Einführungsthemen

Samstag, 20. Jänner 2024 14:45

Vollständige Induktion:

$P(n) \mid \underbrace{P(0)}_{\text{Induktionsanfang}} \wedge \underbrace{(\forall n \in \mathbb{N}: P(n) \Rightarrow P(n+1))}_{\text{Induktionsschritt}} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: P(n)$

Beweis irrationale Zahl:

Bsp.: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Annahme: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$

$m^2 = 2 \cdot n^2 \Rightarrow 2 \mid m^2$

m^2 gerade $\Rightarrow m$ gerade

$\lightning$, da m soweit kürzbar wie möglich

Polarkoordinatendarstellung:

$z = [|z|, \arg(z)] = [r, \varphi]$

Rechnen:

$[r \cdot s, \varphi + \psi] = [|z_1| \cdot |z_2|, \arg(\varphi) + \arg(\psi)]$

Primfaktorzerlegung:

$a \geq 1: \; a = 2^{\nu_2(a)} \cdot 3^{\nu_3(a)} \cdot 5^{\nu_5(a)} \cdots = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(a)}$

$\nu_p(a)$ ... wie oft pelP in Prim.zerl. vorkommt

Restklassen:

$\mathbb{Z}_m = \{\bar{a} : a \in \mathbb{Z}\} = \overbrace{\{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}}^{m \text{ Restklassen}}$

Additive/Multiplikative inverse Restklassen

$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{1}$ $\quad \left(\bar{a} \cdot \bar{a}^{-1} = \bar{1}\right)$

$\bar{a} + \bar{b} = \bar{0}$ $\quad \left(\bar{a} + \bar{a}^{-1} = \bar{0}\right)$

wann vorhanden? $\Rightarrow ggT(a, m) = 1$

Euklidischer Algorithmus:

$ggT(59, 11)$:

$59 = 11 \cdot 5 + 4$

$11 = 4 \cdot 2 + 3$

$4 = 3 \cdot 1 + 1$

$3 = \boxed{1} \cdot 3 + 0$

$\Downarrow$

$ggT(59, 11) = 1$

Kleiner Satz von Fermat:

$\rightarrow$ # invertierbaren Restklassen

$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m$

a & m teilerfremd

Kongruenzen:

Rechnen:

•) $c \equiv a \mod m$, $b \equiv d \mod m$

$\Rightarrow a \overset{+}{-} b \equiv c \overset{+}{-} d \mod m$

Beweis: $m \mid [(c-a)+(d-b)] = m \mid [(c+d)-(a+b)]$ ✓

(analog $\ominus / \odot$)

•) $\not{c} \cdot a \equiv \not{c} \cdot b \mod m$

$\Downarrow$ Voraus.: $ggT(c, m) = 1$

$a \equiv b \mod m$

Relationen:

$R \subseteq \underbrace{A \times B}_{\text{Relation zw. A und B}} = \{(a,b) \; a \in A \wedge b \in B\}$

$A = B: R \subseteq A^2$ binäre Rel. auf A

$aRb :\Leftrightarrow (a,b) \in R$

Äquivalenzrelation auf A: $R \subseteq A^2$

•) R reflexiv: $\forall a \in R: aRa$

•) R symmetrisch: $\forall a, b \in R: aRb \Rightarrow bRa$

•) R transitiv: $\forall a, b, c \in R: (aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$

Partition von A (=Zerlegung):

$(A_i)_{i \in I}$: •) $A_i \neq \emptyset$, $\forall i \in I$

•) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

•) $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$

S.: (A, R) ÄR auf A. Äquivalenzklassen in A bzgl. R bilden Partition:

$\{K(a) : a \in A\}$ bildet Part.

S.: $(A_i)_{i \in I}$ Partition von A

$\Rightarrow \tilde{K}(a)$ Menge A_j, sodass $a \in A_j$

$aRb :\Leftrightarrow \tilde{K}(a) = \tilde{K}(b) \rightarrow$ R ÄR auf A

• $K(a) \neq \emptyset$

• $\bigcup_{a \in A} K(a) = A$

• $K(a) \cap K(b) = \emptyset$

Halbordnungen:

bin. Rel. auf A:

- R reflexiv
- R antisymmetrisch: $\forall a, b \in R: (aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$
- R transitiv
- R "Ordnungsrel.", falls je 2 El. vergleichbar

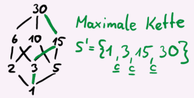
Bsp.: $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$

falls $\forall a, b \in A$: $aRb \vee bRa \Rightarrow$ Totalordnung

$(a \leq b \vee b \leq a)$

Hasse-Diagramm:

Bsp.: $T_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$



Maximale Kette $S' = \{1, 3, 15, 30\}$

$\leq \; \leq \; \leq$

Hausdorff'sches Maximalitätsprinzip:

$(H, \leq)$ HO; $S \subseteq H$; $(S, \leq)$ (TO) S Kette

$\Rightarrow \exists S' \subseteq H: S' \supseteq S$, sodass

$(S', \leq)$ maximale Kette

äquivalent zu Auswahlaxiom:

f: Auswahlaxiom*

$f: P(M) \setminus \emptyset \rightarrow M$

$A \in P(M) \setminus \emptyset$

$A \subseteq M$, $M \neq \emptyset$

$f(A) \in A$, $f: A \rightarrow a$, $a \in A$

* man wählt ein Element aus dem Sack aus (kann ∞ groß sein)

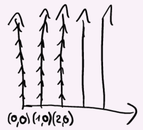
Wohlordnungen:

$(H, \leq)$ TO

mit Eig.: jede nichtleere Teilmenge $S \neq 0$ besitzt Minimum

Bsp.: $(\mathbb{N}, \leq)$ TO

$\cancel{(\mathbb{Z}, \leq)} \rightarrow$ kein Minimum



Lexikographische Ordnung:

$(m_1, n_1) \prec (m_2, n_2)$

$:\Leftrightarrow m_1 < m_2$ (mit Ordn.) oder

$m_1 = m_2 \wedge n_1 < n_2$ (nat. Ord.)

(äquivalent zu Auswahlaxiom)

Wohlordnungsprinzip:

Jede nichtleere Menge lässt sich "wohlordnen"

Transfinite Induktion

$(H, \leq)$ WO $\quad P(x)$ - gewisse Eig.

$\forall x \in H (\forall y < x: P(y) \Rightarrow P(x)) \Rightarrow \forall x \in H: P(x)$

Bsp.: * (Erweiterung von vollst. Induktion)

Funktionen/Abbildungen:

Tupel: (A, B, R_f)

Def.menge, Zielmenge, spez. Rel. zw. A und B

$f: A \rightarrow B$

•) injektiv: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

•) surjektiv: $\forall b \in B \; \exists a \in A: f(a) = b$

•) bijektiv: inj. & surj. $\rightarrow$ es ex. Umkehrfunktion

$g: B \rightarrow C$

$(g \circ f)(a) = g(f(a))$

f & g inj./surj./bij. $\rightarrow$ $g \circ f$ inj./surj./bij.

$f^{-1}: B \rightarrow A$ $\quad \forall a \in A, \forall b \in B$

$(f^{-1} \circ f)(a) = a$ $(= id_A)$ $\quad (f \circ f^{-1})(b) = b$ $(= id_B)$

$id_A: A \rightarrow A$, $id_A(a) = a$, $\forall a \in A$

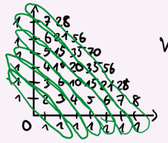
*

Rekursion $f(m,n) = f(m-1, n) + f(m, n-1)$, $m, n \geq 1$,

$m \in \mathbb{N}$ $\quad f(m,n) = 1$, falls $m = 0$ oder $n = 0$

$\mathbb{N}^2$

$(\mathbb{N}^2, \leq)$ Wohlordnung



Vermutung: $f(m,n) = \binom{m+n}{n}$

$f(2,2) \quad \binom{2+2}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$ ✓

$\left(0 \leq k \leq n: \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}\right)$

I.S.: $(m,n) \in \mathbb{N}^2$,

I.V.: $(\tilde{m}, \tilde{n}) \prec (m,n)$: $P((\tilde{m}, \tilde{n}))$, d.h. $f(\tilde{m}, \tilde{n}) = \binom{\tilde{m}+\tilde{n}}{\tilde{n}}$

I.B.: $P(m,n)$, d.h.: $f(m,n) = \binom{m+n}{n}$

• Fallunterscheid.:

• $m = 0$ $\quad P(0,n)$: $f(0,n) \overset{Def.}{=} 1$

$\binom{0+n}{n} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$ ✓

• $n = 0$ $\quad P(m,0)$: $f(m,0) \overset{Def.}{=} 1$

$\binom{m+0}{0} = \binom{m}{0} = \frac{m!}{0! \cdot m!} = 1$ ✓

• $m, n \geq 1$: $\quad$ I.V.: $f(m-1, n) = \binom{m-1+n}{n}$

$f(m, n-1) = \binom{m+n-1}{n-1}$

$f(m,n) \overset{Def.}{=} f(m-1, n) + f(m, n-1) \overset{I.V.}{=}$

$\binom{m-1+n}{n} + \binom{m+n-1}{n-1} =$

$\frac{(m-1+n)!}{n! \cdot (m-1)!} + \frac{(m+n-1)!}{(n-1)! \cdot m!} = \frac{(m+n-1)!}{n! \cdot m!} (m+n) = \frac{(m+n)!}{n! \cdot m!} = \binom{m+n}{n}$ ✓

Kombinatorik

Samstag, 20. Jänner 2024 14:45

Kombinatorik (7.11.- 14.11. / S.50-61)

Abzählende Kombinatorik:

"Regeln":

- Summenregel:
  $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$
- Produktregel:
  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- Gleichheitsregel:
  $\varphi: A \to B$ bijektiv
  $\Rightarrow |A| = |B|$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
$(0 \leq k \leq n)$

Anordnungsprobleme:

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $|A| = n$, $(x_1, \dots, x_k)$, $x_i \in A$

- "Variation mit Wiederholung" (ohne Einschränkung)

$|A^k| = |A| \cdot |A| \cdots |A| = n^k$

Bsp.: Toto $\{1, 2, X\}$ $|A| = 3$

$k = 12$ #Tototips $= 3^{12}$

- "Variation ohne Wiederholung" (mit Einschränkung)

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Bsp.: # Wörter Länge 4

$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = \frac{26!}{22!}$

- Permutation einer Menge

$\#\text{Perm} = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$

- Permutation einer Multimenge

$A = \{a_1, \dots, a_1, a_2, \dots, a_2, \dots, a_n, \dots, a_n\}$
$= \{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \dots, a_n^{k_n}\}$

$\#\text{Perm} = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!}$

Bsp.: $A = \{B_1, B_2, W_1, W_2, W_3, S\}$

$\Rightarrow \frac{(2+3+1)!}{2! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{6!}{2! \cdot 3!} = 60$

Auswahlprobleme:

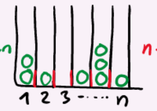
- "Kombination ohne Wdhg." (aus einer Teilmenge/Teilmultimenge)

$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$

Bsp.: "6 aus 45"

- "Kombination mit Wdhg." (aus einer Teilmultimenge)

