Ausarbeitung Übung 2 Beispiel 4 (Donnerstaggruppe)

[redacted]

Angabe:

Für das lineare Gleichungssytem

$$217 = 780\,x + 563\,y$$

$$254 = 913\,x + 659\,y$$

sind zwei Näherungslösungen gegeben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.999 \\ -1.001 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.341 \\ -0.087 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie für beide Näherungen die Norm der Residuen $\| A\vec{x} - \vec{b} \|_2$. Welche Lösung würden Sie deshalb als exakter einstufen? Bestimmen Sie noch die exakte Lösung und erklären Sie was passiert.

Lösung:

Berechnung der Norm der Residuen:

$$\| A\,\vec{x}_1 - \vec{b} \|_2 = \left\| \begin{matrix} 215{,}657 - 217 \\ 252{,}428 - 254 \end{matrix} \right\|_2 = 2{,}0675\ldots \qquad \| A\,\vec{x}_1 - \vec{b} \|_2 = \left\| \begin{matrix} 216.999 - 217 \\ 254 - 254 \end{matrix} \right\|_2 = 0.001$$

Diese Lösungen sugerieren, dass die Näherungslösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ die bessere der beiden ist und näher an der exakten Lösung liegt. Durch exaktes Lösen des Gleichungssystems sieht man aber, dass das nicht stimmt!

Exakte Lösung: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Der Grund warum es zu dieser stark fehlerhaften Lösung kommt, liegt daran, dass die beiden Gleichungen des Gleichungssystems relativ stark von einander linear abhängig sind. Anders ausgedrückt bedeutet das, dass das Gleichungssystem schlecht konditioniert ist, was auch schnell ersichtlich wird, wenn man die Konditionszahl berchnet.

$$\kappa(A) = 2.1932 * 10^6$$

Die präsentierten Lösungen zeigen, dass das minimieren der Norm der Residuen nicht immer zu einer guten Lösung führt. Trotzdem arbeiten einige Algorithmen auf dieser Basis.