Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 4 (SS 2013)
Lösungen

Aufgabe 4.1

a) Formalisieren Sie folgende Aussagen über der Signatur $\Sigma(\mathbf{FamX})$:
(1) Ege ist ein Bruder von Abdul.
(2) Mindestens ein Großvater von Ege ist auch ein Großvater von Abdul.
Wir nennen die beiden entsprechenden Formeln im Folgenden $F1$ und $F2$.

b) Beweisen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels $\mathcal{I} = \langle D, \Phi, \xi \rangle$ mit $D = \omega$, dass $F2$ ist keine logische Konsequenz von $F1$ ist. *Hinweis:* Beachten Sie, dass das Prädikatensymbol "=" von $\Sigma(\mathbf{FamX})$ nicht unbedingt als Gleichheit interpretiert werden muss!

c) Welche Fakten über die intendierte Interpretation muss man explizit machen um eine logisch wahre Konsequenzbehauptung zu erhalten? *Genauer:* Formulieren Sie Annahmen, sowohl natürlichsprachlich, als auch als Formeln $A1, \ldots, An$ über der Signatur $\Sigma(\mathbf{FamX})$, sodass $F1, A1, \ldots, An \models F2$ gilt. Diese Annahmen sollen *möglichst allgemein* sein und insbesondere nicht direkt auf Ege und Abdul Bezug nehmen, sondern nur auf allgemeine Beziehungen zwischen Geschwistern, Müttern, Vätern und Gleichheit von Personen.

Lösung Um eine kompaktere Darstellung zu erzielen verwenden wir folgende Abkürzungen:
G für das Prädikatensymbol <u>*Geschwister*</u>
M für das Prädikatensymbol <u>*männlich*</u>
m für das Funktionssymbol <u>*Mutter*</u>
v für das Funktionssymbol <u>*Vater*</u>
a für das Konstantensymbol <u>Abdul</u>
e für das Konstantensymbol <u>Ege</u>

a) $F1 : G(e, a) \wedge M(e)$
$F2 : \exists x[(=(x, v(m(e))) \vee =(x, v(v(e)))) \wedge (=(x, v(m(a))) \vee =(x, v(v(a))))]$

b) Es sei $\mathcal{I} = \langle \omega, \Phi, \xi \rangle$ mit $\Phi(G) =$ "=", $\Phi(M) =$ "≥ 0", $\Phi(=) =$ "$<$", $\Phi(m) = \Phi(v) = id$ (Identitätsfunktion), $\Phi(a) = \Phi(e) = 0$. Unter $\mathcal{I}$ wird folgende im Gegenstandsbereich ω falsche Konsequenzbehauptung ausgedrückt: "Aus $0 = 0$ und $0 \geq 0$ folgt dass ein x kleiner als 0 existiert".

c) Folgende allgemeine Annahmen genügen:
(A1) Geschwister haben dieselbe Mutter oder denselben Vater.
(A2) Identische Personen haben identische Väter.
Als Formeln über $\Sigma(\mathbf{FamX})$:
$A1 : \forall x \forall y[G(x, y) \supset (=(m(x), m(y)) \vee =(v(x), v(y)))]$, $A2 : \forall x \forall y[=(x, y) \supset =(v(x), v(y))]$

Aufgabe 4.2 Analysieren Sie folgende Inferenzketten. Wenn es sich um einen korrekten ND-Beweis handelt, so geben Sie einen Tableau-Beweis der selben Konsequenzbehauptung an. Andernfalls beschreiben Sie alle Fehler und geben Sie ein Gegenbeispiel mit möglichst wenigen Domänelementen an.

a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P(x)]^1 \quad \dfrac{\forall x(P(x) \supset Q(x))}{P(x) \supset Q(x)}\ \forall\text{-elim}}{Q(x)}\ \supset\text{-elim} \quad \dfrac{\forall x(Q(x) \supset R(x))}{Q(x) \supset R(x)}\ \forall\text{-elim}}{R(x)}\ \supset\text{-elim}}{P(x) \supset R(x)}\ \supset\text{-in } [1]}{\forall x(P(x) \supset R(x))}\ \forall\text{-in}$$

b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Q(a,x)}{\forall y Q(a,y)}\ \forall\text{-in}}{Q(a,f(y)) \vee \forall y Q(a,y)}\ \vee\text{-in}}{\exists x(Q(x,f(y)) \vee \forall y Q(a,y))}\ \exists\text{-in}$$