$\frac{(k+n-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \binom{k+n-1}{k}$



$\sum_{i=1}^{n} k_i = K$ → Komposition von K

00101101000010 → 01-Folge

Komp

$\hat{A} = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{k}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}\}$

Schubfachprinzip:

n Objekte, k Schubladen, $n > k$

$\Rightarrow$ es gibt eine Schublade, die mind. $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ Objekte enthält
↳ aufgerundet

Partitionen (nochmals):

einer n-el. Menge in K nichtleere Teilmengen

Rekursionsformel: $M = \{1, 2, \dots, n+1\}$

$S_{n+1,K} = \underbrace{S_{n,K-1}}_{} + \underbrace{K \cdot S_{n,K}}_{}$ $S_{n,K}$ ... Stirlingszahlen 2. Art

2 Fälle

$\{n+1\}$ bildet Menge der Partition

$\{n+1\}$ in anderer Teilmenge
$\Rightarrow$ übrige El. $1, \dots, n$ bildet Part. in K Teilmengen

$S_{n,n} = 1$ $(n \geq 0)$ $S_{n,0} = 0$ $(n \geq 1)$

(Formel: $S_{n,K} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{K} (-1)^{k+j} \cdot \binom{K}{j} \cdot j^n$)

Bell-Zahlen:

$B_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,K}$

Rekursionsformel: $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k$, $n \geq 0$, $B_0 = 1$

→ # d. Partitionen aus n-el. Menge

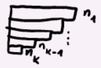
Bsp.: • $B_3 = 5$ (Part. aus $\{1, 2, 3\}$)

- Zahlpartitionen:

Darst. n als Summe pos. nat. Zahlen

$P(n)$ ... Partitionsfkt, $P(n,k)$ ... # Zahlpart. von n in k pos. Summen

o.B.d.A.: $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_{k-1} \geq n_k$



Ferrers-Diagramm

$1+1+1+1 = 4$
$1+1+2 = 4$
$1+3 = 4$
$2+2 = 4$
$4 = 4$

$n_k = 1$ $\Rightarrow$ # Mögl. $P(n-1, k-1)$

$n_k > 1$ $\Rightarrow$ # Mögl. $P(n-k, k)$

$\Rightarrow P(n,k) = P(n-1, k-1) + P(n-k, k)$, $0 \leq k \leq n$

Binomischer Lehrsatz:

Rekursionsformel: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Pascal'sches Dreieck:

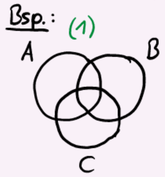
n \ k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Inklusions-Exklusions-Prinzip:

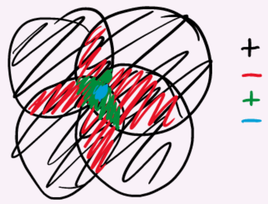
(Siebformel)

$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} \cdot \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$

Bsp.: (1)



$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$
$- |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A|$
$+ |A \cap B \cap C|$



(2) # Zahlen aus $\{1, \dots, 100\}$, die durch 2, 3 od. 5 teilbar sind

$|A| = \lfloor \frac{100}{2} \rfloor = 50$, $|B| = \lfloor \frac{100}{3} \rfloor = 33$, $|C| = \lfloor \frac{100}{5} \rfloor = 20$

(selbes Prinzip) $\Rightarrow$ 74

Eulersche φ-Funktion

$\varphi(m) = |\{1 \leq k \leq m : ggT(k,m) = 1\}|$

$m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$ ... Primfaktorzerlegung

(Umformungen) $= \varphi(m) = m \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{1}{p_i})$

Bei Primzahlen leicht ersichtlich: $\varphi(p^k) = p^k \cdot (1 - \frac{1}{p})$

Bsp. $\varphi(5) = 5 \cdot (1 - \frac{1}{5}) = 4$

Graphentheorie

Donnerstag, 11. Jänner 2024 15:27

Graphentheorie (14.11.-/23.11. /S.59-80?):

Graph: $G=(V,E)$

Knoten, Kante ($e \in E$)

gerichtet: $e=(x,y)$, $x,y \in V$ (geordnetes Paar)

ungerichtet: $e=\{x,y\}$, $x,y \in V$ (Menge)

Bsp.:

Bsp.: (=xy)

Handschlaglemma: $\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|$ $\quad \sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$

Graph schlicht/einfach
→ keine Schlinge, Mehrfachkante

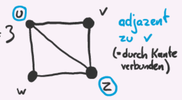
$\Gamma(x)$ = Nachbarn von x ($\Gamma^-(x)$ = Vorgänger, $\Gamma^+(x)$ = Nachfolger)

$d(x) = |\Gamma(x)|$ = # Nachbarn von x

$d^-(x)$ = Hingrad

$d^+(x)$ = Weggrad

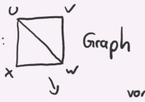
Bsp.: $d(v)=2$, $d(u)=3$



adjazent zu v (= durch Kante verbunden)

weitere Begriffe:

G:



Graph

Teilgraph (V',E')

von Knoten $\{y,w,x\}$ induzierte Teilgraph (alle Knoten werden miteinander verbunden)

K_4:

Knoten einfügen

Unterteilungsgraph von K_4

Kantenfolge: (KF)

$e_0 \neq e_n$ offene KF

$e_0 = e_n$ geschl. KF

($e \in E$)

Kantenzug: (KF, keine Kante doppelt) & jeder Knoten nur 1x

	ungerichtet	gerichtet
offen	Weg	Bahn
geschl.	Kreis	Zyklus

wenn KF ex.
→ es ex. Weg

$A^2 = A \cdot A$ (= 2 Kanten)

A^2 → zeigt # d. KF mit Länge 2 von v_i nach v_j

A^k → -"- Länge k -"-

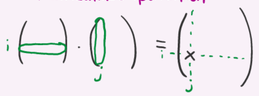
Erreichbarkeit best.:

$C = A^0 + A^1 + A^2 + A^3 + A^{\min(|V|-1,E)}$

→ $c_{ij}=0$ → v_j von v_i nicht erreichbar

$c_{ij} \neq 0$ → v_j von v_i erreichbar

Matrizenmultiplikation



Adjazenzmatrix: $G=(V,E)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $|V|=n$

$V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A=(a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$

(G ohne Mehrfachk.) $\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \boxed{a_{ij}} & \\ & & \end{pmatrix}$ $\quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_i,v_j) \in V \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

(G auf Mehrfachk.) - es gibt K-Kanten von v_i nach v_j

$v_i \to v_j$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&1&0 \end{pmatrix} \quad \sum_{j=1}^{n} = a_{ij} = d^+(v_i) \text{ (hier: } v_2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} = a_{ij} = d^-(v_j) \text{ (hier: } v_4)$$

Zusammenhang

schwach

stark

Satz von Menger:

max # kantendisj. Wegen von u nach v
=
min # Kanten, die entfernt werden müssen, sodass u und v separiert

Baum: (kein Kreis)

Bsp.:

Wald (besteht aus Bäumen)

$G=(V,E)$

$|V(G)| = 1 + |E(G)|$

$\alpha_0(G) = |V|$

$\alpha_1(G) = |E|$

Wurzelbaum

Wald, der aus K-Bäumen besteht: $\alpha_0(W) = \alpha_1(W) + K$

DAG (directed acyclic graph):

Bsp.:

$d^+=0$

→ $\exists v \in V$ mit $d^+(v)=0$

Eulersche & Hamiltonsche Linie:

E.L.: KF, wo jede Kante genau 1x benutzt

	ungerichtet	gerichtet	
→ bes. geschl. E.L.:	•) $d(v) \equiv 0 \bmod 2$ •) G zus.	•) $d^+(v) = d^-(v)$ •) G schwach zus. (Bew. in Vorlesung)	→ $\forall v \in V$
→ bes. offene E.L.:	•) $d(v) \equiv 0 \bmod 2$ •) $d(v_1) \equiv d(v_2) \equiv 1 \bmod 2$ •) G zus.	•) $d^+(v) = d^-(v)$ •) $d^+(v) = d^-(v)+1$, → Startpunkt; $d^-(v) = d^+(v)+1$ → Endpunkt •) G schwach zus.	→ $\forall v \in V \setminus \{v_1, v_2\}$

zus. ... zusammenhängend

H.L.: KF, wo jeder Knoten genau 1x benutzt (außer AK = EK) (Anfangsknoten, Endknoten)

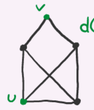
Satz von Ore: $G(V,E)$ einf. ung.,

wo gilt: $uv \notin E(G)$ (2 Knoten)

→ $d(u) + d(v) \ge |V(G)| (=: n)$

⇒ $\exists$ eine geschl. H.L.

(wenn nicht erfüllt ⇏ ¬ H.L.)



$d(u) + d(v) \ge |V|$

$3 + 2 \ge 5$ ✓

Planare Graphen: (kreuzungsfrei) zusätzlich $\alpha_2(G)$ = # der Gebiete

Linien kreuzen sich nicht (außer bei Knoten)

Eulersche Polyederformel: G zus. planar

(good to know:) stereographische Projektion: 3dim. Objekt auf Ebene projezieren

→ $\alpha_0(G) - \alpha_1(G) + \alpha_2(G) = 2$ (Beweis in Vorlesung)

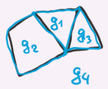
Erweitert: G planar, K Zusammenhangskompon.

→ $\alpha_0(G) - \alpha_1(G) + \alpha_2(G) = K+1$

Bsp.:

$K=3$

$\alpha_0(G)=9$, $\alpha_1(G)=9$, $\alpha_2(G)=4$ ⇒ $9-9+4=3+1$ ✓



$\sum_{g \text{ Gebiet}}$ # Kanten, die g berenden $= 2 \cdot |E|$

NICHT-Planare Graphen:

Bsp.: K_5:

$K_{3,3}$:

Satz von Kuratovski:

Graph planar, wenn kein Teilgraph von K_5 oder $K_{3,3}$

Vierfarbensatz:

min # Gebiete, um benachbarte unterschiedlich einzufärben : 4

Netzwerke: (kantenbewertete Graphen)

Bewertungsfkt.: $w: E \to \mathbb{R}$

$e \in E$, $w(e)$... Wert (= Gewicht, Länge, Kapazität) der Kante e

$G=(V,E)$ zus. einf. ung.:

•) spannender Baum $T=(V',E')$ von G ist Baum mit $V=V'$ (& $E' \subseteq E$)

$G=(V,E)$ einf. ung.:

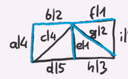
•) spannender Wald bzw. Gerüst $W=(V',E')$ von G ist Wald mit $V=V'$ (& $E' \subseteq E$) & Zus.komp. wie urspr. Graph

Gewicht eines Gerüstes: $w(W) = \sum_{e \in W} w(e)$

Kruskal Algorithmus:

- Kanten nach Gewicht aufsteigend sortieren

Bsp.:



el1, fl1, bl2, gl2, ~~il2~~, ~~bl3~~, al4, ~~cl4~~, ~~gl4~~

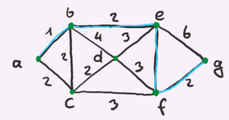
→ solange kein Kreis

→ kleinstes Gewicht

Dijkstra Algorithmus:

