir in f ein:

$$f(x, y, z) = 2xy + 2x(7 - x - y) + y(7 - x - y) = 14x + 7y - 2x^2 - y^2 - xy$$

Nun die partiellen Ableitungen...

$f_x = 14 - 4x - y$
$f_y = 7 - 2y - x$

Wir wollen nun Extrema finden, weshalb wir die partiellen Ableitungen gleich 0 setzen, und erhalten ein Gleichungssystem...

$$7 - 2y - x = 0 \Leftrightarrow x = 7 - 2y$$

$$14 - 4x - y = 0 \Leftrightarrow 14 - 4(7 - 2y) - y = 0 \Leftrightarrow -14 + 7y = 0 \Leftrightarrow y = 2$$

$$x = 7 - 2 \cdot 2 = 3$$

$$\rightarrow (3, 2)$$

Diesen Punkt untersuchen wir nun genauer anhand der Hesse-Matrix...

$f_{xx} = -4$
$f_{xy} = -1$
$f_{yx} = -1$
$f_{yy} = -2$

Das ergibt als Hesse-Matrix lediglich eine Möglichkeit - was, apropos, auch schon darauf schließen lässt, dass es nur ein einziges Extremum geben kann...

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Hierbei ist die erste Minorante gleich -4, also negativ. Die zweite Minorante ist gleich der Determinante, also $(-4 \cdot -2) - (-1 \cdot -1) = 7$, also positiv. Dies zeigt, dass sich an diesem Punkt ein **Maximum** befindet.
Noch ist aber nicht alles getan - immerhin befinden wir uns im vierdimensionalen Raum, weshalb wir uns noch die z-Koordinate ausrechnen müssen...

$$z = 7 - 3 - 2 = 2$$

Es befindet sich also ein Maximum am Punkt $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6.4 Aufgabe 4 - Theorie

(a) Man definiere allgemein den Begriff **Häufungspunkt einer Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Wenn in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder von a_n liegen, so ist a ein **Häufungspunkt** (oder **Häufungswert**) von $(a_n)_{n\geq 0}$. Analog zum uneigentlichen Grenzwert werden **uneigentliche Häufungspunkte** definiert. Der größte Häufungsöunkt (uneigentliche mit eingeschlossen) heißt **Limes superior**, der kleinste Häufungspunkt **Limes inferior**.

(b) Man definiere allgemein den Begriff **Grenzwert einer Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Eine reelle Zahl a heißt **Grenzwert** (oder **Limes**) der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, falls in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder a_n liegen, d.h., falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(\varepsilon) : \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

gilt.

(c) Man formuliere den **Hauptsatz über monotone Folgen**.

Eine *monotone Folge* ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

(d) Man gebe **zwei Nullfolgen** $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an (es muss also gelten: $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$), für die die **Quotientenfolge** $\frac{b_n}{c_n}$ **divergiert**.

Gedanke: Damit $\frac{b_n}{c_n}$ divergiert, muss logischerweise der Dividend größer sein, als der Divisor. So versteht sich auch, dass b_n asymptotisch größer sein muss, als c_n - es gilt konsequent $\mathbf{c_n = o(b_n)}$. Ein Beispiel hierfür wäre $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n} = n \to \infty$.

6.5 Aufgabe 5 - Multiple Choice

Wenn eine Funktion $f(x)$ auf $[a,b]$ differenzierbar ist, was gilt dann für $f(x)$ auf jeden Fall noch? $\otimes f(x)$ ist auf $[a,b]$ integrierbar[a] $\bigcirc f(x)$ ist auf $[a,b]$ monoton $\otimes f(x)$ ist auf $[a,b]$ stetig
Welche der folgenden Funktionen ist/sind differenzierbar an der Stelle 0? ($\|x\|$: Betrag von x)[b] $\bigcirc \|x\|$ $\otimes \|x\|^2$ $\otimes x \cdot \|x\|$
Für welche der nachfolgend angegebenen reellen Funktionen $f(x)$ existiert das bestimmte Integral $\int_{-5}^{5} f(x)dx$? (Der Ganzteil $\lfloor x \rfloor$ von x:$\lfloor x \rfloor$:=max$\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$) $\otimes f(x) = \lfloor x \rfloor$ $\otimes f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$ $\bigcirc f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$
Wenn eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, was gilt dann für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf jeden Fall noch? $\bigcirc a_n$ ist konvergent $\otimes a_n$ besitzt eine konvergente Teilfolge[c] $\bigcirc a_n$ ist monoton
Gibt es eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_n \in \mathbb{N}$, welche als Menge der Häufungspunkte genau die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ besitzt?[d] $\otimes$ ja $\bigcirc$ nein
Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{\sin n}{n}$. Was gilt? $\otimes a_n$ ist eine Nullfolge $\bigcirc a_n$ ist monoton $\otimes a_n$ ist beschränkt
Welche der folgenden alternierenden Reihen ist/sind konvergent? $\bigcirc \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n$ $\bigcirc \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ $\otimes \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
Die Potenzreihe $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ besitzt den Konvergenzradius $R = 1$. Für welche der folgenden komplexen Zahlen konvergiert somit die Reihe?[e] $\bigcirc z = 1 + i$ $\otimes z = \frac{1}{1+i}$ $\bigcirc z = i - 1$

[a] Als Voraussetzung für die Integrierbarkeit gilt: Stetig, monoton, oder beides.

[b] Prüfe am besten mit der Existenz eines beidseitigen Limes (linksseitig und rechtsseitig gleich) von $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

[c] Korrekt, siehe Satz 4.26 & 4.27 - Satz von Bolzano-Weierstraß

[d] Ich verweise hier mal auf folgenden Link: https://www.gutefrage.net/frage/rationale-zahlen-als-haeufungspunkte

[e] Leicht überprüfbar durch das Quotientenkriterium. Achte dabei auf das Eliminieren der komplexen Zahlen mit altbekannten Rechenregeln!