Lösung a) Der ND-Beweis ist korrekt. Insbesondere wurde keine der Seitenbedindungen von $\forall$-elim bzw. $\forall$-in verletzt. Ein Tableau-Beweis für die entsprechende Konsequenzbehauptung $\forall x(P(x) \supset Q(x)), \forall x(Q(x) \supset R(x)) \models \forall x(P(x) \supset R(x))$ lautet wie folgt:

(1)		$\mathbf{t} : \forall x(P(x) \supset Q(x))$		Annahme – γ-Formel
(2)		$\mathbf{t} : \forall x(Q(x) \supset R(x))$		Annahme – γ-Formel
(3)		$\mathbf{f} : \forall x(P(x) \supset R(x))$		Annahme – δ-Formel
(4)		$\mathbf{f} : P(c) \supset R(c)$		von 3
(5)		$\mathbf{t} : P(c) \supset Q(c)$		von 1
(6)		$\mathbf{t} : Q(c) \supset R(c)$		von 2
(7)		$\mathbf{t} : P(c)$		von 4
(8)		$\mathbf{f} : R(c)$		von 4
(9)	$\mathbf{f} : P(c)$ von 5	(10) $\mathbf{t} : Q(c)$		von 5
	$\times$ (Wid. 7/9)	(11) $\mathbf{f} : Q(c)$ von 6	(12) $\mathbf{t} : R(c)$ von 6	
		$\times$ (Wid. 10/11)	$\times$ (Wid. 8/12)	

b) Der einzige Fehler besteht in der ersten Inferenz ($\forall$-in): Die Variable x, die durch die allquantifizierte Variable y ersetzt wird, kommt in der offenen Annahme $Q(a,x)$ frei vor.

Es wird $Q(a,x) \models \exists x(Q(x,f(y)) \vee \forall y Q(a,y))$ behauptet. Ein Gegenbeispiel dazu lautet: $\langle\{0,1\},\Phi,\xi\rangle$, mit $\Phi(Q) =$"$<$", $\Phi(a) = 0$, $\Phi(f)(n) = 0$ (also: Symbol f wird auf die Konstant-Null-Funktion abgebildet), $\xi(y) = 1$ (beliebig sonst). Gemäß dieser Interpretation wird folgende falsche Aussage behauptet: Aus $0 < 1$ folgt, dass $n < 0$ für wenigstens ein n gilt oder $0 < n$ für alle n gilt.

Aufgabe 4.3 Geben Sie einen Tableau-Beweis oder ein Gegenbeispiel für folgende Gültigkeits- bzw. Konsequenzbehauptungen an. Wo dies möglich ist, entnehmen Sie einem offenen Ast des gescheiterten Beweisversuchs die Beschreibung eines Gegenspiels.

a) $(A \supset B) \wedge (\neg A \supset C) \models B \vee C$

b) $\models \neg[(A \vee (B \wedge C)) \supset \neg((B \wedge C) \vee A)]$

c) $\models \forall x[\exists y P(x,y) \supset \forall y P(x,y)]$

d) $\models \forall x \exists y[P(x,y) \supset \forall y P(x,y)]$

Hinweis: Achten Sie bei allen Tableau-Beweisen darauf, dass alle bewerteten Formeln eine eindeutige Nummer tragen und dass alle Regelanwendungen über diese Nummern auf ihre jeweiligen Prämissen verweisen.
Weiters sollten alle γ- und δ-Formeln in einem PL-Tableau jeweils auch als solche markiert werden.

Lösung

a) Folgendes geschlossene Tableau beweist $(A \supset B) \wedge (\neg A \supset C) \models B \vee C$:

(1)	$\mathbf{t} : (A \supset B) \wedge (\neg A \supset C)$							Annahme
(2)	$\mathbf{f} : B \vee C$							Annahme
(3)	$\mathbf{t} : A \supset B$							von 1
(4)	$\mathbf{t} : \neg A \supset C$							von 1
(5)	$\mathbf{f} : B$							von 2
(6)	$\mathbf{f} : C$							von 2
(7)	$\mathbf{f} : A$				von 3	(8)	$\mathbf{t} : B$	von 3
(9)	$\mathbf{f} : \neg A$	von 4	(10)	$\mathbf{t} : C$	von 4		$\times$	(Wid. 5/8)
(11)	$\mathbf{t} : A$	von 9		$\times$	(Wid. 6/10)			
	$\times$	(Wid. 7/11)						

b) Folgendem Tableau kann man ein Gegenbeispiel entnehmen:

(1)	$\mathbf{f} : \neg[(A \vee (B \wedge C)) \supset \neg((B \wedge C) \vee A)]$						Annahme
(2)	$\mathbf{t} : (A \vee (B \wedge C)) \supset \neg((B \wedge C) \vee A)$						von 1
(3)	$\mathbf{f} : A \vee (B \wedge C)$				von 2	(4) $\mathbf{t} : \neg((B \wedge C) \vee A)$	von 2
(5)	$\mathbf{f} : A$				von 3	$\vdots$	
(6)	$\mathbf{f} : B \wedge C$				von 3		
(7)	$\mathbf{f} : B$	von 6	(8)	$\mathbf{f} : C$	von 6		
	$\Uparrow$						

Der mit $\Uparrow$ gekennzeichnete Ast kann nicht mehr weiter expandiert werden. Ihm kann man entnehmen, dass jede Interpretation I mit $I(A) = \mathbf{f}$ und $I(B) = \mathbf{f}$ ($I(C)$ beliebig, also z.B., $I(C) = \mathbf{t}$) ein Gegenbeispiel zu $\neg[(A \vee (B \wedge C)) \supset \neg((B \wedge C) \vee A)]$ ist.

c) Folgendes Tableau kann nicht geschlossen werden:

(1)	$\mathbf{f} : \forall x[\exists y P(x,y) \supset \forall y P(x,y)]$	Annahme δ-Formel
(2)	$\mathbf{f} : \exists y P(a,y) \supset \forall y P(a,y)$	von 1
(3)	$\mathbf{t} : \exists y P(a,y)$	von 2 δ-Formel
(4)	$\mathbf{f} : \forall y P(a,y)$	von 2 δ-Formel
(5)	$\mathbf{t} : P(a,b)$	von 3
(6)	$\mathbf{f} : P(a,c)$	von 4
	$\vdots$	

Im Gegensatz zu AL-Tableaux kann man offenen bleibenden Ästen eines PL-Tableau keine direkte Beschreibung eines Gegenbeispiels entnehmen.
Ein Gegenbeispiel von $\forall x[\exists y P(x,y) \supset \forall y P(x,y)]$ über dem Gegenstandsbereich der natürlichen Zahlen ist aber leicht zu finden; z.B. $\mathcal{I} = \langle \omega, \Phi, \xi \rangle$, mit $\Phi(P) =$"$<$" (ξ ist beliebig, da eine geschlossene Formel interpretiert wird.)

d) Folgendes Tableau zeigt die Gültigkeit der Formel:

(1)	$\mathbf{f} : \forall x \exists y[P(x,y) \supset \forall y P(x,y)]$	Annahme δ-Formel
(2)	$\mathbf{f} : \exists y[P(a,y) \supset \forall y P(a,y)]$	von 1 γ-Formel
(3)	$\mathbf{f} : P(a,a) \supset \forall y P(a,y)$	von 2
(4)	$\mathbf{t} : P(a,a)$	von 3
(5)	$\mathbf{f} : \forall y P(a,y)$	von 3 δ-Formel
(6)	$\mathbf{f} : P(a,b)$	von 5
(7)	$\mathbf{f} : P(a,b) \supset \forall y P(a,y)$	von 2
(8)	$\mathbf{t} : P(a,b)$	von 7
(9)	$\mathbf{f} : \forall y P(a,y)$	von 7 δ-Formel
	$\times$	Wid. (6/8)

Beachten Sie, dass die γ-Regel zweimal auf die γ-Formel (2) angewendet werden muss. In Zeile (9) hätte auch ein beliebiger anderer geschlossener Term gewählt werden können.

Aufgabe 4.4 Erklären Sie die Probleme mit folgenden Varianten der γ- bzw. δ-Regel für Tableaux.

a) Geben Sie eine Formel F an, die zeigt, dass der Tableau-Kalkül *unvollständig* wird, wenn man für die γ-Regel nicht berücksichtigt, dass die Signatur der Formel um neue Paramter anzureichern ist.

b) Geben Sie eine Formel G an, die zeigt, dass der Tableau-Kalkül *inkorrekt* wird, wenn man für die δ-Regel nicht berücksichtigt, dass der einzusetzende Parameter neu sein muss.