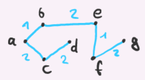
- kürzeste Weg/Bahn zw. Knoten / von Startknoten zum Rest

$d(v,w)$ ... Länge des kürzesten Weges von v nach w



Initial.

	a	b	c	d	e	f	g	ausgew. Knoten	Vorgänger Knoten
0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	a	—
1		1	2	∞	∞	∞	∞	b	a
			2	5	3	∞	∞	c	a
				∞	∞	5	∞	e	b
				4	3	4	9	d	c
						4	9	f	e
							6	g	f



Entfernungsbaum

□... endgültig bewertet

O... Weg wäre länger als vorher gefundener Weg = ert bleibt stehen

—... Weg kein Nachbar, aber wurde vorher schon gefunden => hinschreiben

Algebraische Strukturen

Donnerstag, 11. Jänner 2024 20:57

Algebraische Strukturen (23.11.– 5.12. / S.80–96)

(Menge, Operationen)

mittlere Menge A ($\neq \emptyset$)

- binäre Operation $\circ$: $A \times A \to A$

Bsp.: $(\mathbb{N}, \overset{+}{\cdot})$, $(\mathbb{Z}, \overset{+}{\cdot})$, ...
$(\mathbb{Z}_m, +)$, $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$
$(P(M), \cap)$, $(P(M), \cup)$

$(A, \circ)$: binäre alg. Struktur (= Gruppoid)

(i) assoziativ → Halbgruppe
(ii) Existenz eines neutr. El. → Monoid
(iii) Existenz von inv. El. → Gruppe
(iv) kommutativ → abelsche Gruppe

Gruppe:

Bsp.: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(P(M), \triangle)$ (sym. diff.)

$(S_n, \circ)$ symm. Gruppe — Menge aller Permutationen auf $\{1, \dots, n\}$; Hintereinanderschl. von Abb.

$(\mathbb{R}^{n \times n}, +)$ → $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

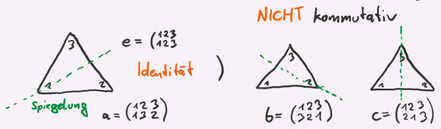
$(S_3, \circ)$ $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $g^{-1} = f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$f = f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = g$

$a \circ b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = f$, $b \circ a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = g$

NICHT kommutativ



$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ Identität

$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Drehung: $\overset{(1)}{\triangle} \to f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Operationstafel:

$\circ$	e	a	b	c	f	g
e	e	a	b	c	f	g
a	a	e	f	g		
b	b	g	e	f		
c	c	f	g	e		
f	f				g	
g	g					f

$a \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = b$

Permutationen:

$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\pi \in S_7$

$\pi = (1\,5\,3\,6)(2\,7)(4)$ — Zyklendarstellung

Vorzeichen von Permutation:

$$\operatorname{sgn}(\pi) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i}$$

"Signum" $= \#$ "Fehlstellungen"

$\boxed{a \circ x = b}$ $\boxed{y \circ a = b}$

$\to a^{-1} \circ (a \circ x) = a^{-1} \circ b$
$(a^{-1} \circ a) \circ x = a^{-1} \circ b$
$\overset{e}{\to} x = a^{-1} \circ b$ $y = b \circ a^{-1}$

Untergruppe einer Gruppe:

$(G, \circ)$, $(U, \circ)$, $U \subseteq G$:

- $U \neq \emptyset$
- $\circ : U \times U \to U$ (Abgeschlossenheit)
- $a \in U \to a^{-1} \in U$

(• assoz. • ex. eines neutr. El.)

Bsp.:

$(P(M), \triangle)$ $M = \{a, b\}$

$\triangle$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a,b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\emptyset$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\emptyset$

triviale Untergruppe: $(\{e\}, \circ)$, $(G, \circ)$

weitere UG: $U_1 = \{\emptyset, \{a\}\}$, $U_2 = \{\emptyset, \{b\}\}$, $U_3 = \{\emptyset, \{a,b\}\}$ — 2

Ordnung: $\operatorname{ord}(G) = |G|$ (# El.)

Linksnebenklasse: $a \circ U = \{a \circ u \mid u \in U\}$

Rechtsnebenklasse: $U \circ a = \{u \circ a \mid u \in U\}$

(# Nebenklassen · # El. v. U = # El. v. G)

$\operatorname{ord}(U) \mid \operatorname{ord}(G)$

Satz von Lagrange

zyklische UG:

Was ist kleinste Gruppe mit $a \in G$?

1) $a^k \neq a^l$, $k \neq l$
$U = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$ → keine Wdh. d. El.
$\Rightarrow (U, \circ)$ Kopie von $(\mathbb{Z}, +)$

2) $a^k = a^l$, $k \neq l$ $(k < l, n = l - k)$ aus n El. → Wdh. d. El.
$\Rightarrow \operatorname{ord}_a(a) = \min\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : a^n = e\}$

Bsp.: $f = \langle (123) \rangle = \{\underset{f}{(123)}, \underset{f^2}{(132)}, \underset{f^3 = e}{(1)(2)(3)}\}$

* $\operatorname{ord}_a(a) = \operatorname{ord}(\langle a \rangle)$
es gilt: $a^{\operatorname{ord}_a(a)} = e$
($a^{\wedge}$(#, bis Wdh. auftritt) = neutr. El.)

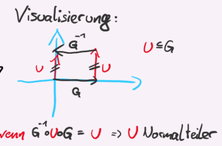
zyklisch, wenn: $\exists a \in G : \langle a \rangle = G$

Bsp.: $(\mathbb{Z}_m, +)$: $\langle \bar{1} \rangle = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{0}\} = G$ ✓
$\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{2}, \bar{0}\} \neq G$ ✗

Kleiner Satz v. Fermat: $a^{|G|} = e$

Normalteiler: $a \circ N = N \circ a$ (LNK, RNK)

Visualisierung:



wenn $G^{-1} \circ U \circ G = U \Rightarrow U$ Normalteiler

rechnen mit Nebenklassen:

Vor.: abelsche Gruppe G: ($U \subseteq G$)

$(a \circ U) \circ (b \circ U) := (a \circ b) \circ U$ – wohldef.

Faktorgruppe: $(G/N, \circ)$ $(N \subseteq G, a \in G)$

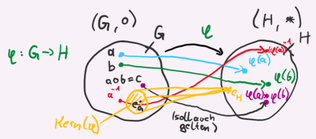
Bsp.: $N = \{e, f, g\}$ — Menge aller Nebenklassen

$a \circ N = \{a \circ e, a \circ f, a \circ g\} = \{a, b, c\}$ (LNK) ✓
$N \circ a = \{e \circ a, f \circ a, g \circ a\} = \{a, c, b\}$ (RNK)

$\left(\underset{\text{endl. Gruppe}}{|G/N|} = \frac{|G|}{|N|} = |G : N| \right)$

Strukturverträgliche Abb.:

$\varphi : G \to H$



Homomorphismus:

$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b)$

Bsp.: $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$
$\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\varphi(n) = i^n$

$\varphi(n + m) = i^{n+m}$ $\varphi(n) \cdot \varphi(m) = i^n \cdot i^m = i^{n+m}$

$(\mathbb{Z}_3, +)$, $G = \{e, f, g\}$ ($\to$ Drehungen von vorher) — C_3

φ: $e \mapsto \bar{0}$, $f \mapsto \bar{1}$, $g \mapsto \bar{2}$ — isomorph: φ Homomorphie + φ bijektiv

Kern von φ:

$\varphi(G) = \{a \in G : \varphi(a) = e_H\}$ $(= \varphi^{-1}(e_H))$

- $\overset{(\triangleleft)}{\text{Normalteiler}}$ von G $(\operatorname{Ker}(\varphi) \overset{(\triangleleft)}{\triangleleft} G)$
- $\to c^{-1} \circ a \circ c \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, $\forall a \in \operatorname{Ker}(\varphi) \to$ LNK = RNK ✓
- $\operatorname{Ker}(\varphi) \leq G$ (= Untergruppe)

$\to$ – $\operatorname{Ker}(\varphi) \neq \emptyset$, da $e_G \in \operatorname{Ker}(\varphi)$
– $a, b \in \operatorname{Ker}(\varphi) \Rightarrow a \circ b \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ $\underset{e_H}{\varphi(a)} * \underset{e_H}{\varphi(b)} = e_H$
– $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

Bild von G:

$\{\varphi(a) \mid a \in G\}$

- $\varphi(G) \leq H$ (= Untergruppe)

Bsp.: $(\mathbb{Z}, +) \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $\varphi(n) = i^n$ $(n \in \mathbb{Z})$
$e_H = 1 \to \operatorname{Ker}(\varphi) = 4 \cdot \mathbb{Z}$
Faktorgruppe: $\mathbb{Z}/4 \cdot \mathbb{Z}$
$(\varphi(\mathbb{Z}), \cdot) \underset{\text{isomorph}}{\cong} (\mathbb{Z}_4, +)$

Homomorphiesatz: $\varphi : G \to H$ Homomorph.

$\psi : G/\operatorname{Ker}(\varphi) \to \varphi(G)$ ("psi")
$a \circ \operatorname{Kern}(\varphi) \overset{\psi}{\mapsto} \varphi(a)$

$\to$ Isomorphismus: $G/\operatorname{Ker}(\varphi) \cong \varphi(G)$

- ψ wohldef.?:
$a \circ \operatorname{Ker}(\varphi) = b \circ \operatorname{Ker}(\varphi) \overset{?}{\Rightarrow} \varphi(a) = \varphi(b)$
$a \circ u_1 = a \circ u_2$ $u_1, u_2 \in \operatorname{Ker}(\varphi)$
$\to$ Homomorphismus anw. $\to \varphi(a) = \varphi(b)$ ✓

- ψ surj.?: $\varphi(a) \in \varphi(G)$: $\psi(a \circ \operatorname{Ker}(\varphi)) \overset{\text{per Def.}}{=} \varphi(a)$ ✓
- ψ inj.?: $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(a) * (\varphi(b))^{-1} = e_H$
$a \circ \operatorname{Ker}(\varphi) = b \circ \operatorname{Ker}(\varphi)$ ✓ $\varphi(a \circ b^{-1})$ $\in \operatorname{Ker}(\varphi)$ ✓
- Homomorphie erfüllt?: (wird nicht abgefragt zu beweisen)

$\psi(\underbrace{(a \circ \operatorname{Ker}(\varphi)) \circ (b \circ \operatorname{Ker}(\varphi))}_{(a \circ b) \circ \operatorname{Ker}(\varphi) = \varphi(a \circ b)}) = \psi(a \circ \operatorname{Ker}(\varphi)) * \psi(b \circ \operatorname{Ker}(\varphi))$
$= \varphi(a) \quad \varphi(b)$ ✓

Symmetrie: $(S_n, \circ)$, $\pi \in S_n$ (Gruppe) $(= (-1)^{\#\text{Fehlstände}})$

$$\operatorname{sgn}(\pi) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i}$$

"sigma"

