Übungszettel 2
Wahrscheinlichkeitstheorie und stochastische Prozesse (WS 2024)

Für eine Zufallsvariable X, definiert man die *Verteilungsfunktion* $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ von X durch

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Wir schreiben $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

1) Sei M eine Münze mit Kopfwahrscheinlichkeit $p = 1/3$, X eine Binomialverteilte Variable mit Parametern $p = 1/3$ und $n = 3$, und Y eine geometrische Zufallsvariable Y mit Paramter $p = 1/2$ (das bedeutet, dass $p_Y(n) = (1/2)^n$ für $n \in \mathbb{N}$). Nehmen wir an, dass M, Xund Y unabhängig sind (das bedeutet, dass für jede $m, x, y \in \mathbb{N}$, die Ereignisse $\{M = m\}$, $\{X = x\}$ und $\{Y = y\}$ unabhängig sind). Definieren wir eine Zufallsvariable Z wie folgt: die Münze M wird geworfen. Wenn das Ergebnis Kopf ist, dann sei $Z = Y$. Wenn das Ergebnis Zahl ist, dann sei $Z = X$. Bestimme die Verteilungsfunktion von Z.

2) Wir haben N Urnen und k Bälle. Jeder Ball wird in eine zufällig ausgewählte Urne gelegt, und die Bälle werden unabhängig von einander platziert. Es sei E_1 das Ereignis, dass in der ersten Urne k_1 Bälle sind und E_2, dass in der zweiten Urne k_2 Bälle sind, wobei k_1 und k_2 ganze Zahlen sind. Berechne die Wahrscheinlichkeit

$$P(N, k, k_1, k_2) := \mathbb{P}(E_1 \cap E_2)$$

Sind die beiden Ereignisse unabhängig?

3) In der gleichen Ausgangssitiuation wie in Aufgabe 3, sei $k = \rho \cdot N$ für ein fixes ρ. (Einfachheitshalber nehmen wir an, dass ρN eine ganze Zahl ist.) Was is der Grenzwert von $P(N, \rho N, k_1, k_2)$ wenn k_1 und k_2 fix sind und $N \to \infty$? Was kann man über die Unabhängigkeit der beiden Ereignisse nun sagen?

4) In einer Gesamtbevölkerung hat jeder ein Lieblingspokemon A, B oder C. Angenommen alle drei sind gleich beliebt, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei uniform und unabhängig ausgewählte Personen das gleiche Lieblingspokemon haben? Angenommen stattdessen sind die Anteile an der Gesamtbevölkerung p_A,p_B, und p_C,was ist dann die Wahrscheinlichkeit?

Stelle eine Vermutung auf, wann diese Wahrscheinlichkeit am größten, und wann am kleinsten ist.

Bonusfrage (zum Kreuzen nicht notwendig): Beweise die Vermutung.

5) Es seien zwei Wahrscheinlichkeitsraüme $(\Omega, \mathbb{P}_1)$ und $(\Omega, \mathbb{P}_2)$. Betrachte den Produktraum $(\Omega \times \Omega, \mathbb{P})$ wobei $\Omega = \{1, 2, \ldots, 100\}$ und

$$\mathbb{P}(\{(n, m)\}) = \mathbb{P}_1(n)\mathbb{P}_2(m),$$

und zeige, dass in diesem Raum die Ereignisse $\{(n,m) : n \leq 50\}$ und $\{(n,m) : m \geq 10\}$ unabhängig sind.

6) In der gleichen Ausgangssitiuation wie in Aufgabe 5, gib ein Beispiel von $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$, so dass die Ereignisse $A = \{(n,m) : n+m \leq 20\}$ und $B = \{(n,m) : m \geq 10\}$ nicht trivial (das bedeutet, dass $\mathbb{P}(A)$ und $\mathbb{P}(B)$ nicht 0 und nicht 1 sind) und unabhängig im Produktraum sind.

Hinweis: Es genügt $\mathbb{P}_1 = \frac{1}{2}(\delta_k + \delta_l)$ und $\mathbb{P}_2 = \frac{1}{2}(\delta_{k'} + \delta_{l'})$ für passende $k, l, k', l' \in \Omega$ zu definieren. Hier, δ_k is das Wahrscheinlichkeitsmaß, das $\delta_k(\{\omega = k\}) = 1$ erfüllt.