Lösung

a) Die Formel $F = \exists x(P(x) \supset P(x))$ ist offensichtlich gültig. Allerdings ist F eine Formel über einer Signatur Σ, die keine Konstantensymbole enthält; daher gibt es *keine geschlossenen Terme* über Σ. Das bedeutet aber, dass auf $\mathbf{f} : \exists x(P(x) \supset P(x))$ die modifizierte γ-Regel gar nicht anwendbar ist und folglich trotz der Gültigkeit von F kein geschlossenes Tableau für F existiert.

b) Die Formel $G = \exists x P(x) \supset P(a)$ ist offensichtlich nicht gültig, da wir beispielsweise über dem Gegenstandsbereich der natürlichen Zahlen $\Phi(P) =$ "ist gerade" und $\Phi(a) = 1$ interpretieren können. Jedes Tableau für G muss wie folgt beginnen:

(1)	$\mathbf{f} : \exists x P(x) \supset P(a)$	Annahme
(2)	$\mathbf{t} : \exists x P(x)$	von (1) δ-Formel
(3)	$\mathbf{f} : P(a)$	von (1)

Wenn wir nun bei der Elimination des Existenzquantors in (2) a anstatt eines neuen Parameters für x einsetzen, so erhalten wir in der nächsten Zeile

$$(4) \quad \mathbf{t} : P(a)$$

und folglich ein geschlossenes Tableau im Gegensatz zur Tatsache, dass G nicht gültig ist.

Aufgabe 4.5 Beweisen Sie folgende partiellen Korrektheitsaussagen über dem Datentyp $\mathbb{Z}$ mit Hilfe des Hoare-Kalküls. (Vergessen Sie nicht auf den Gültigkeits-Nachweis für die verbleibenden Formeln über $\mathbb{Z}$.)

a) $\mathrm{y} < 0 \ \{\underline{\texttt{if}}\ \mathrm{x} > \mathrm{y}\ \underline{\texttt{then}}\ \mathrm{z} \leftarrow \mathrm{x}\ \underline{\texttt{else}}\ \underline{\texttt{begin}}\ \mathrm{z} \leftarrow \mathrm{y};\ \mathrm{y} \leftarrow \mathrm{y} - 1\ \underline{\texttt{end}}\}\ \mathrm{z} > \mathrm{y}$

b) $(\mathrm{x} = 13 \wedge \mathrm{y} = 21)\ \{\underline{\texttt{while}}\ \mathrm{x} < \mathrm{y}\ \underline{\texttt{do}}\ \underline{\texttt{begin}}\ \mathrm{x} \leftarrow \mathrm{x} - 2;\ \mathrm{y} \leftarrow \mathrm{y} - 5\ \underline{\texttt{end}}\}\ \mathrm{x} < 9$

Lösung

a) Mit den Abkürzungen $P : \mathrm{y} < 0$, $B : \mathrm{x} > \mathrm{y}$ und $Q : \mathrm{z} > \mathrm{y}$ ergibt sich folgende Ableitung:

$$\text{(H3)}\ \dfrac{\text{(H1)}\ \dfrac{\overset{(1)}{(P \wedge B) \supset Q\left[\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{z}}\right]}}{(P \wedge B)\ \{\mathrm{z} \leftarrow \mathrm{x}\}\ Q} \qquad \text{(T2)}\ \dfrac{\text{(H1)}\ \dfrac{\overset{(2)}{(P \wedge \neg B) \supset Q\left[\frac{\mathrm{y}-1}{\mathrm{y}}\right]\left[\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{z}}\right]}}{(P \wedge \neg B)\ \{\mathrm{z} \leftarrow \mathrm{y}\}\ Q\left[\frac{\mathrm{y}-1}{\mathrm{y}}\right]}}{(P \wedge \neg B)\ \{\underline{\texttt{begin}}\ \mathrm{z} \leftarrow \mathrm{y};\ \mathrm{y} \leftarrow \mathrm{y} - 1\ \underline{\texttt{end}}\}\ Q}}{P\ \{\underline{\texttt{if}}\ B\ \underline{\texttt{then}}\ \mathrm{z} \leftarrow \mathrm{x}\ \underline{\texttt{else}}\ \underline{\texttt{begin}}\ \mathrm{z} \leftarrow \mathrm{y};\ \mathrm{y} \leftarrow \mathrm{y} - 1\ \underline{\texttt{end}}\}\ Q}$$

Nachweis der Gültigkeit der Formeln (1) und (2):

(1) $\left(\left(P \wedge B\right) \supset Q\left[\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{z}}\right]\right)$
$\left(\left(\mathrm{y} < 0 \wedge \mathrm{x} > \mathrm{y}\right) \supset \mathrm{x} > \mathrm{y}\right)$ ist gültig in $\mathbb{Z}$, da diese Formel eine Tautologie ist.