$\operatorname{sgn} : S_n \to \{1, -1\}$ — Homomorphismus

$\operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma)$

$\varphi = \operatorname{sgn}$ $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{\pi \in S_n : \operatorname{sgn}(\pi) = 1\}$ – "geraden Permutationen" → bilden selbst Untergruppe $(A_n, \circ)$ (alternierende Gruppe)

Ringe, Körper:

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$: $(\mathbb{Z}, +)$ dominante Gruppe
$(\mathbb{Z}, \cdot)$ (mind.) Halbgruppe

Ring: $(R, +, \cdot)$

(i) $(R, +)$ kom. Gr.
(ii) $(R, \cdot)$ Halbgr.
(iii) distr. bzgl. +

- falls komm. ⇒ komm. Ring
- falls • neutr. El. bes. (neutr. El. bzgl. Multiplikation) → 1-El. ⇒ Ring mit 1-Element
• neutr. El. bzgl. $\circ$: "0-Element" (neutr. El. bzgl. Addition)

Bsp.: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, $(R^{n \times n}, +, \cdot)$

Polynome mit Koeff. in R: $n \in \mathbb{N}, a_i \in R$

$a(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$ → Polynom

$R[x] = \{a(x) = a_0 + \dots + a_n \cdot x^n, n \in \mathbb{N}, a_i \in R\}$

$(R[x], +, \cdot)$: $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ → für endlich viele Koeff. $a_n \neq 0$

$(R[[x]])$ formale Potenzreihe

$a(x) + b(x) = a_0 \cdot b_0 + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0) \cdot x + (a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0) \cdot x^2 + \dots$
$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right) \cdot x^n$

Kürzungsregel:

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ $\cancel{c} \cdot a = \cancel{c} \cdot b$, $c \neq 0$
$a = b$

(Ausnahmen: $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$: $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{2} \cdot \bar{0}$, $\bar{2} \neq \bar{0}$)

Nullteiler: $a, b \in R$, $a \neq 0$, $b \neq 0$
falls $a \cdot b = 0 \to a, b$ Nullteiler

Integritätsring: Ring, wo kein Nullteiler ex.

$(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$: im allg. kein Integritätsring, (keine Primzahl)

$(R, +, \cdot)$: $R^* = \{a \in R : \text{es ex. } a^{-1} \in R\}$ (Menge der "Einheiten")

Bsp.: $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$(R^*, \cdot)$ komm. Gr. $a \in R^* \Rightarrow a^{-1} \in R^*$ $((a^{-1})^{-1} = a)$

$a, b \in R^* \Rightarrow a^{-1} \cdot b^{-1} \in R^*$
$\Rightarrow (a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ $(= a^{-1} \cdot b^{-1})$

Körper:

- komm. Ring
- 1-El $\neq 0$
- $\forall a \in R \setminus \{0\} : a^{-1} \in R$

Bsp.: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ – endlicher Körper, $p \in P$

$\mathbb{Z}_m$: invertierbar, wenn $ggT(k, m) = 1$

- Jeder Körper ist Integritätsring:

ang. $a \neq 0$ $a \cdot b = 0 \mid a^{-1}$
$\Rightarrow b = a^{-1} \cdot 0 = 0$
$\Rightarrow$ Integritätsring ✓

- Jeder endliche Integritätsring ist ein Körper:

$a \in R \to a^{-1} \in R$: $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ (zu zeigen)
$a \in R$ $a \neq 0$: $a \cdot R = \{a \cdot r_1, a \cdot r_2, \dots, a \cdot r_n\}$
es gilt $a \cdot r_i \neq a \cdot r_j$, $i \neq j$

ang.: $a \cdot r_i = a \cdot r_j$
$r_i = r_j$ $\Rightarrow |a \cdot R| = |R|$, $a \cdot R \subseteq R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$
es kommen wieder alle El. hinaus

S.: es ex. nur endl. Körper für best. Mächtigkeiten
$q = p^n$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p \in P$

Konstruktion endl. Körper mit $q = p^n$ El.:

→ betr. Polynome $\mathbb{Z}_p[[x]]$ $p \in P$
& modulo eines irreduziblen Polynoms $m(x) \in \mathbb{Z}_p[[x]]$ rechnen
⇒ wie wählt man $m(x)$?

$m(x) = a(x) \cdot b(x)$ ⇒ grad $a(x) = 0 \vee$ grad $b(x) = 0$
es gilt: $0 <$ grad $a(x)$, grad $b(x) <$ grad $m(x)$

Bsp.: $m(x) = 2x^2 + 4$

$\underbrace{2 \cdot (x^2 + 2)}_{\text{in } \mathbb{R} \text{ irreduzibel}} \mid 2 \cdot (x + \sqrt{2}i) \cdot (x - \sqrt{2}i)$ in $\mathbb{C}$ NICHT irreduzibel

Grad dieselbe wie $m(x)$

allg. Beschreibung:

K Körper ⇒ Polynomring über K: $K[x]$ (Integritätsring)

$a(x) \neq 0$ $a(x) = (a_k \cdot x^k + \dots)$ $m(x) \in K[x]$
$b(x) \neq 0$ $b(x) = (b_l \cdot x^l + \dots)$ grad $m(x) \geq 1$
$\Rightarrow a(x) \cdot b(x) = \underbrace{a_k \cdot b_l}_{\neq 0} \cdot x^{k+l} + \dots$

- in $\mathbb{Z}$: $(\mathbb{Z}, +)$ Gruppe
→ $m \cdot \mathbb{Z}$ Untergruppe → Normalteiler

Nebenklasse: $\bar{a} := a + m \cdot \mathbb{Z}$

Faktorgruppe: $\mathbb{Z}/m \cdot \mathbb{Z} = \mathbb{Z}_m$ ("nach") (Menge aller Nebenklassen) $= \{a + m \cdot \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}\}$

- in $K[x]$: $(K[x], +)$ Gruppe
→ $m(x) \cdot K[x] = \{m(x) \cdot a(x), a(x) \in K[x]\}$ → Normalteiler
$\overline{a(x)} = a(x) + m(x) \cdot K[x]$

$K[x] / m(x) \cdot K[x]$ → Faktorring
wenn $m(x)$ irreduzibel über K ⇒ Körper

(Modulo-rechnen:
- in $\mathbb{Z}$: „Division mit Rest"
- in $K[x]$: „Polynomdiv. mit Rest":

Bsp.: $K = \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2[x]$
(1) $m(x) = x^2 + \bar{1}$ → kein Körper → $m(x)$ reduzibel
(2) $x^2 + x + \bar{1}$ → Körper)

Verbände, Boolesche Algebra:

Strukturen mit 2 bin. Operationen, die keine Ringe sind

Bsp.: $(B = \{0, 1\}, \wedge, \vee)$, $(P(M), \cap, \cup)$, (T_m, ggT, kgV)

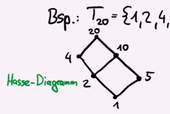
$B^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in B = \{0, 1\}\} : (B^n, \wedge, \vee)$

Eigenschaften:

- $(A, \wedge)$, $(A, \vee)$ – komm. Halbgruppe
- Verschmelzungsgesetz
⇒ Verband

Halbordnungen: $(M, \leq)$

Bsp.: $T_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$



Hasse-Diagramm

Infinium $c = \inf(a, b) :\Leftrightarrow$ (i) $c \leq a \wedge c \leq b$
„Größte untere Schranke" $c \in A$ (ii) $\forall d \in A$ mit $d \leq a \wedge d \leq b$
$\Rightarrow d \leq c$

Supremum $\bar{c} = (a, b) :\Leftrightarrow$ (i) $a \leq \bar{c} \wedge b \leq \bar{c}$
„Kleinste obere Schranke" $\bar{c} \in A$ (ii) $\forall d \in A$ mit $a \leq d \wedge b \leq d$
$\Rightarrow \bar{c} \leq d$

S.: Verband $(A, \wedge, \vee)$ ⇒ bin. Rel. $(A, \leq)$
$a \leq b :\Leftrightarrow a \wedge b = a$
⇒ dann gilt: $(A, \leq)$ HO, wo je 2 El. a, b ein
Infinum $\inf(a, b) = a \wedge b$
Supremum $\sup(a, b) = a \vee b$

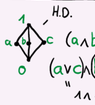
Bsp.:

kein Verband

S.: HO $(A, \leq)$, wo je 2 El. a, b ein $\inf(a, b)$ & $\sup(a, b)$ bes.
⇒ bin. Op. $\wedge$: $a \wedge b = \inf(a, b)$
$\vee$: $a \vee b = \sup(a, b)$
⇒ $(A, \wedge, \vee)$ Verband

distributiver Verband:

Bsp.:



$\vee$: ↑
$\wedge$: ↓

$(a \wedge b) \vee c = c$
$(a \vee c) \wedge (b \vee c) \neq$ → kein distr. Verband
" $1 \wedge 1 = 1$

Boolesche Algebra:

$(A, \wedge, \vee)$ distr. Verband:

- $(A, \wedge)$ bes. neutr. El. 1
$(A, \vee)$ bes. neutr. El. 0
- Komplement (Komplement von a) für jedes $a \in A$ gibt es $a' \in A$ mit d. Eig.: $a \wedge a' = 0$, $a \vee a' = 1$
- Regeln trivial (→ V05.12.)

endl. Boolesche Algebra:

jede endl. B.A. isomorph zu $(B^n, \wedge, \vee)$

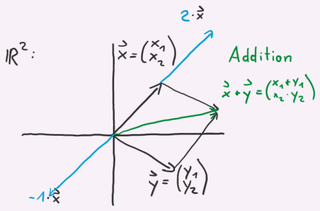
$M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$
$\{m_2, m_3, m_5\} \Rightarrow 2^n$
$\Updownarrow$
$(0, 1, 1, 0, 1, 0, \dots)$

Vektorräume

Freitag, 12. Jänner 2024 20:55

Vektorräume (7.12.-15.12./S.101-125)

$\mathbb{R}^2$:



Skalarmultiplikation

Körper: $K^n=\{\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} x_i\in K\}$ ... Vektorraum über K

alg. Struktur: $(V,+,K)$

- $(V,+)$ ... komm. Gruppe
- Skalarmult.
- Verträglichkeitsgesetze:
  - $\lambda\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}$
  - ⋮

Polynome über Körper K

$(K_{[x]},+,K)$ ... Vektorraum

$a(x)=\sum_{n=0} a_n\cdot x^n$, $b(x)=\sum_{n=0} b_n\cdot x^n$

$\Rightarrow a(x)+b(x)=\sum_{n=0}(a_n+b_n)\cdot x^n$

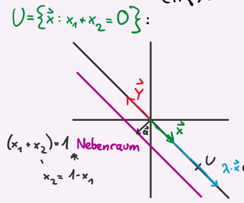
$\lambda\cdot a(x)=\sum_{n=0}(\lambda\cdot a_n)\cdot x^n$

$V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ – Menge aller reellen Fkt.

$(f+g)(x):=f(x)+g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$(\lambda\cdot f)(x):=\lambda\cdot f(x)$

$U=\{\vec{x}: x_1+x_2=0\}$:



$\vec{x}\in U$, $\vec{y}\in U$ $\quad \vec{z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{x}+\vec{y}\in U$

$x_1+x_2=0$

$y_1+y_2=0$

$\Rightarrow \underbrace{(x_1+y_1)}_{z_1}+\underbrace{(x_2+y_2)}_{z_2}=0$

$\underbrace{(U,+,\mathbb{R})}$ ... bildet selbst Vektorraum

Unterraum von V, $U\subseteq V$ (Teilraum)

Unterraumkriterien: V Vektorraum

- $U\neq\emptyset$
- $\vec{x}+\vec{y}\in U$, $\forall\vec{x},\vec{y}\in U$ (Abgeschl. bzgl. +)
- $\lambda\cdot\vec{x}\in U$, $\forall\lambda\in K, \forall\vec{x}\in U$ (Abgeschl. bzgl. ·)

$\Rightarrow U\subseteq V$

Bsp. $\mathbb{R}^3$:

$(\mathbb{R}^3,+,\mathbb{R})$: $x_1+2x_2+3x_3=0$ Ebene in $\mathbb{R}$

$W=\{\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}: x_1+2x_2+3x_3=0\}$

Unterraum von $V=\mathbb{R}^3$

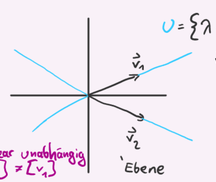
Nebenraum: $V=\mathbb{R}^3$

$\vec{a}+W$, $a\in V$

$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+x_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{\text{Parameterdarstellung}}$

Ortsvektor, $\in\mathbb{R}$, Richtungsvektor

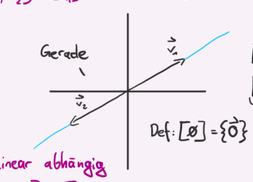
$U=\{\lambda\cdot\vec{v}: \lambda\in K\}$ bildet Vektorraum



$\vec{v}_1,\vec{v}_2$

$\underbrace{\lambda_1\cdot\vec{v}_1=\lambda_2\cdot\vec{v}_2}_{\text{Linearkombination von } v_1 \,\&\, v_2}$

Linear unabhängig $[\vec{v}_1,\vec{v}_2]\neq[v_1]$



$[v_1,v_2]=\{\lambda_1\cdot\vec{v}_1+\lambda_2\cdot\vec{v}_2\}$

$\underbrace{[v_1,\dots,v_k]}_{\text{Lineare Hülle von } \vec{v}_1\dots\vec{v}_k}=\{\lambda_1\cdot\vec{v}_1+\dots+\lambda_k\cdot\vec{v}_k\}$

Def: $[\emptyset]=\{\vec{0}\}$

Linear abhängig $[\vec{v}_1,\vec{v}_2]=[v_1]$

$\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\in V$:

- Linearkombination: (Koeffizienten)

$\lambda_1\cdot\vec{v}_1+\lambda_2\cdot\vec{v}_2+\dots+\lambda_k\cdot\vec{v}_k\in V$, $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in K$

- triviale Lin.komb., falls $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_k=0$

$\Rightarrow$ nulltrivial (sonst nicht-trivial)

$M\neq\emptyset$, $M\subseteq V$:

$[M]$ ... Lineare Hülle von M

$\Rightarrow$ Menge aller Lin.komb. von (endl. vielen) Vektoren aus M

Def.: $[\emptyset]=\{\vec{0}\}$

$[M]$ ... kleinster Unterraum von V, der alle Vektoren aus M enthällt

- Lineare Unabhängigkeit (Basis):

(1) Vektor $\{\vec{x}_1,\dots\vec{x}_k\}$ Lin. unabh., falls:

$\forall\vec{v}\in M: \vec{v}\notin[M\setminus\{\vec{v}\}]$

(2) – // – Lin. abh., falls:

$\exists\vec{v}\in M: \vec{v}\in[M\setminus\{\vec{v}\}]$

Bsp.: $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Lin. abh., da $\vec{a}-2\cdot\vec{b}=\vec{c}$

$0=\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c}$ – nichttriviale Linkomb., die $\vec{0}$ erzeugt

ang.: $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k$ lin. abhängig

d.h.: $\exists j$: $\vec{v}_j=\lambda_1\cdot\vec{v}_1+\dots+\lambda_{j-1}\cdot\vec{v}_{j-1}+\lambda_{j+1}\cdot\vec{v}_{j+1}+\dots+\lambda_k\cdot\vec{v}_k$

$\Rightarrow \underbrace{\vec{0}=\lambda_1\cdot\vec{v}_1+\dots\overset{(-1)}{\ominus}\vec{v}_j+\dots+\lambda_k\cdot\vec{v}_k}_{\text{nichttriv. Linear-komb., die } \vec{0}\text{-Vektoren erzeugt}}$

ang.: nichttriv. L.K., die $\vec{0}$-V. erzeugt

$\vec{0}=\lambda_1\cdot\vec{v}_1+\dots+\underbrace{\lambda_j}_{\neq 0}\cdot\vec{v}_j+\dots+\lambda_k\cdot\vec{v}_k$

$\Rightarrow \vec{v}_j=-\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\cdot\vec{v}_1-\dots-\frac{\lambda_k}{\lambda_j}\cdot\vec{v}_k$

$\Rightarrow$ Lin. Abh.

S_1: $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k$ genau dann Lin. unabh., wenn mittlere L.K. gibt, die $\vec{0}$ erzeugt

$\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\neq(0,\dots,0)\Rightarrow\lambda_1\vec{v}_1+\dots+\lambda_k\cdot\vec{v}_k=\vec{0}$

– // – Lin. abh., falls

$\lambda_1\vec{v}_1+\dots+\lambda_k\cdot\vec{v}_k=\vec{0}\Rightarrow\lambda_1=\dots=\lambda_k=0$

Lineares Gleichungssystem:

Bsp.:

$$\boxed{\begin{aligned}2\cdot\lambda_1+1\cdot\lambda_2+0\cdot\lambda_3&=0\\1\cdot\lambda_1+2\lambda_2-3\lambda_3&=0\\-\lambda_1-2\lambda_2+3\lambda_3&=0\end{aligned}}$$

$\rightarrow$ Gibt es Lösungen außer $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

(Hier: ✓) $\Rightarrow$ Lin. abh.

$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, ..., $\vec{e}_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ kanonische Basis

$(K^n,+,K)$ – Lin. unabh.

Halbdiagonalform, Stufenform:

$\vec{a}=\begin{pmatrix}\boxed{\neq 0}\\\\\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\\boxed{\neq 0}\\0\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\\boxed{\neq 0}\end{pmatrix}$

$\lambda_1\cdot\vec{a}+\lambda_2\cdot\vec{b}+\lambda_3\cdot\vec{c}=\vec{0}$ $\quad\begin{pmatrix}\neq 0&0&0\\&\neq 0&0\\&&\neq 0\end{pmatrix}$

betr. Lin. unabh. Vekt.

$\vec{x}\in[\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k]\Rightarrow\exists\lambda_1,\dots,\lambda_k$: $\vec{x}=\lambda_1\cdot\vec{v}_1+\lambda_2\cdot\vec{v}_2+\dots+\lambda_k\cdot\vec{v}_k$

$\Downarrow$

Darstellung eindeutig

ang.: $\exists\mu_1,\dots,\mu_k$: $\vec{x}=\mu_1\cdot\vec{v}_1+\mu_2\cdot\vec{v}_2+\dots+\mu_k\cdot\vec{v}_k$

$\vec{0}=\underbrace{(\lambda_1-\mu_1)}_{=0}\cdot\vec{v}_1+\underbrace{(\lambda_2-\mu_2)}_{=0}\cdot\vec{v}_2+\dots+\underbrace{(\lambda_k-\mu_k)}_{=0}\cdot\vec{v}_k$

$\Rightarrow\lambda_1=\mu_1\wedge\lambda_2=\mu_2\wedge\dots\wedge\lambda_k=\mu_k$

$B\subseteq V$ heißt Basis von V, falls gilt:

- B Lin. unabh.
- $[B]=V$ (B ist Erzeugungssystem von V)

falls $|B|$ endl. $\Rightarrow$ endl. Basis

Bsp.:

$\mathbb{R}^2$: $B=\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}$

Austauschlemma:

$M=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$, $\vec{a}=\mu_1\vec{v}_1+\dots+\mu_j\cdot\vec{v}_j+\dots+\mu_n\cdot\vec{v}_n$

und $M'=(M\setminus\{v_j\})\cup\{\vec{a}\}=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_a,\dots,\vec{v}_n\}$

dann gilt:

- $[M']=[M]$
- M' Lin. unabh. ($\Leftrightarrow$ M Lin. unabh.)

Bsp.: $B'=\{\vec{c}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_n\}$

$\vec{c}_1=\lambda_1\cdot\vec{c}_1+\lambda_2\cdot\vec{b}_2\dots+\lambda_n\cdot\vec{b}_n$

$\Rightarrow B''=\{\vec{c}_1,\vec{c}_2,\vec{b}_3,\dots,\vec{b}_n\}$ $\rightarrow$ Iteration

⋮

$\Rightarrow\vec{B}=\{\vec{c}_1,\dots,\vec{c}_k,\vec{b}_{k+1},\dots,\vec{b}_n\}$

ang.: $k>n$ $\rightarrow\lightning$, da $k+1\in[B]$

ang.: C selbst Basis $\Rightarrow n=k$ ersetzbar

Dimension von V:

$\dim V=|B|$

Basen von V

Koordinatenabbildung:

$B=\{\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n\}$ $\quad\Phi_B: V\to K^n$ (Φ "phi") $\rightarrow$ Abb. einer Lin.komb. in 1.dim. Array

$\vec{x}=\lambda_1\cdot\vec{b}_1+\dots+\lambda_n\cdot\vec{b}_n$: $\Phi_B(\vec{x})=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}$

Φ_B ... bijektiv

$\Phi_B(\vec{x}+\vec{y})=\Phi_B(\vec{x})+\Phi_B(\vec{y})$

$\Phi_B(\lambda\cdot\vec{x})=\lambda\cdot\Phi_B(\vec{x})$

Welche Matrizen haben inverse?:

$\exists B: A\cdot B=I_n$ (Einheitsmatrix)

Bsp.: $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ $\rightarrow A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ A ist invertierbar/regulär

$A\cdot\vec{x}$: $\quad A\in K^{n\times n}=\{\vec{a}_1\,\vec{a}_2\dots\vec{a}_n\}$, $\vec{x}\in K^n=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

$A\cdot\vec{x}=x_1\cdot\vec{a}_1+x_2\cdot\vec{a}_2+\dots+x_n\cdot\vec{a}_n$

Koeff. = Koord. von x

$A=(\vec{a}_1,\dots\vec{a}_n)$... $\Leftrightarrow$ Spalten von A...

$A=\begin{pmatrix}\vec{a}_1\\\vdots\\\vec{a}_n\end{pmatrix}$... $\Leftrightarrow$ Zeilen von A...