(2) $(\,(\,P \wedge \neg\, B\,) \supset Q\left[{}^{\mathrm{y}}_{\mathrm{y}}{}^{-1}\right]\left[{}^{\mathrm{y}}_{\mathrm{z}}\right]\,)$
$(\,\mathrm{y} < 0 \wedge \neg\,(\mathrm{x} > \mathrm{y})\,) \supset (\mathrm{y} > \mathrm{y} - 1)$ ist gültig in $\mathbb{Z}$: Der Ausdruck $\mathrm{y} > \mathrm{y} - 1$ wertet in jeder Umgebung zu **t** aus. Daher ist die gesamte Implikation wahr.

b) Mit den Abkürzungen $P : (\,\mathrm{x} = 13 \wedge \mathrm{y} = 21\,)$, $B : \mathrm{x} < \mathrm{y}$ und $Q : \mathrm{x} < 9$ ergibt sich folgende Ableitung:

$$\text{(H4)}\ \dfrac{\overset{(1)}{P \supset I} \qquad \text{(T2)}\ \dfrac{\text{(H1)}\ \dfrac{\overset{(2)}{(I \wedge B) \supset I\left[{}^{\mathrm{y}}_{\mathrm{y}}{}^{-5}\right]\left[{}^{\mathrm{x}}_{\mathrm{x}}{}^{-2}\right]}}{(I \wedge B)\ \{\mathrm{x} \underline{\leftarrow} \mathrm{x} - 2\}\ I\left[{}^{\mathrm{y}}_{\mathrm{y}}{}^{-5}\right]}}{(I \wedge B)\ \{\underline{\mathtt{begin}}\ \mathrm{x} \underline{\leftarrow} \mathrm{x} - 2;\ \mathrm{y} \underline{\leftarrow} \mathrm{y} - 5\ \underline{\mathtt{end}}\}\ I} \qquad \overset{(3)}{(I \wedge \neg B) \supset Q}}{P\ \{\underline{\mathtt{while}}\ B\ \underline{\mathtt{do}}\ \underline{\mathtt{begin}}\ \mathrm{x} \underline{\leftarrow} \mathrm{x} - 2;\ \mathrm{y} \underline{\leftarrow} \mathrm{y} - 5\ \underline{\mathtt{end}}\}\ Q}$$

Unter Verwendung der Invariante $I : 5\mathrm{x} = 2\mathrm{y} + 23$ (nach "Rezept 2") erhält man:

(1) $(\,P \supset I\,)$
$(\,(\,\mathrm{x} = 13 \wedge \mathrm{y} = 21\,) \supset 5\mathrm{x} = 2\mathrm{y} + 23\,)$ ist gültig in $\mathbb{Z}$, da dort $5 \cdot 13 = 2 \cdot 21 + 23$ gilt.

(2) $(\,(\,I \wedge B\,) \supset I\left[{}^{\mathrm{y}}_{\mathrm{y}}{}^{-5}\right]\left[{}^{\mathrm{x}}_{\mathrm{x}}{}^{-2}\right]\,)$
$(\,(\,5\mathrm{x} = 2\mathrm{y} + 23 \wedge \mathrm{x} < \mathrm{y}\,) \supset 5(\,\mathrm{x} - 2\,) = 2(\,\mathrm{y} - 5\,) + 23\,)$
Die rechte Seite der Implikation kann man in $\mathbb{Z}$ zu $5\mathrm{x} = 2\mathrm{y}+23$ vereinfachen. erhalten wir die Tautologie $(\,(\,5\mathrm{x} = 2\mathrm{y} + 23 \wedge \mathrm{x} < \mathrm{y}\,) \supset 5\mathrm{x} = 2\mathrm{y} + 23\,)$, also eine in $\mathbb{Z}$ gültige Formel.

(3) $(\,(\,I \wedge \neg\, B\,) \supset Q\,)$
$(\,(\,5\mathrm{x} = 2\mathrm{y} + 23 \wedge \neg\,(\mathrm{x} < \mathrm{y})\,) \supset \mathrm{x} < 9\,)$
Wir erhalten:

$$\begin{aligned} 5\mathrm{x} &= 2\mathrm{y} + 23 && \mathrm{x} \geq \mathrm{y} \mid \cdot 2 \\ & && 2\mathrm{x} \geq 2\mathrm{y} \\ 5\mathrm{x} &\leq 2\mathrm{x} + 23 \\ 3\mathrm{x} &\leq 23 \\ \mathrm{x} &< 8 \end{aligned}$$

Da $\mathrm{x} < 8$ die Bedingung $\mathrm{x} < 9$ der rechten Seite impliziert, ist Formel (3) ebenfalls gültig in $\mathbb{Z}$.