... invertierbar ... bilden Basis

$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ "transponiert"

! $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

Spaltenrang (von A):

= Dimension der Lin. Hülle d. Spalte von A

$rg(A)=\dim[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n]$

Zeilenrang (von A):

= Dimension der Lin. Hülle d. Zeilen von A

$rg(A^T)$

$\rightarrow rg(A)=rg(A^T)$

elem. Zeilen/Spaltenumf.:

- Mult. mit $\lambda\neq 0$
- Vertauschen
- Addieren von vielfachen zu anderer Zeile/Spalte

Elementarmatrizen:

$\rightarrow$ elem. Umf. auf Einheitsmatrix

$\Rightarrow$ Inversenbildung

$\begin{pmatrix}A\\I_n\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{Spalten-umf.}}\begin{pmatrix}I_n\\A^{-1}\end{pmatrix}$ oder

$(A\,|\,I_n)\xrightarrow{\text{Zeilen-umf.}}(I_n\,|\,A^{-1})$

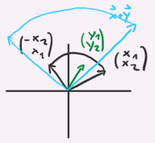
$$\begin{array}{c|cc}A=&1&2\\&3&4\\\hline I_n=&1&0\\&0&1\end{array}\rightarrow\begin{array}{cc}1&0\\3&-2\\\hline 1&-2\\0&1\end{array}\rightarrow\begin{array}{cc}1&0\\0&-2\\\hline -2&-2\\1{,}5&1\end{array}\rightarrow\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\\hline -2&1\\1{,}5&-0{,}5\end{array}$$

$\cdot -2$

$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&1\\1{,}5&-0{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Lin. Abb.:

Bsp.: $(\mathbb{R}^2,+,\mathbb{R})$:



Drehung um 90°

$f(\vec{x}): \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-x_2\\x_1\end{pmatrix}$

$f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$

$f(\lambda\cdot\vec{x})=\lambda\cdot f(\vec{x})$

Fortsetzungssatz:

$(V,+,K)$, $\dim V=n$

Voraus.: $(W,+,K)$, $f: V\to W$

Basis $B=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_n\}$ von V

$\Rightarrow\vec{x}\in V\Rightarrow f(\vec{x})$ eindeutig durch Bilder d. Basisvekt. bestimmt

Bsp.: Koeff.

$\vec{x}=x_1\cdot\vec{b}_1+\dots+x_n\cdot\vec{b}_n$

$f(\vec{x})=f(x_1\cdot\vec{b}_1+\dots+x_n\cdot\vec{b}_n)=f(x_1\cdot\vec{b}_1)+\dots+f(x_n\cdot\vec{b}_n)$

$=x_1\cdot f(\vec{b}_1)+\dots+x_n\cdot f(\vec{b}_n)$

Bild d. Basis

$\left(\begin{array}{l}V=K^n,\ W=K^m\\\text{Lin.Abb.}: f: V\to W\\f(\vec{x})=A\cdot\vec{x}\in K^{n\times m}\end{array}\right)$

$\Rightarrow$

$A\cdot\vec{x}=x_1\cdot\vec{a}_1+\dots+x_n\cdot\vec{a}_n$

$f(\vec{x})=x_1\cdot f(\vec{e}_1)+\dots+x_n\cdot f(\vec{e}_n)$

$A\cdot\vec{e}_1$ $\quad A\cdot\vec{e}_n$

1. kan. Basisvekt. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$

A ... Abbildungsmatrix bzgl. kanonischer Basis

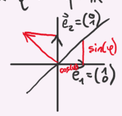
$f(\vec{x})=A\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}f(\vec{e}_1)&\dots&f(\vec{e}_n)\end{pmatrix}$

g, f lin. Abb.:

$g\circ f$ $\quad\Rightarrow(g\circ f)(\vec{x})=B\cdot A\cdot\vec{x}$

$B\cdot A$ – entspr. Abb.matrix

Drehung um φ: $f: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

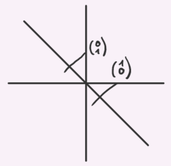


$f(\vec{x})=A\cdot\vec{x}$

$A=\begin{pmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi\\-\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}$

$f(\vec{x})=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=A\cdot\vec{x}$

Projektion auf 2. Mediane:



$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\quad\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Koordinatenwechsel in Vektorraum:

$B=\{\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n\}$, $\Phi_B: V\to K^n$

$C=\{\vec{c}_1,\dots,\vec{c}_n\}$, $\Phi_C: V\to K^n$

$T_{B,C}=\Phi_C\circ\Phi_B^{-1}$ $\quad T_{B,C}$ ... Transformationsmatrix

$f(\vec{x})=T_{B,C}\cdot\vec{x}$

$\Rightarrow T_{B,C}=\left(\Phi_C\cdot\underbrace{\Phi_B^{-1}(\vec{e}_1)}_{\vec{b}_1}\ \dots\ \Phi_C\cdot\underbrace{\Phi_B^{-1}(\vec{e}_n)}_{\vec{b}_n}\right)$

$=\Phi_B^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$

Überlegung:

$x_1\cdot\vec{b}_1+\dots+x_n\cdot\vec{b}_n\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

$\vec{b}_1\overset{?}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$T_{B,C}=\left(\Phi_C\cdot(\vec{b}_1)\ \dots\ \Phi_C\cdot(\vec{b}_n)\right)$

S. wenn Koordinaten von kan. Basis von B&C gegeben:

$\Phi_{B,C}=T_{E,C}\cdot T_{B,E}$

$\rightarrow$ aber nur $T_{B,E}$ & $T_{C,E}$ gegeben

$\Rightarrow T_{E,C}=T_{C,E}^{-1}$

Bsp.:

$\Phi_{B,C}=T_{E,C}\circ T_{B,E}$ $\quad E=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n\}$

$\mathbb{R}^2$: $B=\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\}$

Koord. bzgl. E

$C=\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\}$

$\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ Koord. bzgl. Basis B

$T_{B,E}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ $\quad T_{B,C}=\begin{pmatrix}3\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

$T_{C,E}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$

$T_{E,C}=T_{C,E}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}$

$$\begin{array}{cc}1&-1\\1&1\\\hline 1&0\\0&1\end{array}\rightarrow\begin{array}{cc}1&0\\1&2\\\hline 1&1\\0&1\end{array}\rightarrow\begin{array}{cc}1&0\\1&1\\\hline 1&\frac{1}{2}\\0&1\end{array}\rightarrow\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\\hline \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}=T_{E,C}$$

$T_{B,C}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Defekt, Rang:

Defekt von f: Dimension von Kern

$def(f)=\dim(\ker(f))$

Rang von f = Dim. v. Bild v. V

$rg(f)=\dim(f(V))$

Rangformel (Dimensionssatz):

$f: V\to W$ Lin. Abb.,

$\underbrace{def(f)}_{(=\dim(\ker(f)))}+\underbrace{rg(f)}_{(=\dim(\mathrm{im}(f)))}=\dim V$

Bild von f

Lineare Gleichungssysteme

Samstag, 13. Jänner 2024 14:59

Lineare Gleichungssysteme (19.12.–9.1. / S. 125–143)

LGS: in n Unbestimmte $x_1, \dots, x_n$ über Körper K, d.h. Koeff. aus K:

$$A = \begin{array}{l} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \dots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 \quad \dots \quad + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 \quad \dots \quad + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{array}$$

wenn $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ → homogen (sonst inhomogen)

$A \in K^{m\times n}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$

$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ $\quad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ erweiterte Systemmatrix

Bsp.: $f(\vec{x}) = A\cdot\vec{x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Bestimmung von ker(f):

$\ker f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{x}) = \vec{0}\}$ ($\vec{0} = \vec{e}$)

$\Rightarrow A\cdot\vec{x} = 0: \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 - 2\cdot x_3 = 0 \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1 x_3 = 0 \end{array}\right\} \text{LGS}$$

$x_3 = t$: $x_2 = -t$, $x_1 = 2t$

$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$\ker f = \{t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

Satz von Kronecker-Capelle:

LGS lösbar $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|\vec{b})$

Bsp.: in $\mathbb{R}$: (Ziel) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & -2 & 1 \end{array}\right)$ (A, b) $\xrightarrow{\text{Unf.}}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\operatorname{rg} A = 2 \neq \operatorname{rg}(A|\vec{b}) = 3$

$\Rightarrow$ ↯

allg. Lösung von LGS:

$f(\vec{x}) = A\cdot\vec{x}$ Lin. Abb. $f: K^n \to K^m$

$\to \exists \vec{x}_0 : A\cdot\vec{x}_0 = \vec{b}$ (eine Lösung (wenn vorhanden))

$f(\vec{x}) = \vec{0}$ $\quad f(\vec{x}_0) = \vec{0}$

$f(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{0}$

$\vec{x} - \vec{x}_0 \in \ker f$

$\vec{x} \in \vec{x}_0 + \ker f$

$\Rightarrow L = \{\vec{x} : A\cdot\vec{x} = \vec{b}\} = \underbrace{\vec{x}_0 + \ker f}_{\text{Nebenraum (zu ker f)}}$

$\ker f = \{\vec{x} \in K^n : A\cdot\vec{x} = \vec{0}\}$ → alle Lsg. von homogenen LGS

es gibt s Vektoren $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in \ker f$, sodass: (lin. unab.)

$\ker f = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n] = \{t_1\vec{x}_1 + \dots + t_n\vec{x}_n\}$

$\Rightarrow$ die lin. Hülle erzeugt jeden beliebigen Vektor, der eine Lösung des LGS ist

$\Rightarrow L = \underbrace{\{\vec{x}_0 + t_1\vec{x}_1 + \dots + t_s\vec{x}_s \mid t_1, \dots, t_s \in K\}}_{\text{Parameterdarstellung}}$

$f(\vec{x}) = A\cdot\vec{x}$, $A \in K^{m\times n}$, $f: K^m \to K^n$ Lin. Abb.:

- wenn f surjektiv: $\operatorname{rg} A = m$
- wenn f injektiv: $\operatorname{rg} A = n$
- wenn $\vec{b} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ LGS immer lösbar, da $\vec{0}$ immer Lsg. ist

bete. $A \in K^{n\times n}$ quadr. Matrix

- wenn $\operatorname{rg} A = n$ (= Spalten lin. unab.)

$\Rightarrow A\cdot f(\vec{x}) = \vec{b}$ für alle $\vec{b}$ genau eine Lösung

(invertierbar $\Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\cdot\vec{b}$)

Lösungen von LGS:

$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & A'|\vec{b} \end{array}\right) = (I_n \; A'|\vec{b})$ → (optimalerweise) in diese Form bringen

$x_m + a_{m,m+1}\cdot x_{m+1} + a_{m,m+2}\cdot x_{m+2} + \dots + a_{mn}\cdot x_n = b_m$

$x_m = b_m - a_{m,m+1}\cdot x_{m+1} - a_{m,m+2}\cdot x_{m+2} - \dots - a_{mn}\cdot x_n$ (t_1, t_2, t_{n-m})

$x_i = b_i - a_{i,m+1}\cdot x_{m+1} - \dots - a_{in}\cdot x_n$

$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + t_1\cdot\begin{pmatrix} -a_{1,m+1} \\ -a_{2,m+1} \\ \vdots \\ -a_{m,m+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + t_{n-m}\cdot\begin{pmatrix} -a_{1n} \\ -a_{2n} \\ \vdots \\ -a_{mn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{0} \end{pmatrix} + t_1\cdot\begin{pmatrix} -\vec{a}_{m+1} \\ \vec{e}_1 \end{pmatrix} + t_2\cdot\begin{pmatrix} -\vec{a}_{m+2} \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix} + \dots + t_{n-m}\cdot\begin{pmatrix} -\vec{a}_n \\ \vec{e}_{n-m} \end{pmatrix}$

Gaußsche Eliminationsverfahren:

was darf man mit LGS "machen", ohne Änderung der Lösung

$(A|\vec{b}) \hat{=} A\cdot\vec{x} = \vec{b}$ $\quad \Leftrightarrow S\cdot A\cdot\vec{x} = S\cdot\vec{b}$ (mult. mit Elementarmatrix (invertierbar))

$\Rightarrow$ elem. Zeilenumf.

↳ zus. Spaltenvert.

$(A|\vec{b}) \to (A^*|\vec{b}^*)$

Fall 1: r Zeilen, m, n, a_{11}, a_{rr}, ≠0, 0

(rg) $r < (\operatorname{rg}) m$

$\Rightarrow$ LGS unlösbar

Fall 2: a_{11}, a_{rr}, ≠0, 0

$r = n$

$\Rightarrow$ LGS endl. lösbar

Fall 3: a_{11}, a_{rr}, ≠0, 0

$r < n$

$\Rightarrow$ LGS NICHT endl. lösbar (mehrdeutige Lsg.)

Determinanten:

Berechnen:

- $n = 1$: $A = (a_{11})$ $\quad \pi\cdot(1)$

$\to \det A = a_{11}$

- $n = 2$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\to$ (π_2): 1. Spalte 2. El., 2. Spalte 1. El.

$\to \det A = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}$

- $n = 3$ **Regel von Sarrus:**

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$

$\det A = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - \dots$

Dreiecksmatrix:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \det A = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\dots\cdot a_{nn}$

Eigenschaften:

- $\det A = \det(A^T)$ → (Zeilen & Spalten getauscht)
- $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$

$\Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$ (falls invertierbar)

- "Wirkung":
  - A'... Spalte/Zeile $+\lambda$

    $\Rightarrow \det A' = \det A$? → nachrechnen
  - A'... Spalte/Zeile $\cdot\lambda \neq 0$

    $\Rightarrow \det A' = \lambda\cdot\det A$
  - A'... Spalten/Zeilen vertauscht

    $\Rightarrow \det A' = -\det A$

Kofaktor:

$A = (\vec{a}_1\vec{a}_2\dots\vec{a}_j\dots\vec{a}_n)$ oder $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ auf 0 durch $\to + \lambda\cdot\vec{e}_i$ löschen

$A' = (\vec{a}_1\vec{a}_2\dots\vec{e}_i\dots\vec{a}_n)$

Kofaktor $A_{ij} = \det A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$\hat{A}$... Matrix der Kofaktoren aus A

$\hat{A} = (A_{ij})_{1\le i,j\le n}$

D_{ij}... det von Matrix ohne i-te Zeile & j-te Spalte

$\Rightarrow A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot D_{ij}$

Laplacesche Entwicklungssatz:

(Zeilen) $\det A = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \dots + a_{in}\cdot A_{in}$

$\Rightarrow a_{i1}\cdot(-1)^{i+j}\cdot D_{i1} + a_{i2}\cdot(-1)^{i+j}\cdot D_{i2} + \dots + a_{in}\cdot(-1)^{i+j}\cdot D_{in}$

nach Spalten gleich: $(a_{1j}\cdot A_{1j} + \dots + a_{nj}\cdot A_{nj})$

Bsp.: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$

Aussagen von Determinanten

$\det A = 0$:
- Spalten & Zeilen lin. abh.
- $\operatorname{rg} A < n$
- singulär (nicht invertierbar)

$\det A \neq 0$:
- invertierbar $\Rightarrow A\cdot\underbrace{\frac{\hat{A}^T}{\det A}}_{=A^{-1}} = I_n$ (T → transponiert (Z. und S. getauscht))

Eigenwerte & Eigenvektoren:

Lin. Abb. $f: V \to V$

Skalar $\lambda \in K$ **Eigenwert**, wenn:

$\exists \vec{x} \in V\setminus\{\vec{0}\}: f(\vec{x}) = \lambda\cdot\vec{x}$

Eigenvektor (zum EW)

analog $A \in K^{n\times n}$ (quadr. Matrix):

$\exists \vec{x} \in K^n\setminus\{\vec{0}\}: A\cdot\vec{x} = \lambda\cdot\vec{x}$

Eigenwert, Eigenvektor (zum EW)

Eigenwert berechnen:

$A\cdot\vec{x} = \lambda\cdot\vec{x}$ $\quad (= \lambda\cdot I_n\cdot\vec{x})$

$\Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{(\lambda\cdot I_n - A)}_{\text{quadr. Matrix}}\cdot\vec{x}}_{\text{LGS, } n \text{ Unbestimmte}} = \vec{0}$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$

λ EW, wenn: LGS bes. nichtriv. Lösung

(= $\lambda I_n - A$ singulär / $\det(\lambda\cdot I_n - A) = 0$)

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \det(\lambda\cdot I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$ *

$\Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$ $\quad \lambda_1 = 1$ $\quad \lambda_2 = -1$

Eigenvektor berechnen:

zu EW λ:

$(\lambda\cdot I_n - A)\cdot\vec{x} = \vec{0}$

bei Bsp.* einsetzen:

$\lambda_1 = 1$:

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \Rightarrow \vec{x} = t_1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t_1 \neq 0$

wenn keine Zeile weglässt → Fehler

$\lambda_2 = -1$:

$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \Rightarrow \vec{x} = t_2\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t_2 \neq 0$

λ EW von $A \in K^{n\times n}$

$\Leftrightarrow \det(\lambda\cdot I_n - A) = 0$

Polynom in λ von Grad n

$\chi_A(\lambda)$... charakteristisches Polynom

Nullstellen von $\chi_A(\lambda) \hat{=}$ EW von A

(höchstens n NST, d.h. n versch. EW)

Bsp.: (von oben) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 2 \to \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2 Lin. unabh. EV

$\lambda_2 = -1 \to \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ EV

$A\cdot\vec{x}_1 = 2\cdot\vec{x}_1$

$A\cdot\vec{x}_2 = 2\cdot\vec{x}_2$

$A\cdot\vec{x}_3 = (-1)\cdot\vec{x}_3$

$T = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ x_1 \; x_2 \; x_3 \end{array}$

$A\cdot T = (A\cdot\vec{x}_1 \;\; A\cdot\vec{x}_2 \;\; A\cdot\vec{x}_3) = (2\cdot\vec{x}_1 \;\; 2\cdot\vec{x}_2 \;\; (-1)\cdot\vec{x}_3)$

$= (\vec{x}_1 \;\; \vec{x}_2 \;\; \vec{x}_3)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A\cdot T = T\cdot\operatorname{diag}(2,2,-1)$ $\quad | T^{-1}$

$A = T\cdot\operatorname{diag}(2,2,-1)\cdot T^{-1}$ → A ist diagonalisierbar

weiteres Bsp.: (größeres)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda\cdot I_3 - A = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -6 & \lambda-2 & 3 \\ -6 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$

$\det(\lambda\cdot I_3 - A) = (\lambda-2)\cdot\begin{vmatrix} \lambda-2 & 3 \\ 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \underbrace{(\lambda-2)}_{=0}\cdot\underbrace{(\lambda-2)}_{=0}\cdot\underbrace{(\lambda+1)}_{=0}$

$\lambda_1 = 2$ $\quad \lambda_2 = -1$

EV zu $\lambda_1 = 2$:

LGS $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad \vec{x} = t_1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $(t_1, t_2) \neq (0,0)$

EV zu $\lambda_2 = -1$

LGS $\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad \vec{x} = t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$

S.: Sei $A \in K^{n\times n}$, falls $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ lin. unabh. Vektoren

sodass $\begin{array}{ccc} \vec{x}_1 & \text{EV zu EW} & \lambda_1 \\ \vdots & -//- & \vdots \\ \vec{x}_n & -//- & \lambda_n \end{array}$ $\Big|$ $T = (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)$

dann: $A = T\cdot\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\cdot T^{-1}$

NICHT alle $A \in K^{n\times n}$ sind diagonalisierbar

Skalarprodukt, ONB, Definitheit

Montag, 22. Jänner 2024 09:51

Skalarprodukt, ONB, Definitheit (11.1. / S. ?)

Skalarprodukt:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

$$\| \quad (\vec{x} \cdot \vec{y}), \ (\vec{x}^T \cdot \vec{y}) \qquad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$$

Skalarprod. Matrizenmult. $\rightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$ orthogonal

Eigenschaften:

- symmetrisch: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$
- Linear in jedem Argument: $\langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}_1, y \rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle$, $\langle \lambda \cdot \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$
- $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0 \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$\|\vec{x}\|$ ... Länge von x

$\|\vec{x}\| = 1 \rightarrow \vec{x}$ ist normiert

Eigenschaften:

- $\|\vec{x}\| \geq 0, \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$
- $\|\lambda \cdot \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$
- Dreiecksungleichung: $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

Cauchy-Scharsche Ungleichung:

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \quad *$$

Skalar $\leq$ Produkt der Längen

Orthonomalbasis:

$B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ ONB, falls:

$$\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n: \ \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{b}_i \rangle \cdot \vec{b}_j$

$\Rightarrow$ Koordinaten: $\begin{pmatrix} \langle \vec{x}, \vec{b}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{x}, \vec{b}_n \rangle \end{pmatrix}$

Bsp.: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

B Basis: $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \vec{b}_i$ eindeutig darstellbar

$$\langle \vec{x}, \vec{b}_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \langle b_i, b_j \rangle = \mu_j \cdot 1 = \underline{\underline{\mu_j}}$$

rausziehen

nur bei $i = j$ 1 $\quad = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

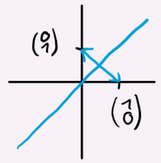
Orthogonalmatrix:

ONB $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$

$$P = (\vec{b}_1 \, \vec{b}_2 \dots \vec{b}_n)$$

$\hookrightarrow$ Spaltenvekt. ONB

Bsp.:



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^T \cdot P = \begin{pmatrix} \vec{b}_1^T \\ \vdots \\ \vec{b}_n^T \end{pmatrix} \cdot (\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n)$$

$$= \vec{b}_i^T \cdot \vec{b}_j = \langle b_i, b_j \rangle \Rightarrow I_n$$

$$\Rightarrow P^{-1} = P^T$$

Spektralsatz:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch $(A = A^T)$

$\Rightarrow$
- A bes. lauter reeller Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
- es gibt ONB aus Eigenvektoren von A $(B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\})$

Folgerung: A diagonalisierbar

$$A = P \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot P^T$$

$P = (\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n)$ } Orthogonalm.

EV

Definitheit einer Matrix

$A \in \mathbb{R}^n$: sym. reelle Matrix

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x}$$

quadr. Form

A pos. definit: $q(\vec{x}) > 0$

A negativ definit: $q(\vec{x}) < 0$

A indefinit: $\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2: q(\vec{x}_1) > 0 \wedge q(\vec{x}_2) < 0$

Definitheitsverhalten bestimmen:

1.) EW:
- alle $> 0 \Rightarrow$ pos. def.
- alle $< 0 \Rightarrow$ neg. def.
- $\lambda_i < 0, \lambda_j > 0 \Rightarrow$ indef.

2.) Hauptminorienkriterien:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad M_k = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ k-ter Hauptm.

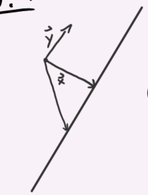
- A pos. def. $\Rightarrow M_k > 0 \quad , \forall k \in \{1, \dots, n\}$
- A neg. def. $\Rightarrow M_k < 0 \quad (-M_k$ positiv$)$

$\Leftrightarrow M_k < 0$ k ungerade
$M_k > 0$ k gerade

- $M \neq 0$ $(\det A \neq 0)$ & A $\neg$pos und $\neg$neg def. $\Rightarrow$ indefinit

$*$

Bsp.:



$\vec{x} - \lambda \cdot \vec{y}$

$$0 \leq \|\vec{x} - \lambda \cdot \vec{y}\| = \langle x - \lambda \cdot \vec{y}, x - \lambda \cdot \vec{y} \rangle =$$

$$= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - 2 \cdot \lambda \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \lambda^2 \cdot \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$$

$$= \|\vec{x}\|^2 - 2 \cdot \lambda \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \lambda^2 \cdot \|\vec{y}\|^2$$

wähle $\lambda = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2}$

$$0 \leq \|\vec{x}\|^2 - \frac{2 \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2}{\|\vec{y}\|^2} + \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2}{\|\vec{y}\|^4} \cdot \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2}{\|\vec{y}\|^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2}{\|\vec{y}\|^2} \leq \|\vec{x}\|^2 \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2$$

$$= |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2| \leq \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2$$

Δ-Ungl.:

$$\underline{\|\vec{x} + \vec{y}\|^2} = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + 2 \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \leq$$

C.S.

$$\leq \|\vec{x}\|^2 + 2 \cdot \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2$$

$$= \underline{(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2}$$

Differenzengleichungen

Montag, 22. Jänner 2024 09:49

Abschnitt 7.1 - 7.3

Differenzengleichungen (12.1.- 18.1. / S. ?)

rek. Def. von Folgen:

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$

allg: $x_{n+1} = f(n, x_n)$

$F(n, x_n, x_{n+1}) = 0$

Bsp.: (1)

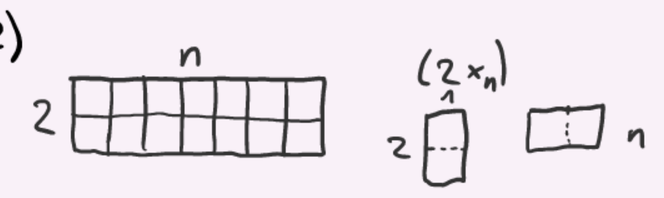
"Türme von Hanoie"

$x_n = 2\cdot x_{n-1} + 1 \rightarrow x_n = 2^n - 1$ (Partikulärlsg. (der Dgl.))

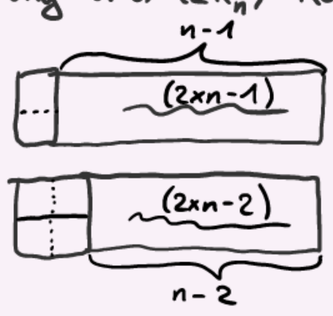
Differenzengleichung 1. Ordnung

$\rightarrow x_n = C\cdot 2^n - 1$ (allg. Lsg. (der Dgl.))

(2)



x_n ... # Pflasterung eines $(2\times x_n)$ Rechtecks mit Fliesen (1×2)



Dgl 2. Ordnung

$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \ n \geq 2$

$x_0 = 1, \ x_1 = 1$

Dgl. k-ter Ord.: $x_{n+k} = f(n, x_n, \dots, x_{n+k-1})$

Lin. Dgl. k-ter Ord:

$a_k(n)\cdot x_{n+k} + a_{k-1}(n)\cdot x_{n+k-1} + \dots + a_0(n)\cdot x_n = S(n)$

(potentielle) Störfunktion

$S(n) = 0$ homogene Fkt, sonst inhomogen

Lin. Dgl. 1. Ordnung:

Spezialfall: konst. Koeff.

$x_{n+1} = a\cdot x_1 + b, \ a,b\in\mathbb{R}, \ a\neq 0$

$x_n = a\cdot x_{n-1} + b$

(umformen $\Rightarrow$) $\underbrace{\frac{x_n}{a^n}}_{y} = \underbrace{\frac{x_{n-1}}{a^{n-1}}}_{y-1} + \frac{b}{a^n}$

$y_n = y_{n-1} + \frac{b}{a^n} = y_0 + b\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a^i}$

berechnen: $x_n = \begin{cases} a^n\cdot x_0 + \frac{a^n-1}{a-1}, & a\neq 1 \\ x_0\cdot b_n, & a = 1\end{cases}$

allg.: $x_{n+1} = a_n\cdot x_n + b_n \Leftrightarrow x_n = a_{n-1}\cdot x_{n-1} + b_{n-1}$ *

Allgemeine Lsg:

$x_n = x_n^{[h]} + x_n^{[p]}$ → eine Partikulärlsg. der urspr. inhomog. Dgl.

$x_n^{[h]}$: allg. Lsg. der homog. Dgl.

$x_n^{[h]}$ bestimmen:

$x_n = a_{n-1}\cdot x_{n-1} = a_{n-1}\cdot a_{n-2}\cdot x_{n-2} = a_{n-1}\cdots a_0\cdot x_0$

$= \underbrace{x_0}_{=C}\cdot\prod_{i=0}^{n-1} a_i$

$\Rightarrow x_n^{[h]} = C\cdot\prod_{i=0}^{n-1} a_i, \ C\in\mathbb{R}\ (\mathbb{C})$

eine $x_n^{[p]}$ bestimmen:

"Methode der Variation der Konstanten":

Ansatz: $x_n^{[p]} = C_n\cdot\prod_{i=1}^{n-1} a_i$ in * einsetzen

$C_n\cdot\prod_{i=0}^{n-1} a_i = a_{n-1}\cdot C_{n-1}\cdot\prod_{i=0}^{n-2} a_i + b_{n-1} \quad / \frac{1}{\prod_{i=0}^{n-1} a_i}$

$C_n = C_{n-1} + \underbrace{\frac{b_{n-1}}{\prod_{i=0}^{n-1} a_i}}_{\beta_{n-1}}$

⋮ iterieren

$\Rightarrow C_n = C_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\beta_k$

1 Lsg gebraucht $\Rightarrow$ z.B. $C_0 = 0$

$x_n^{[p]} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{\prod_{i=0}^{k} a_i}$

$\Rightarrow x_n^{[h]} + x_n^{[p]} = C\cdot\prod_{i=0}^{n-1} a_i + \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{\prod_{i=0}^{k} a_i}$

(nur theoretisch wissen, wie es funktioniert)

"Methode der unbest. Koeff":

$x_{n+1} = a\cdot x_n + b_n$

a ↓ konstant

großes Bsp.: fixpunktfreie Perm. (= Arrangements)

$x_n = |\{\pi\in S_n : \pi(i)\neq i, \ \forall i\}|$

↳ # fixpunktfreie Perm. auf $\{1,\dots,n\}$

↳ keine Schlingen

$\Rightarrow x_n$ erfüllt lin. Dgl. 1. Ord.

$x_n = n\cdot x_{n-1} + (-1)^n, \ n\geq 1$

n	0	1	2
x_n	1	0	1

Idee.: Bestimmen Dgl. 2. Ord. für x_n:

Fall 1: n im 2-er Zyklus

wird Fixpunkt hinausscheiden

$(n-1)\cdot x_{n-2}$, 2 El. fallen weg

Fall 2: n im Zyklus ≥ 3

$x_n = (n-1)\cdot(x_{n-1} + x_{n-2}), \ n\geq 2$

$(n-1)\cdot x_{n-1}$, 1 El. fällt weg

$-n\cdot x_{n-1}$

umformen $\underbrace{x_n - n\cdot x_{n-1}}_{y_n} = -\underbrace{(x_{n-1} - (n-1)\cdot x_{n-2})}_{y_{n-1}}$

$y_n = -y_{n-1} = (-1)\cdot(-1)\cdot y_{n-2} = \dots = (-1)^{n-2}\cdot(y_2)$

$y_2 = x_2 - 2x_1 = 1 - 2\cdot 0 = 1$

$\Rightarrow y_n = (-1)^{n-2} = (-1)^n$

$x_n - n\cdot x_{n-1} = (-1)^n$

homogene Lsg. suchen:

$x_n = n\cdot x_{n-1} + (-1)^n \Leftrightarrow x_{n+1} = \underbrace{(n+1)}_{a_n}\cdot x_n + \underbrace{(-1)^{n+1}}_{b_n}$

weglassen

$x_n^{[h]} = C\cdot n\cdot(n-1)\cdots 1 = C\cdot n!$

Partikulärlsg. suchen:

$x_n^{[p]} = C_n\cdot n!$ einsetzen $\Rightarrow C_n\cdot n! = n\cdot C_{n-1}\cdot(n-1)! + (-1)^n$

$C_n\cdot n! = C_{n-1}\cdot n! + (-1)^n \quad / \frac{1}{n!}$

$C_n = C_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}$

⋮ iterieren

$C_n = C_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$

→ 0 setzen

allg. Lsg.: $x_n = C\cdot n! + n!\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$

C an Startwert anpassen: $x_0 = 1$:

$1 = C\cdot 0! + 0!\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{0}\frac{(-1)^k}{k!}}_{=0} \Rightarrow C = 1 = \frac{(-1)^0}{0!}$

zusammenführen (mit $\frac{(-1)^k}{k!}$)

$x_n = n!\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$

2. Ordnung:

Lsg. von hom. Dgl. (Vor. konstante Koeff.):

Potenzsatz:

$x_{n+2} + a\cdot x_{n+1} + b\cdot x_n = 0$

$x_n = \lambda^n \Rightarrow \lambda^n\cdot(\lambda^2 + \lambda\cdot a + b) = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda\cdot a + b = 0$ (kl. Lsg formel)

$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \quad \left(= \frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}\right)$

Diskrim. >0: 2 reelle NST

<0: 2 konj. kompl. NST

$\Rightarrow x_n^{[h]} = C_1\cdot\lambda_1^n + C_2\cdot\lambda_2^n$

$=0$: Doppel NST

$\Rightarrow x_n^{[h]} = C_1\cdot\lambda_1^n + C_2\cdot n\cdot\lambda_1^n$

Bsp.: Fibonacci-Folge

$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \ x_0 = x_1 = 1$

$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}$

$\Rightarrow x_{n+2} = C_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$n=0$: $1 = C_1 + C_2$

$n=1$: $1 = C_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

} LGS für C_1, C_2

$\Rightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$